



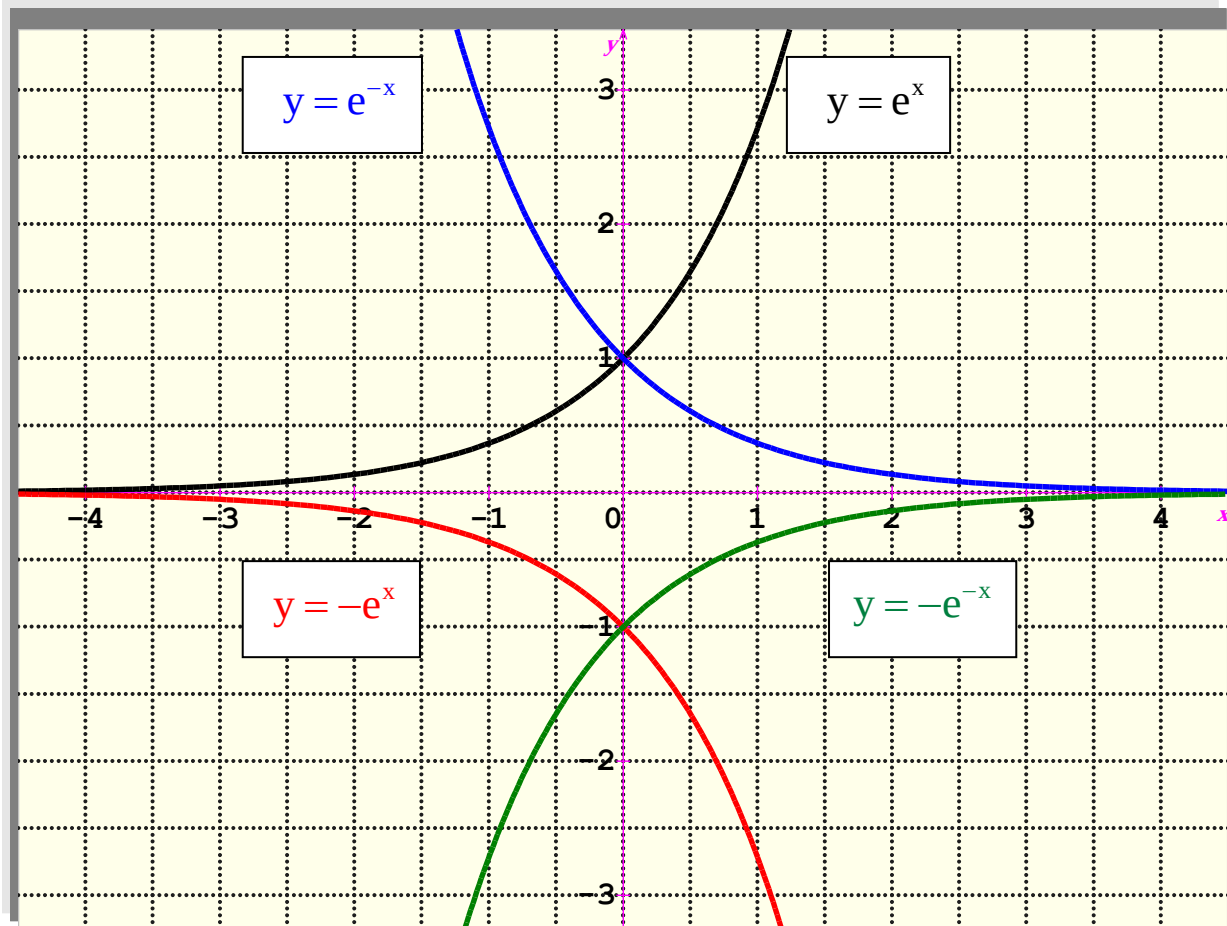
مجلة الرائد في الرياضيات



تمارين الدوال الأسية في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



إعداد BAC2020

الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook





مجلة الرائد في الرياضيات



تمارين الدوال الأسية في البكالوريا بين يديك

الشعب: علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

الجزء الاول

تدريبات متنوعة

الجزء الثاني

تمارين البكالوريا الجزائرية

الشعب: العلوم التجريبية+تقني رياضي+رياضيات

(1)المواضيع ، (2)الحلول (المجلة المرفقة)

الجزء الثالث

تمارين البكالوريات الاجنبية

(1)بكالوريات جزائرية نظام قديم (2)بكالوريات أجنبية

BAC2020

إعداد : الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook



ملخص مختصر لدرس الدالة الأسية

1) تعريف

الدالة الأسية النيبيرية هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $\exp(x)$
نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp(x) = e^x$
حالات خاصة : $\exp(0) = e^0 = 1$ و $\exp(1) = e^1 = e$ حيث $e \approx 2,718$

2) خواص ونتائج :

من أجل كل عددين حقيقيين x و y ومن أجل كل عدد صحيح n :
أ) خواص : 1) $e^x \times e^y = e^{x+y}$ ، 2) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ، 3) $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ ، 4) $(e^x)^n = e^{nx}$
ب) نتائج : 1) $e^x > 0$ ، 2) $e^x = e^y$ تكافئ $x = y$ ، 3) $e^x < e^y$ تكافئ $x < y$
4) $y = e^x$ تكافئ $x = \ln y$ ، 5) $e^x < y$ تكافئ $x < \ln y$ ، 6) $e^{\ln x} = x$ حيث $x \in \mathbb{R}_+$

3) حل المعادلة $ae^{2x} + be^x + c = 0$

حل المعادلة $ae^{2x} + be^x + c = 0$ يؤول لحل الجملة
$$\begin{cases} X = e^x \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$$

4) إشارة العبارة $\alpha e^{ax+b} + \beta$

1) إذا كان α و β موجبان تماما فإن : $\alpha e^{ax+b} + \beta > 0$

2) إذا كان α و β سالبان تماما فإن : $\alpha e^{ax+b} + \beta < 0$

3) إذا كان α و β مختلفان في الإشارة فإن العبارة $\alpha e^{ax+b} + \beta$ تنعدم عند القيمة $X_0 = \frac{\ln(-\beta) - \ln \alpha - b}{a}$

وإشارة العبارة $\alpha e^{ax+b} + \beta$ تكون كمايلي :

أ) إشارة αa من أجل كل $x \geq X_0$

ب) عكس إشارة αa من أجل كل $x \leq X_0$

5) النهايات الشهيرة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = 1 \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad (4)$$

6) الدالة المشتقة

1) من أجل كل عدد حقيقي x : $(e^x)' = e^x$

2) من أجل كل عدد حقيقي x : $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$ حيث a و b عددان حقيقيان

3) إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال D فإن الدالة $x \rightarrow e^{u(x)}$ قابلة للإشتقاق على المجال D حيث: $[e^{u(x)}]' = u'(x)e^{u(x)}$ (مشتقة دالة مركبة).
نتيجة: الدالتان u و $x \rightarrow e^{u(x)}$ لهما نفس اتجاه التغير على المجال D .

