

خواص الموافقة في $\mathbb{Z}$

n عدد طبيعي غير معدوم. a, b, c, d أعداد صحيحة.

$$a \equiv a[n] \quad ①$$

$$② \text{ إذا كان: } a \equiv b[n] \text{ فإن: } b \equiv a[n]$$

$$③ \text{ إذا كان: } a \equiv b[n] \text{ و } b \equiv c[n] \text{ فإن: } a \equiv c[n]$$

$$④ \text{ إذا كان: } a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n] \text{ فإن: } a + c \equiv b + d[n]$$

$$⑤ \text{ إذا كان: } a \equiv b[n] \text{ و } c \equiv d[n] \text{ فإن: } a \times c \equiv b \times d[n]$$

$$⑥ \text{ عدد طبيعي غير معدوم: إذا كان: } a \equiv b[n] \text{ فإن } a^p \equiv b^p[n]$$

التمرين 1

a و b عددان طبيعيان حيث $b = 2006$ ، $a = 1428$

1. أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9

ب) بين أن: $b \equiv -1[9]$

ج) هل العددان a و b متوافقان بترديد 9 ؟ برّر إجابتك.
دورة 2008 (1)

2. أ) ماهو باقي قسمة العدد $(a + b^2)$ على 9 ؟

ب) استنتج باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3

التمرين 2

1. احسب باقي قسمة كل من $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ على 7.

2. عين باقي قسمة كل من 3^{6n} و 3^{6n+4} على 7 حيث n

عدد طبيعي غير معدوم. دورة 2008 (2)

استنتج باقي قسمة 3^{2008} على 7.

3. بين أن العدد : $3 \times 3^{6n+4} - 2 \times 3^{6n} + 4$ يقبل القسمة

على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 3

ليكن العدد الطبيعي $a = 25$

1. أ. تحقق أن: $a \equiv 1[3]$

ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2a^2 + 4$

على 3

دورة 2009 (1)

ج. بين أن: $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$

2. أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي قسمة

العدد 5^n على 3 .

ب. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $5^n + a^2 \equiv 0[3]$

التمرين 4

1. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة

الاقليدية للعدد 7^n على 9 . دورة 2009 (2)

2. عين باقي القسمة الاقليدية للعدد: $(1429^{2009} + 2008^{1430})$ على 9 .

3. بين أن العدد A حيث: $A = 7^{3n} + 7^{3n+1} + 7^{3n+2} + 6$

يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 5

a و b عددان طبيعيان حيث: $a = 2010$ و $b = 1431$.

1. أ. عين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و

b على 7 .

ب. استنتج مما سبق، باقي القسمة الإقليدية للعدد

$(a + 2b)$ على 7 . دورة 2010 (1)

ج. تحقق أن: $a^3 \equiv 1[7]$ و $b^3 \equiv 6[7]$ واستنتج أن

$$a^3 + b^3 \equiv 0[7]$$

2. أوجد الأعداد الطبيعية n التي تحقق:

$$n + 2010^3 \equiv 1431[7]$$

ثم استنتج قيم n الأصغر من أو تساوي 16 .

التمرين 6 في كل من الأسئلة الآتية اختر الإجابة

الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة، مع التعليل:

التمرين 10 a و b عددان طبيعيان بحيث:

$$a + b \equiv 7[11] \text{ و } a - b \equiv 5[11]$$

1. أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$

على العدد 11 .

ب) بين أنّ: $2a \equiv 1[11]$ و $2b \equiv 2[11]$ ثم استنتج أنّ:

$$a \equiv 6[11] \text{ و } b \equiv 1[11]$$

2. أ) أثبت أنّ: $a^5 \equiv -1[11]$.

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي k :

$$a^{10k} \equiv 1[11]$$

3. أ) تحقق أنّ: $2012 = 10 \times 201 + 2$.

ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{2012}

على العدد 11 .

دورة 2012 (2)

التمرين 11

1. هل العددان 2013 و 718 متوافقان بترديد 7 ؟

2. أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^6 على 7 .

ب) استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n :

$$4^{6n} - 1 \equiv 0[7]$$

3. أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2013 و 718 على 7 .

ب) بين أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3 \times 718^{6n} + 2013$ يقبل القسمة على 7 .