7) دراسة الدالة $x \rightarrow e^x$

* دراس اتجاه التغير وتشكيل جدول التغيرات

الدالة $x \rightarrow e^x$ معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$
جدول تغيراتها يكون كمايلي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		+		
e^x	0	1	e	$+\infty$

نتيجة:

من أجل كل عدد حقيقي $x < 0$ فإن: $0 < e^x < 1$

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ فإن: $e^x > 1$

* رسم المنحنى البياني



الجزء الأول: تدريبات متنوعة

التمرين 01

1- بسط العبارات التالية

$$C = (e^{2x} + 1)(e^{2x} - 1), D = \frac{e^x}{x - e^x} - \frac{1}{1 - xe^{-x}}, B = (e^x - 1)^2 - (e^x + 1)^2, A = (e^2)^3 \times (e^2)^{-2} - e^2$$

2- تحقق من صحة المساواة التالية من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$\frac{3e^x - 1}{1 + e^x} + 1 = \frac{4}{e^{-x} + 1} \quad (4), \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad (3), \quad (2), \quad (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4 \quad (1)$$

التمرين 02

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

$$(e^{2x} - e)(e^{-2x} + 2) = 0 \quad (5), \quad \frac{2e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}} \quad (4), \quad e^{4x^2+6} = e^{-14x} \quad (3), \quad e^{-x} + 1 = 0 \quad (2), \quad e^{3+x} = e \quad (1)$$

$$\frac{(x+1)(e^x - 1)}{e^x - 2} = 0 \quad (9), \quad 5e^x - 6e^{-x} + 7 = 0 \quad (8), \quad e^{x+2} - e - 2e^{-x} = 0 \quad (7), \quad 2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0 \quad (6)$$

2- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية

$$(-2e^x + 4)(e^x - 1) \leq 0 \quad (5), \quad e^{-x^2+x} \leq 1 \quad (4), \quad e^{-x} + e^x \leq 2 \quad (3), \quad e^{3x^2-3} \leq e^{10x} \quad (2), \quad e^x \geq e \quad (1)$$

$$\frac{(x+1)(e^x + 1)}{e^x - 1} \geq 0 \quad (9), \quad 2e^{2x} - 3e^x - 5 \geq 0 \quad (8), \quad e^{2x} - 2e^x - 8 > 0 \quad (7), \quad (x+1)(e^x - 1) \leq 0 \quad (6)$$

التمرين 03

نعتبر كثير الحدود P للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$

(1) تحقق من أن 3 هو جذر $P(x)$ ، ثم استنتج: $P(x) = (2x - 1)(x + 2)(3 - x)$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$ استنتج مجموعة حلول المعادلة: $P(e^x) = 0$ والمتراجحة $P(e^{-2x}) \geq 0$

التمرين 04

نعتبر كثير الحدود التالي: $f(x) = 2x^3 - (1 + 2e)x^2 + (e - 1)x + e$

(1) عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) - f(1) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ ثم استنتج حلول المعادلة: $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $2e^{2x} + e \times e^{-x} \geq (1 + 2e)e^x - (e - 1)$

التمرين 05

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة: $f(x) = x + \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ واليكن C_f تمثيلها البياني

(1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن: $f(-x) = -x - 1 + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 1}$

- (2) بين أن الدالة f فردية ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى C_f ؟
 (3) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال التعريف.
 (4) بين أن المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.
 استنتج أن للمنحنى C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

التمرين 06

أدرس تغيرات الدوال التالية:

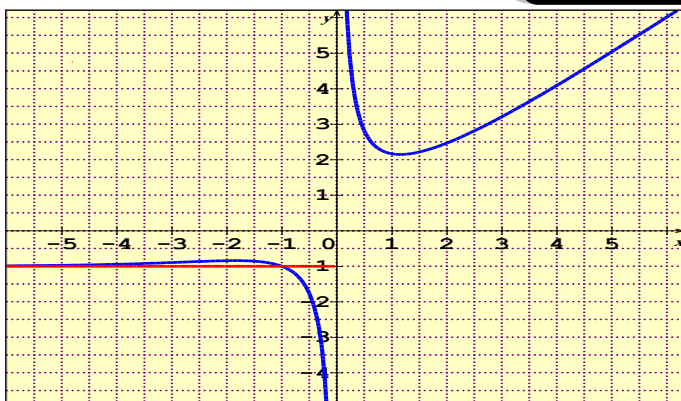
- (1) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = e^x - x + 1$ (2) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = e^{2x} - e^x - 1$ (3) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$
 (4) $D_f = \mathbb{R}^*$ ، $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$ (5) $D_f = \mathbb{R}^*$ ، $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ (6) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = (x - 1)e^{-x}$
 (7) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = (x - 1)(1 + 2e^{-x})$ (8) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ (9) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = x + 2 - \frac{e^x}{e^x + 1}$

التمرين 07

حدّد العبارات التالية الصحيحة والخاطئة مع التبرير
 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$.

- (1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) \times f(-x) \leq 0$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$
 (3) الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى عند $x = 1$.
 (4) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) + f(x) = e^{-x}$

التمرين 08



الجزء A المنحني (c) في الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $D = \mathbb{R} - \{0\}$ في المستوي المنسوب إلى متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، محاور الترتيب والمستقيم الذي معادلته: $y = -1$ مقاربان لـ (c).

- (1) اقرأ بيانيا نهايات f عند أطراف D .
 (2) حل بيانيا كل من: (أ) $f(x) = -1$ (ب) $f(x) > -1$

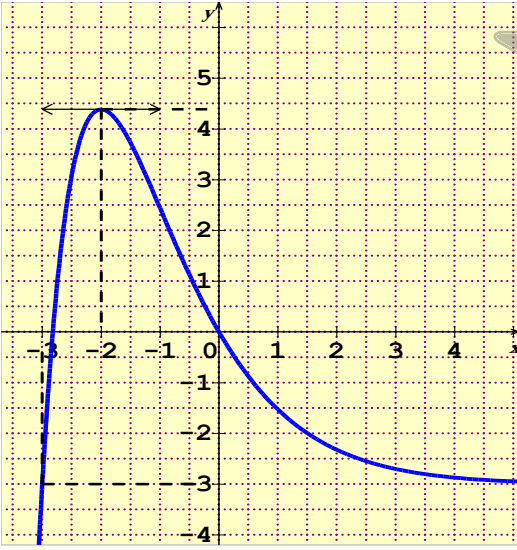
الجزء B: نقبل أن f معرفة بالدستور: $f(x) = \frac{xe^x + 1}{e^x - 1}$

- (1) ادرس ، حسب قيم x إشارة $(e^x - 1)$ ، ثم حل في $\mathbb{R}^*$ المتراجحة: $f(x) > -1$.