4. أ) تحقق أنّ: $1434 \equiv -1[7]$.

دورة 2013 (1)

ب) عيّن الأعداد الطبيعية n ، الأصغر من 25 بحيث:

$$1434^{2n} + n \equiv 0[7]$$

التمرين 12

a و b عددان صحيحان حيث: $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$.

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a + b$ على 7 .

2. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 + 3b^2$ على 7 .

3. أ) تحقق أنّ: $b \equiv -1[7]$.

دورة 2013 (2)

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين

$$b^{2013} \text{ و } b^{1434} \text{ على } 7 .$$

4. عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث: $(a + b)^n + n \equiv 0[7]$.

التمرين 13

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 28 على العدد 9 .

1. باقي القسمة الإقليدية للعدد (-203) على 5 هو:

أ) (-3 ب) 2 ج) 3 دورة 2010 (2)

2. x عدد صحيح. إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد x

على 7 هو 5 فإن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2x + 5$

على 7 هو:

أ) 0 ب) 1 ج) 2 .

التمرين 7

نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث: $a = 619$ و $b = 2124$

1. بين أنّ العددين a و b متوافقان بترديد 5 .

2. أ) بين أنّ: $2124 \equiv -1[5]$.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين

$$2124^{720} \text{ و } 619^{721} \text{ على } 5 .$$

ج) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

دورة 2011 (1)

$$2124^{2n} \equiv 1[5]$$

د) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون

$$2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$$

التمرين 8 a ، b و c أعداد صحيحة، بحيث باقي القسمة

الإقليدية للعدد a على 7 هو 3 . باقي القسمة الإقليدية

للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7

دورة 2011 (2)

هو 6 .

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:

$$a \times b ، a^2 - b^2$$

2. أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $c^{2n} \equiv 1[7]$

ب) تحقق أنّ $48 \equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة

الإقليدية لكل من العددين: 48^{2010} و 48^{2011} على 7

التمرين 9 اذكر في كل حالة من الحالات الآتية إن كانت

العبارة المقترحة صحيحة أو خاطئة مع التعليل:

1. n و n' عددان طبيعيان حيث: $n = 3n' + 5$. باقي

دورة 2012 (1)

قسمة n على 3 هو 5 .

2. باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2012} على 7 هو 4 .

(لاحظ أنّ: $2012 = 3 \times 670 + 2$)

3. n عدد صحيح حيث: $n \equiv 2[11]$ باقي القسمة الإقليدية

$$\text{للعدد } 2n^2 - 9 \text{ على } 11 \text{ هو } 10 .$$

4. مجموع كل ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة هو دوماً:

(أ) عدد زوجي. (ب) مضاعف للعدد 3.

(ج) مضاعف للعدد 4. (دورة 2015 (1)

التمرين 16

a و b عددان صحيحان يحققان:
 $a \equiv 13[7]$ و $b \equiv -6[7]$

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين

a و b . (دورة 2015 (2)

2. بين أن العددين $a^3 + 1$ و $b^3 - 1$ يقبلان القسمة على 7

3. (أ) تحقق أن: $a \equiv 2015[7]$ و $b \equiv 1436[7]$

(ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد

$$2015^3 + 1436^3$$

(ج) استنتج أن: $2015^3 + 1436^3 - 1962^3 + 1 \equiv 0[7]$

التمرين 17

1. عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 2^0 ، 2^1 ،

2^2 ، 2^3 و 2^4 على العدد 5 .

2. (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون:

$$2^{4n} \equiv 1[5]$$

(ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2016} على

العدد 5 . (دورة 2016 (1)

3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$2^{2016} + 2 + n \equiv 0[5]$$

التمرين 18

1. (أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^3 على 9 .

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k :

$$4^{3k} \equiv 1[9]$$

(ج) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة

الإقليدية للعدد 4^n على 9 .

(د) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 9 .

(دورة 2016 (2)

2. (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $8^{2n} \equiv 1[9]$

(ب) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون

$$8^{2n} + 4^n + 1$$
 مضاعفاً للعدد 9 .