(2) تحقق أن: $f(x) = -\frac{x + e^{-x}}{e^{-x} - 1}$ ، ثم جد من جديد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- (3) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا ؟

التمرين 09



f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = (x+a)e^{-x} + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان واليكن تمثيلها C_f البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) بقراءة بيانية للمنحنى C_f :

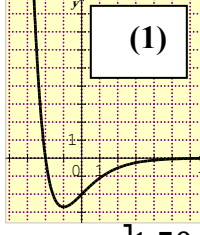
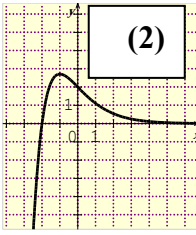
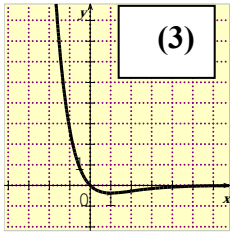
أ) عين $f(-3)$ ، $f(0)$ ، $f'(-2)$

ب) عين حسب قيم x إشارة $f'(x)$

(2) من بين المنحنيات (1)، (2)، (3) عين مع التبرير المنحنى الممثل للدالة f .

-2 أ) بين أن $f(x) = (x+3)e^{-x} - 3$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .



ج) بين أن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل حدا وحيدا $\alpha \in]1,50; 1,52[$

التمرين 10

x	$-\infty$	الحد	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = e^{x^2+ax+b}$

حيث a ، b عدنان حقيقيان و جدول تغيراتها هو التالي

(1) احسب $f'(x)$ بدلالة a ، b ثم عين العددين a ، b .

(2) تحقق ان معادلة المماس (T) عند $x_0 = 0$ هي $y = e(-3x+1)$

(3) نعتبر h دالة معرفة على $[1; +\infty[$ ب: $h(x) = g(x^2 + x + \frac{3}{2})$

أ) باستعمال مشتقة دالة مركبة استنتج عبارة $h'(x)$ على مجموعة تعريفها.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة h .

التمرين 11

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية واليكن تمثيلها البياني C_f .

(1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c علما أن المنحنى C_f يقبل مماسا يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة (-1) وميله يساوي 3 عند النقطة $A(0; -3)$ و $\sqrt{3}$ حدا للمعادلة $f(x) = 0$.

(2) نعتبر g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$. واليكن C_g تمثيلها البياني

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ $g(x) = f(x)$

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

د) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى C_g عند نقطة تقاطعه مع محور الترتيب.

هـ) عين نقط تقاطع C_g مع حامل محور الفواصل ثم ارسم المماس (T) للمنحنى C_g .

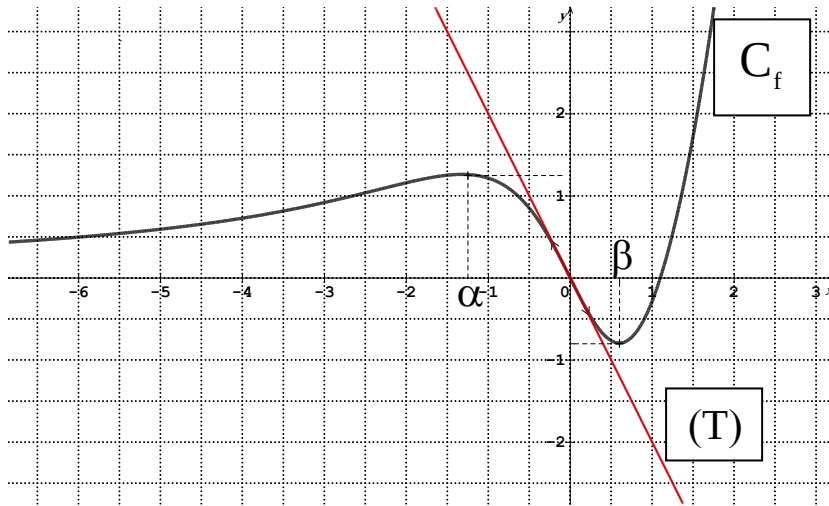
و) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2 + me^x = 3$

التمرين 12

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x - x}$

واليمكن تمثيلها البياني (الشكل الموالي) والمستقيم (T) هو المماس عند المبدأ.



1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{2x} - 4e^x + 3 > 0$

3) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x - x > 0$. استنتج إشارة $f(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

4) باستعمال القراءة بيانية: أ) شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب) عين حصرا سعة 0,2 لكل من العددين α و β القيمتين الحديتين للدالة f على $\mathbb{R}$.

ج) عين كلا من $f'(0)$, $f''(0)$, $f'(α)$, $f'(β)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{f'(x) - f'(0)}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

5) دالة معرفة ب: $g(x) = \frac{-1}{f(x)}$ و (C_g) تمثيلها البياني

أ) بيّن أن مجموعة تعريف g هي: $D =]-\infty; 0[\cup]0; \ln 3[\cup]\ln 3; +\infty[$

ب) أوجد نهايات g عند اطراف مجال تعريفها ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا.

ج) ادرس اتجاه تغير g ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

الجزء الثاني: تمارين البكالوريات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 13: دورة 2019

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول هي 2cm
(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g والمعرفتين $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = e^x - ex \quad \text{و} \quad f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$$

- 1- أدرس اتجاه تغير الدالة g . (ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
2- أدرس اتجاه تغير الدالة f .

- 3- احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات f .

- 4- أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

- 5- أرسم على المجال $[0; 2]$ المنحنين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (تعطى $e^2 - 2e \approx 2$)

- 7- h دالة معرفة على المجال $[-2; 2]$ ب: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق
أ) بيّن أن الدالة h زوجية.

- ب) من أجل $x \in [0; 2]$ احسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقاً من (C_f) ثم أرسمه

التمرين 14: دورة 2018

I-g الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

- ب) ادراس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

- ج) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً حيداً α حيث: $-0,36 < \alpha < -0,38$ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

- II- لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ واليكن و (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- أ) أحسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1))$ ثم تفسر النتيجة بيانياً.

- ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم $(\Delta): y = 2x + 1$. حيث:

- (2) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ يكون: $f'(x) = g(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

- (3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

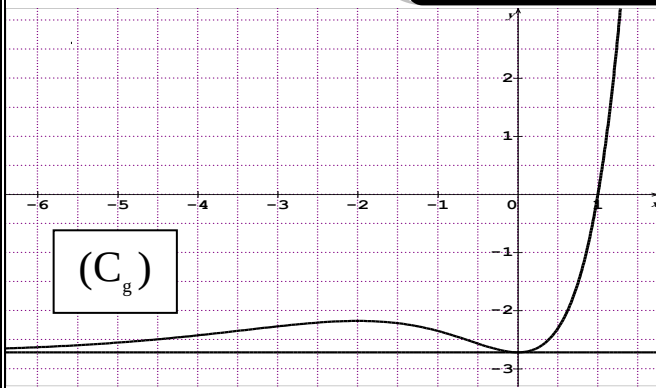
- (4) ارسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,8$)

- (5) عيّن عدد وإشارة حلول المعادلة $x = (1-m)e^x$

التمرين 15: دورة 2017

- I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2- أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$.
 ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
- II- نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x) = 1 - x e^{1-x}$.
- 1- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T).
- 2- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.
- 3- إنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

التمرين 16: دورة 2017 الاستدراكية



- I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$: $g(x) = x^2 e^x - e$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كما هو في الشكل المقابل.
- احسب $g(1)$
- بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

- II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- احسب النهايات الآتية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2- بين أن المنحنى (γ) ذو المعادلة $y = e^{-x} - 2$ و (C_f) متقاربان عند $-\infty$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة (γ) .
- 3- بين أنه من أجل كل حقيقي x غير معدوم: $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.
- 4- استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $]0; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty; -1]$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- 5- بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقاً من منحنى الدالة $x \rightarrow e^x$ ثم ارسم كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

التمرين 17: دورة 2016

- I- الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$
- أ-1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
- أ-2 بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1,52 < \alpha < -1,51$
- ب) استنتج إشارة $g(x)$.
- II- الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ واليكن و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1cm
- أ-1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)$
- ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,38$)
- د) عيّن دون حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ وفسر هندسياً للنتيجة.
- أ-2 بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
- ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- ج) بيّن أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثياتهما.
- د) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$
- هـ) ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$ على المجال $[-2; +\infty[$.

التمرين 18: دورة 2016 الاستدراكية

- I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$
- I-1-أ) حساب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ودراسة اتجاه تغير الدالة g'
- ب) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) > 0$.
- ج) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وشكل جدول تغيراتها
- 2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-1,38 < \alpha < -1,37$
- 3) استنتاج إشارة $g(x)$ على من أجل كل عدد حقيقي x .
- II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$
- أ-1 احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- ب) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{x e^x \cdot g(x)}{(e^x - x)^2}$

(ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، وشكل جدول تغيراتها

2-أ) بيّن أن: $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ وفسر النتيجة بيانيا.

(ج) ارسم المنحنى (C_f)

التمرين 19: دورة 2015

I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

(2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$ و (C_f) تمثيلها البياني

1-أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = e^{2x+2} \cdot g(-x)$.

(ب) استنتج أن الدالة f متناقصة تماماً على $]-\infty; -\alpha]$ و متزايدة تماماً على $[-\alpha; +\infty[$

(2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

(4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = -x + 1$.

(5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ ، نأخذ: $f(-\alpha) \approx 0,1$.

التمرين 20: دورة 2013

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

I) الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ ب: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ و (C) تمثيلها

البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ واستنتج المستقيمين المقاربين لـ (C)

(2) احسب $f'(x)$. بيّن أن f متناقصة تماماً على $]-\infty; 1[$ ثم شكل جدول تغيراتها

(3) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α باستعمال الجدول أعلاه ثم جد حصراً للعدد α .

(4) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عيّن بيانياً مجموعة قيم m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ ب: $g(x) = f(2x-1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

2-أ) تحقق من أن: $g(\frac{\alpha+1}{2}) = 0$ ثم بيّن أن $2f'(\alpha) = g'(\frac{\alpha+1}{2})$

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T)

التمرين 21: دورة 2012

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - xe^x$

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in [-1; +\infty[$

ب- تحقق أن: $0,5 < \alpha < 0,6$ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.
استنتج إشارة $f'(x)$ على $]-\infty; 2]$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

4) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1,6 < x_1 < -1,5$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.
ب- أنشئ (Δ) و (C_f)

التمرين 22: دورة 2011

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x - ex - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
ب- احسب $f'(x)$ ثم ادرس اشارتها.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

2- أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[1,75; 1,76]$ حلا وحيدا α .

د- أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم (C_f) في المجال $]-\infty; 2]$

التمرين 23 :دورة 2010

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

يرمز (C_f) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') .

معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = x + 1$.

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4) بيّن أن النقطة $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5)أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,3 < \beta < -1,4$.

ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج) أرسم (Δ) و (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x} = m$

التمرين 24 :دورة 2008

I- الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[-2; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$

حيث a و b عددان حقيقيان. و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

عين a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$

II- نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كمايلي :

$g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$ و (C_g) إلى تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر النتيجة بيانيا ($\lim_{u \rightarrow +\infty} ue^u = 0$)

ب) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بين أن (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

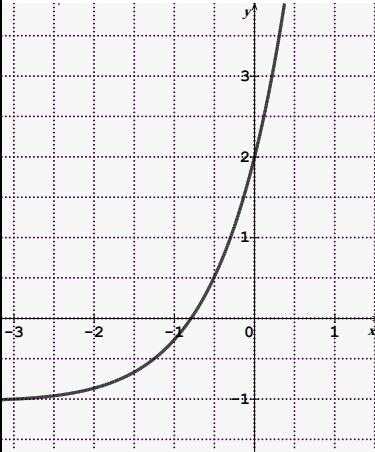
هـ) أرسم (C_g) .

و) k الدالة المعرفة المجال $[-2; +\infty[$ بـ : $k(x) = g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

شعبة: تقني رياضي

التمرين 25: دورة 2019



I- الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:
 $g(x) = (x+3)e^x - 1$ و (C_g) إلى تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل
 بقراءة بيانية

أ) حدد إشارة $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$.

ب) أستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$.

بحيث $g(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق أن : $-0,8 < \alpha < -0,7$.

ج) أستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

ج) اكتب معادلة L (T) مماس (C_f) والموازي للمستقيم (Δ) .

4- أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 1]$ (يعطى $f(\alpha) \simeq -0,7$)

5- دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ) بين أن الدالة h زوجية.

ب) تأكد انه من اجل كل $0; +\infty[$ فإن $h(x) = f(x-2) + 1$

ج) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أرسم (C_h) على المجال $[-3; 3]$

التمرين 26: دورة 2018

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ ب: $f(x) = \frac{x}{x-1} e^{-x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

2- بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $f'(x) = \frac{(-x^2 + x - 1)e^{-x}}{(x-1)^2}$.

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3- أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر .

ب) الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ ب: $h(x) = e^{-x} + x - 1$

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم أستنتج أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $h(x) \geq 0$.

4) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $f(x) + x = \frac{xh(x)}{(x-1)}$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) . فسر النتيجة بيانيا .

5) أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O والنقطة $A(-2; \frac{2}{3}e^2)$ ، ثم أرسم

المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-2; 1[$.

التمرين 27: دورة 2017

I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$

- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج اشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2- أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$ ثم استنتج معادلة ل: (Δ) لمقارب المائل للمنحنى (C_f) .

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

4- باستعمال المنحنى (C_f) ، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين .

التمرين 28: دورة 2015

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (x+2)e^x - 2$

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2- أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.

- (ب) أستنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (ج) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
- ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- 3- أ بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,55 < \beta < -1,56$
- (ب) أرسم (Δ) و المنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$

التمرين 29: دورة 2014

- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)e^x$.
- (C_f) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1- عين نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.
- 2- أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3- أ بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$. ثم تحقق أن: $1,27 < \alpha < 1,28$
- (ب) أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T)
- (ج) أرسم (T) و (C_f) .
- 4- عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة: $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$
- 5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (|x| + 1)e^{-|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني.
- (أ) بيّن أن الدالة h زوجية.
- (ب) أرسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .
- 6- g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax + b)e^x$ حيث a و b عددان حقيقيان.
- عين a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$

التمرين 30: دورة 2013

- $g - I$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$
- (1) أدرس تغيرات الدالة g ، شكل جدول تغيراتها.
- (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,59 < \alpha < 1,60$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$.
- $II - f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x - 2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ؛ [وحدة الطول: 2cm].
- 1- بيّن أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلاتهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$
- 2- أ برهن أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$
- (ب) أستنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(ج) احسب $f(1)$ ، ثم أستنتج إشارة $f(x)$.

3-أ) بيّن أن : $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$. ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

(ج) أرسم (C_f) .

4-ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$

5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x) = [f(x)]^2$

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ثم أستنتج إشارة $h'(x)$. ب) شكل جدول تغيرات الدالة h .

التمرين 31: دورة 2011

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- عيّن المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .

3- بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطاب تعيينها ثم اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عندها.

4- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = f(x) - x$

أ- ادرس تغيرات الدالة g .

ب- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حدا وحيدا α حيث $2,7 < \alpha < 2,8$.

- أحسب $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5- أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

ب- ارسم المماس والمستقيم الذي معادلته: $y = x$ و (C_f) .

التمرين 32: دورة 2010

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ من اجل كل $x \in \mathbb{R}^*$

2- احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجالات تعريفها.

3- بيّن أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

4- أ) (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتهما على الترتيب $y = x + \frac{4}{3}$ و $y = x$

بيّن أن (D) و (D') مقاربان لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث: $0,9 < x_0 < 0,91$ و $-1,65 < x_1 < -1,66$

- ج) أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً.
 د) أرسم (D) و (D') و (C_f) .
 5- m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x + m$
 ناقش بيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$
 6- g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = [f(x)]^2$
 ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x

التمرين 33: دورة 2009

- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 1- أحسب $f(-x) + f(x)$ وماذا تستنتج؟
 - 2- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.
 - 3- بين أن المستقيم $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)
 - 4- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)]$ ثم فسر النتيجة هندسياً.
 - 5- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α حيث: $-1,7 < \alpha < -1,6$
 - 6- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها
 - 7- بين أن المنحنى (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان المقاربان ثم أرسم المنحنى (C_f) .

شعبة: الرياضيات

التمرين 34: دورة 2019

- I- f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي .
 ليكن (C_k) تمثيلها البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 1) بيّن أن جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.
 2) أحسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$ (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k)
 3-أ) احسب $f'_k(x)$ ، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k .
 ب) شكل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.
 4- ناقش وحسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية (C_k) و (C_{k+1}) .
 II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى (C_f) على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right]$.
 2-أ) بيّن ان المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث : $-1,28 < \alpha < -1,27$
 ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right| = \left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

التمرين 35: دورة 2018

I) g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$

1) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

وأستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,9 < \alpha < 1$.
 واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x)^2}$

وأستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x)$ يمكن وضع (يمكن وضع $t = -\frac{1}{x}$) ثم استنتج ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقاري للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$.

3- h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي: $h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
 ب) تحقق أن: $f(x) - x = (1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)
 4- أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 1,73$)

التمرين 36: دورة 2017

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلة له

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$.

ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

3- h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي: $h(x) = x^2e^{-x+2} - 4$. ادرس اتجاه تغير

الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ وحدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $]0; +\infty[$.

4- أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) على المجال $]0; +\infty[$.

5- نعتبر الوسيط الحقيقي m والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب: $f(x) = m(x-2)$ (E)

ناقش بيانها وحسب قيم m عدد حلول المعادلة (E).

6- g الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

إعتادا على السؤال رقم (1) شكل جدول تغيرات الدالة g .

التمرين 37: دورة 2017 الإستدراكية

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$ و (C) تمثيلها البياني

1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما، أحسب $f(-2)$ وأرسم (C_f)

II- ليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$

و(C_m) تمثيلها البياني في امعلم السابق.

- 1- أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثيها.
- 2- أدرس اتجاه تغير f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما.
- 3- M_m نقطة من (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m = 1 - m$ أثبت أنه عندما m يسمح $\mathbb{R}$ فإن M_m تنتمي إلى منحنى يطلب تعيينه.
- 4- أدرس حسب قيم الوسيط m حيث $m \neq 2$ الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m)

التمرين 38: دورة جوان 2016

$\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$ كمايلي: $\mathbb{R}$ دالة عددية معرفة على

أ-1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ وشكل جدول تغيراتها.

- 2) تبين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حدا وحيدا α ، يختلف عن 1، ثم تحقق أن $2,79 < \alpha < 2,80$
- 3) استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f و g الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = (2x - 1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$

أ-1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

- 2) بيّن أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.
- 3) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f)

أ-4) بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - g(x) = \frac{(2x - 1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1}$

ب) ادرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g)

التمرين 39: دورة جوان 2015

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0]$: $f(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x}}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

أ-3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

أ-4) بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$

استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

5) الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ ب: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

6-أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$: $f(x) > x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ج) أنشئ المنحنى (C_f) .

8) m عدد حقيقي، h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty; 0[$ ب: $h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$.

أ) أحسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .

ب) باستعمال (C_f) ، ناقش بياناً وحسب الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $h'_m(x) = 0$.