التمرين 19 نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث:

$$a = 2016 , b = 1437 \text{ و } c = 1954$$

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $10^k \equiv 1[9]$

3. استنتج أن: (دورة 2014 (1)

$$4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 28 \equiv 1[9]$$

4. (أ) تحقق أن: $2^3 \equiv -1[9]$

عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث: $2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$

التمرين 14 عيّن الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات

الثلاث في كل حالة من الحالات الخمس مع التبرير:

1. عدد قواسم 1435 هو:

(أ) 8 . (ب) 5 . (ج) 2 .

2. إذا كان $a \equiv -1[8]$ فإن باقي قسمة a على 8 هو:

(أ) -1 . (ب) 7 . (ج) 6 .

3. العددان 1435 و 2014 متوافقان بترديد:

(أ) 2 . (ب) 4 . (ج) 3 .

4. إذا كان $x \equiv 2[5]$ و $y \equiv 2[5]$ فإن:

(أ) $x^9 + y^9 \equiv 3[5]$. (ب) $x^9 + y^9 \equiv 2[5]$.

(ج) $x^9 + y^9 \equiv 4[5]$.

5. لدينا $27 \equiv 21[6]$ إذن: (دورة 2014 (2)

(أ) $9 \equiv 7[6]$. (ب) $9 \equiv 7[2]$. (ج) $9 \equiv 7[3]$.

التمرين 15 عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد، مع التعليل، من

بين الاقتراحات الثلاث في كل حالة من الحالات الأربع الآتية:

1. إذا كان a عدداً صحيحاً حيث: $a \equiv -1[5]$ فإن:

(أ) $a \equiv 2[5]$. (ب) $a \equiv 5[5]$. (ج) $a \equiv 99[5]$.

2. باقي القسمة الإقليدية للعدد -99 على 7 هو:

(أ) -1 . (ب) 6 . (ج) 1 .

3. من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $10^n - 1$ يقبل

القسمة على:

(أ) 3 . (ب) 5 . (ج) 2 .

2. بين أن العدد $a^{1438} + b^{2017}$ يقبل القسمة على 13 .
 3. عين الأعداد الطبيعي n بحيث:
 $b^{2017} + n + 1438 \equiv 0[13]$

التمرين 23

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5 .
 2. عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $2018 = 4\alpha + 2$.
 3. بين أن العدد: $2^{2018} + 2017^8 - 5$ يقبل القسمة على 5 .
 4. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
 $12^n \equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n \equiv 2^n[5]$
 ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث:
 $12^n + (-3)^n - 4 \equiv 0[5]$

دورة 2018 (1)

التمرين 24

- أ و b عددان طبيعيان غير معدومان حيث $a = 4b + 6$.
 1. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 4 .
 2. بين أن a و b متوافقان بترديد 3 .
 3. نضع $b = 489$.
 أ) تحقق أن $a \equiv -1[13]$.
 ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2018} + 40^{2968}$ على 13 .
 ج) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد:
 $a^{2n} + n + 3$ قابلا للقسمة على 13 .

التمرين 25

- أ و b عددان طبيعيان حيث: $a = 2019$ و $b = 2969$.
 1. أ) عين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7 .
 ب) استنتج أن العددين a و $3b$ متوافقان بترديد 7 .
 2. بين أن: $9a + b \equiv 0[7]$.
 3. تحقق أن: $2a \equiv -1[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^{2969} \times a^{2969}$ على 7 .
 4. عين قيم العدد الطبيعي n حيث: $b^n + an + 2 \equiv 0[7]$.

دورة 2019 (1)

1. عين باقي القسمة الإقليدية لكل من a ، b و c على 5 .
 2. استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد:
 $a + b + c$ ، $a \times b \times c$ و b^4 على 5 .

3. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $b^{4n} \equiv 1[5]$.
 ب) استنتج أن العدد $b^{2016} - 1$ يقبل القسمة على 5 .
 4. أ) تحقق أن: $c \equiv -1[5]$.
 ب) بين أن: $c^{1438} + c^{2017} \equiv 0[5]$.

دورة 2017 (1)

- التمرين 20
 أ ، b و c ثلاثة أعداد طبيعية حيث:
 $c = 2017$ ، $b = 1966$ ، $a \equiv -5[7]$

1. عين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد:
 a ، b و c على 7 .
 2. تحقق أن: $b \equiv -1[7]$.
 3. أثبت أن العدد: $b^{2017} + 3 \times c^{1438} - 2$ يقبل القسمة على 7 .
 4. تحقق أنه، من أجل كل عدد طبيعي k : $2^{3k} \equiv 1[7]$.
 ثم استنتج أن: $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4[7]$.
 5. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $2^n + 3$ قابلا للقسمة على 7 .