التمرين 40: دورة جوان 2014

I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (2-x)e^x - 1$.

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث: $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ وفسر النتيجة هندسياً.

2- بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ و استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ و استنتج حصراً للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

4- احسب $f(1)$ ، ثم أرسم المنحنى (C_f) .

التمرين 41: دورة جوان 2013

I- الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$.

1- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

تحقق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ ، حسب قيم العدد الحقيقي x .

II- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$ و (C_f) منحنى الدالة f في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ؛ [وحدة الطول: 2cm].

1-أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2-أ- بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ (نأخذ: $f(\alpha) = -0,9$)

3-أ- بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين ، معمل توجبه كل منهما يساوي 1 .

يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب- مثل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f) .

ج- ناقش بيانيا ، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x :

$$(x+1)^2 + me^x = 0$$

التمرين 42: دورة جوان 2012

I- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = 2 - xe^x$

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,8 < \alpha < 0,9$

3) عين حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x+2}{e^x + 2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ؛ [وحدة الطول: 2cm].

1) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ب- بيّن أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة: $y = x + 1$ مقارب لـ (C_f) .

3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

4) أ- بيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 2)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب- بيّن أن $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

5) أرسم (Δ) و (Δ') و (C_f) .

6) ناقش ، بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي ، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

التمرين 43: دورة جوان 2010

I- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (3-x)e^x - 3$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما معدوم والآخر $\alpha \in]2,82; 2,83[$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 واليكن (C_f) تمثيلها البياني

1) بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$ واكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند O

2) أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) بين أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$

ج) تحقق أن: $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ، ثم عين حصره له.

د) أنشئ جدول تغيرات f

3) أحسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x \rightarrow -x^3$

4) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ وفسر النتيجة هندسياً.

5) أنشئ في نفس المعلم المماس (T) و (C_f) و (C)

التمرين 44: دورة جوان 2008

I- الدالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) بين أن (C_f) يقبل نقط إنعطاف ω واكتب معادلة لمماس (C_f) عند ω .

ثم بين أن ω مركز تناظر لـ (C_f)

3) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)]$

استنتج أن (C_f) يقبل مقاربين يطلب تعيين معادلة كل منهما

4) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $[-2,76; -2,77]$ $x_0 \in$.

احسب $f(1)$ و $f(-1)$ ارسم (C_f)

II- دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ واليكن (C_g) تمثيلها البياني.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) = f(-x)$

2) أنشئ (C_g) في نفس المعلم السابق (دون دراسة g).

الجزء الثالث: بكالوريات جزائرية و أجنبية

بكالوريات جزائرية-نظام قديم

التمرين 45: بكالوريا جوان 98 ج

المستوي (π) منسوب إلى معلم متعامد و متجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$)

- 1- لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني أدرس تغيرات الدالة f و أثبت أن (C_f) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة
- ب - بين أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)
- ج - أحسب: $f(\ln 2)$ ، $f(\ln 3)$ و $f(2\ln 3)$ ثم أرسم المنحني (C_f)
- 2- لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $h(x) = \frac{2e^x}{|e^x - 1|}$ و (C_h) تمثيلها البياني

أ - أكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب - باستخدام المنحني (C_f) أرسم المنحني (C_h)

ج - ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات

المجهول الحقيقي x : $(m-3)|e^x - 1| = 2e^x$

التمرين 46: بكالوريا سبتمبر 2001

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني: I-1- أدرس تغيرات الدالة f .

ب) بين المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ).

2- أ) x_0 عدد حقيقي، نعتبر (T) المماس للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0 .

عين x_0 حتى يكون (T) موازيا لـ (Δ). ثم اكتب عندئذ معادلة لـ (T)

ب) بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها.

ج) أرسم (T) و (C_f) في نفس المعلم على المجال $]-\infty; 1]$

د) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم

(T_m) الذي معادلته : $y = -x + m$

التمرين 47: بكالوريا جوان 2005

الجزء I: لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = x + 1 + e^x$

1- أدرس تغيرات الدالة h .

2- أثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α وأن: $-1,28 < \alpha < -1,27$

3- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $h(x)$

الجزء II: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1- أ- بين أنه مهما يكن العدد الحقيقي x : $f'(x) = \frac{h(x).e^x}{(e^x + 1)^2}$ (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

ب- ادرس تغيرات الدالة f .

2- بيّن أن: $f(\alpha) = \alpha + 1$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

3- أ- ليكن (T) مماس (C_f) في النقطة O . اكتب معادلة للمستقيم (T) .

ب- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) معادلته $y = x$ ، ثم ادرس الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

ج- أحسب $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$. ثم أنشئ في نفس المعلم (Δ) و (T) و (C_f) .

التمرين 48: بكالوريا جوان 2006

أ- لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (3 - 2x)e^x + 2$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α وأن: $1,68 < \alpha < 1,69$

3- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

2- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني وحدة الطول 2cm

ب- 1- بين أنه مهما يكن العدد الحقيقي x : $f'(x) = \frac{2.g(x)}{(e^x + 1)^2}$ (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

2- بيّن أن: $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3- ادرس تغيرات الدالة f .

4- بين المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ) ذو المعادلة: $y = 4x - 1$

5- أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) .

ج- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 2$.

د- أرسم كلاً من (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) .

هـ- ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $me^x - 4x + m + 2 = 0$

بكالوريات أجنبية

التمرين 49: عن بكالوريا فرنسا 2019/ N-Calédonie

(ترجمة الأستاذ جبالي/بتصرف)

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x+2)e^{x-4}$.

- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
- (2) برهن أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حداً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $3,1 < \alpha < 3$.
- (3) استنتج إشارة $(g(x) - 2)$ ، على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}$.

يرمز (C_f) إلى منحناها في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$: (الوحدة : $\|\vec{i}\| = 1,5\text{cm}$; $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$).

- (1) حلّ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم فسر النتائج هندسياً.
- (2) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (3) ا- برهن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -x(g(x) - 2)$.
ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (4) بيّن أن $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\alpha + 2}$ ، ثم استنتج حصر $f(\alpha)$.
- (5) ا- احسب $f(-2,5)$ و $f(4,25)$ ، ثم أنشئ (C_f) ؛ (يمكن أخذ $f(\alpha) \approx 5,7$).
ب- عيّن قيم الوسيط الحقيقي m ، حتى يكون للمعادلة $f(x) = m + f(\alpha)$ ثلاثة حلول متميزة.

التمرين 50: عن بكالوريا فرنسا 2018

(ترجمة الأستاذ جبالي/بتصرف)

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -2x^3 + x^2 - 1$.

- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
- (2) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $-0,7 < \alpha < -0,6$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-2x+1}$.

يرمز (C_f) إلى منحناها في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$: (الوحدة : $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$; $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$).

- (2) ا- برهن أنه، من أجل أي عدد حقيقي $x > 1$ ، فإن : $1 < x < x^2 < x^3$.
ب- استنتج أنه، من أجل أي عدد حقيقي $x > 1$ ، فإن : $0 < f(x) < 4x^3 \cdot e^{-2x+1}$.
- ج- باستخدام النهاية الشهيرة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ ، برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$.

- د- استنتج، من (2) ج- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسرها هندسيًا.
- 3) ا- برهن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x).e^{-2x+1}$.
 ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات f .
- 4) احسب $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $f(-1,1)$ ، ثم أنشئ (C_f) ؛ (تعطى $f(\alpha) \approx 5$).

التمرين 51: عن بكالوريا تونس 2017

(ترجمة وتصرف الأستاذ: بالعبيدي م العربي)

نعتبر الدالة f والمعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$ واليكن (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

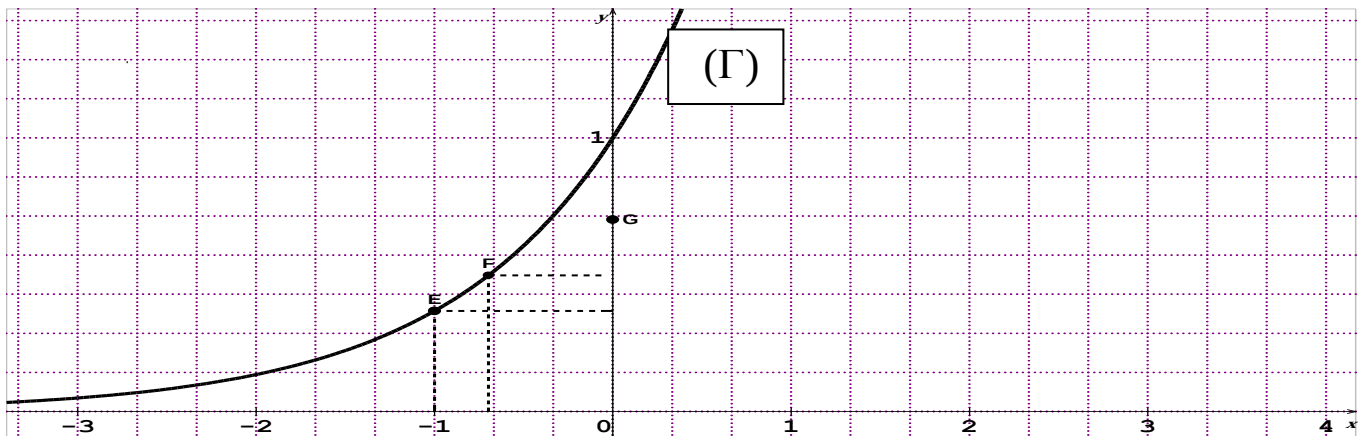
- 1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 2- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -(x-1)^2e^{-x}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- 3- أ) أكتب معادلة ديكرتية لمماس المنحنى (C) عند النقطة J ذات الفاصلة 0.
 ب) لتكن A و B نقطتان من المنحنى (C) فاصلتهما 1 و 3 على الترتيب.
 بيّن أن النقطتين A و B نقطتي انعطاف للمنحنى (C) .

4- في الشكل (1): (Γ) يمثل المنحنى البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ للدالة g والمعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = e^x$.

- E و F نقطتان من المنحنى (Γ) فاصلتهما (-1) و $(\ln 10 - 3)$ على الترتيب و G نقطة من المستوى احداثياتها $(0; 1 - 6e^{-3})$.

- أ) عبر عن $f(1)$ بدلالة $g(-1)$ و عن $f(3)$ بدلالة $g(-3)$.
- ب) أنشئ كلا من النقطتين A و B في الشكل (1) (لاحظ أن $10g(-3) = g(\ln 10 - 3)$).
- 5- أ) لتكن K نقطة من المستوى احداثياتها $(\frac{11}{2}; 0)$

- بيّن أن المستقيم (BK) يمس المنحنى (C) في النقطة B .
- ب) أرسم المنحنى (C) في الشكل 1 والمماسات للمنحنى (C) عند كلا من A ، J و B .
-(الشكل 1).....



التمرين 52: عن بكالوريا تونس 2016

(ترجمة وتصرف الأستاذ: محمد جبالي)

- 1) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 e^x$.
 أ) بيّن أن g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.
 ب) قارن بين x و $\frac{1}{x}$ في المجال $]0; 1[$ وفي المجال $]1; +\infty[$.
 ج) أستنتج أنه إذا كان $x \in]0; 1[$ فإن $g(x) < g(\frac{1}{x})$ وإذا كان $x \in]1; +\infty[$ فإن $g(x) > g(\frac{1}{x})$.
- 2) نعتبر الدالة f والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}}$.
 ونرمز بـ: (C_f) إلى منحنائها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ من المستوي.
 أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة الأولى بيانيا.
- 3- أ) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، فإن: $f'(x) = g(x) - g(\frac{1}{x})$.
 ب) أحسب $f'(1)$: ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- 4) في آخر التمرين، مثلنا المنحنى (C_h) للدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
 أ) بيّن أن (C_f) فوق (C_h) .
 ب) إنشئ المنحنى (C_f) في نفس المعلم (تعطى $f(1,5) \approx 7,55$).



التمرين 53: عن بكالوريا الكامرون 2016

(ترجمة وتصرف الأستاذ: محمد جبالي)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - \frac{e^x - 3}{e^x + 1}$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- أ) أحسب نهايات f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) بين أن المستقيمين $(D_1): y = x + 3$ و $(D_2): y = x - 1$ مقاربان للمنحنى (C_f) .

2- أ) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات f .

3- أ) استنتج من جدول تغيرات f أن النقطة $I(0;1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

ب) أعط معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) ، عند النقطة I .

4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث $-2,8 < \alpha < -2,7$.

5) أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة I ، ويوازي المستقيمين (D_1) و (D_2) .