دورة 2017 (2)

الاستثنائية (1)

التمرين 21

1. أ) عين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4 ، 4^2 و 4^3 على 9 .
 ب) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{3n} \equiv 1[9]$.
 ج) استنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n :
 $4^{3n+1} \equiv 4[9]$.

2. تحقق أن: $2020^{1438} \equiv 4[9]$.

3. بين أن العدد $(2020^{1438} - 2017^2 + 1995)$ يقبل القسمة على 9 .

الاستثنائية (2)

التمرين 22

- أ و b عددان صحيحان حيث: $a \equiv 14[13]$ و $b \equiv -1[13]$.
 1. أ) بين أن باقي القسمة الإقليدية للعددين a و b على 13 هو 1 و 12 على الترتيب .
 ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من $a + b$ ، $a - b$ و $2a + b^2$ على 13 .

التمرين 26

a و b عددان طبيعيين حيث: $a = 2019$ و $b = 1441$.

1. تحقق أن: $a \equiv 13[17]$. دورة 2019 (2)

2. بين أن: a و b متوافقان بترديد 17 ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 17 .

3. بين أن $a \times b \equiv -1[17]$ ثم استنتج أن: $3a^2 \times b^2 + 14 \equiv 0[17]$

4. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 17 .

5. بين أن: $2019^{1954} + 169^{2n} + 1441^{2969} - 13 \equiv 0[17]$

6. عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $n + 1954^{1962} + 16 \equiv 0[17]$

التمرين 27

لتكن الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث: $a = 2020$ ، $b = 2970$ و $c = 1441$.

1. عين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a ، b و c على 9 . دورة 2020 (1)

2. تحقق أن العدد b و $(a + 5)$ متوافقان بترديد 9 .

3. تحقق أن: $2a \equiv -1[9]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2a)^{31}$ على 9 .

4. بين أن العدد $(3a - 2b - 12c^2)$ يقبل القسمة على 9 .

التمرين 28

a و b عددان صحيحان حيث: $a \equiv 2[7]$ ، $b = 2020$.

1. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 .

2. بين أن : $a^2 + b^2 \equiv -1[7]$ ثم استنتج أن العدد $(a^2 + b^2)^{1962} - 8$ يقبل القسمة على 7 .

3. أ. عين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4 ، 4^2 و 4^3 على 7 .

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{3n} \equiv 1[7]$ ثم استنتج أن: $4^{3n+1} \equiv 4[7]$.

ج. بين أن: $b^{21} \equiv 1[7]$. دورة 2020 (2)

4. عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $4^n + a + b^{21} \equiv 0[7]$

التمرين 29

ليكن a و b عددين طبيعيين حيث: $a = 2926$ و $b = 1715$

1. عين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على العدد 13 . دورة 2021 (1)

2. أ. بين أن: $b + 1 \equiv 0[13]$ ثم استنتج أن: $b \equiv -1[13]$

ب. بين أن العدد $a^{1442} + b^{2021}$ يقبل القسمة على 13

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $A_n = 27^n + 1$

أ. تحقق أن $27 \equiv 1[13]$ ثم استنتج أن: $A_n \equiv 2[13]$

ب. عين الأعداد الطبيعية n حتى يكون:

$$A_n + n + 11 \equiv 0[13]$$

التمرين 30 لتكن الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث:

$$a = 2021 ، b = 1442 و c = 1954$$

1. عين باقي القسمة الإقليدية للعددين a و c على 3

2. بين أن العددين a و b متوافقان بترديد 3

3. أ. بين أن العدد $a + b - c$ يقبل القسمة على 3

ب. استنتج الأعداد الطبيعية n حتى يكون:

$$n + a + b - c \equiv 0[3] \quad \text{دورة 2021 (2)}$$

4. عين باقي قسمة العدد $(a \times c)^{1442} + (b \times c)^{2021}$ على 3

التمرين 31

1. عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13 .

2. تحقق أن:

$$(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$$

3. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13] \quad \text{تقني رياضي 2010}$$