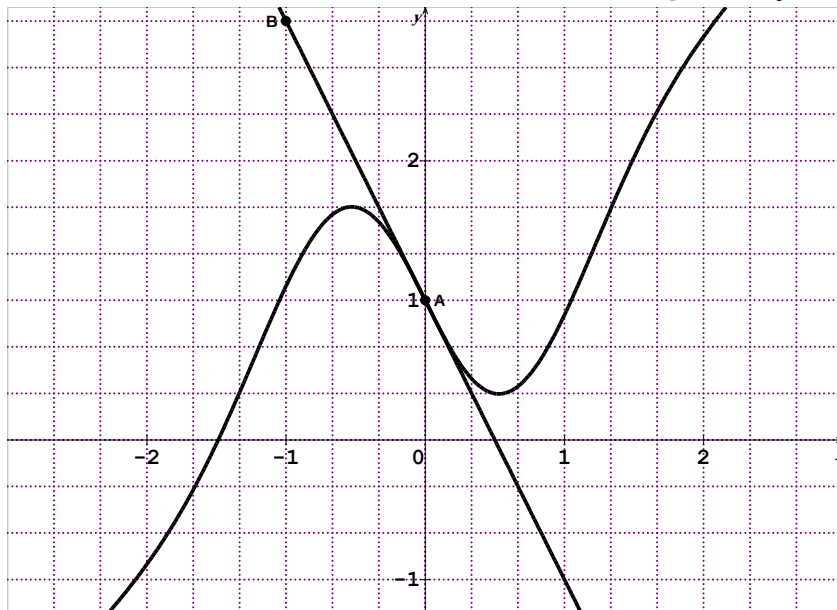
6) أنشئ المماس (T) والمستقيم (Δ) ، ثم المنحنى (C_f) .

7) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$x(e^x + 1)(1 - m) - e^x - 1 = e^x - 3$$

التمرين 54: عن بكالوريا فرنسا (Métropole) 2014

في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقطتين $A(0;1)$ و $B(-1;3)$ والمنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة f القابلة للإشتقاق والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$ حيث $a \in \mathbb{R}$



1- أ) بين أن المنحنى (C) يشمل النقطة A .

ب) عين معامل توجيه المستقيم (AB).

ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x: f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

د) عين العدد a بحيث يكون المستقيم (AB) مماساً لـ (C) في A

2- من السؤال السابق، من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \quad \text{و} \quad f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

أ) بين أنه من أجل كل: $f(x) > 0 : x \in]-1; 0]$ و $f'(x) > 0 : x \in]-\infty; -1]$

ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $c \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ حيث $f(c) = 0$: تحقق أن $c < -\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$

التمرين 55: تونس 2014

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ ، ثم استنتج أن الدالة f فردية.

2- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3- بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ وأعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}_+$

- استنتج أن من أجل كل x من $\mathbb{R}_+$: $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$

4- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - 1 + \frac{1}{2}x \right] = 0$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

5- إنشئ في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته: $y = 1 - \frac{1}{2}x$ ثم أرسم المنحنى (C_f) .

التمرين 56: المغرب 2014

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = e^{-x} + x - 1$

1- ادرس تغيرات الدالة g.

2- $g(0)$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x} + x \geq 1$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي: $f(x) = \frac{x}{e^{-x} + x}$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني

1- بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ (استعمل نتيجة السؤال I-2).

2- أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$

ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

3-أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4-أ) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة O مبدأ المعلم.

ب) تحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x - f(x) = \frac{x \cdot g(x)}{g(x) + 1}$ ، ثم أدرس إشارة $x - f(x)$ على $\mathbb{R}$.

ج) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$.

5-إنشئ كلاً من (Δ) والمنحنى (C_f) .

التمرين 57: كاليدونيا الجديدة 2011

f الدالة العددية والمعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1$.

1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر النتيجة بيانياً ، ثم أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أ) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين نسمي α الحل غير المعلوم

ب: بيّن أن: $-2, 3 < \alpha < -2, 4$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: 1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

2) أدرس تغيرات الدالة f (نأخذ $\alpha = -2, 35$)

3) بيّن أن المستقيم (D) إذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

4) بيّن أن المستقيم (D) والمنحنى (C_f) يتقاطعان في نقطتين A و B يطلب تعيينهما.

5) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) .

6) أرسم كلاً من المستقيم (D) والمنحنى (C_f) .

التمرين 58: فرنسا (REUNION) 2007

f الدالة العددية والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$; $x \neq 0$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني

$$f(0) = 1$$

1-أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

2-أ) أثبت أن النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$

ب) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f عند 0 وفسر النتيجة بيانياً.

3-أ) برهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$.

ب) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x - 1)^2}$ حيث g دالة يطلب تعيينها.

ج) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

5- أرسم كلا من المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

6- أ) عدد حقيقي غير معدوم ، نعتبر النقطتين $M(x; f(x))$ و $M'(-x; f(-x))$ من المنحنى (C_f)

عين معامل توجيه المستقيم (MM') .

ب) إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 ، ماذا تعني النتيجة السابقة ؟

التمرين 59: فرنسا (Polynesie) 2010

I- نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1- أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ثم أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$.

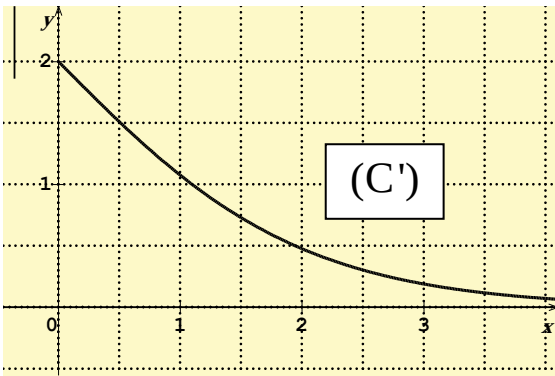
ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$

3) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II- الدالة العددية والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$ واليكن (C) تمثيلها البياني في

المعلم المتعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول على محور الفواصل 1cm وعلى محور الترتيب 4cm.



1- أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- أ) أثبت أن : $f(\alpha) = 4(\alpha - 1)$

ب) أرسم المنحنى (C) في المعلم السابق.

III- نمثل في الشكل المقابل المنحنى (C') للدالة h

والمعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ من أجل كل عدد حقيقي ، نسمي P, M

و Q النقط التيحدثا ثانياً على الترتيب $(x; h(x))$ ، $(x; 0)$ و $(0; h(x))$

أ- بين أن مساحة المستطيل $OPMQ$ تكون أعظمية إذا كانت α فاصلة النقطة M .

ب- نفرض أن فاصلة M هي α .

أثبت أن المماس (T) في النقطة M للمنحنى (C') يوازي المستقيم (PQ) .

التمرين 60: تونس 2008

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$. نسمي (C) تمثيلها البياني

1-أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجةين بيانياً

ب- أكمل دراسة تغيّرات f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

ج- بيّن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha \in]\ln 2; 1[$ يحقق $f(\alpha) = 0$ ثم أثبت أن $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$

هـ- اكتب معادلة المماس (T) لـ (C) في النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$

2-أ- ليكن x من $\mathbb{R}^*$ ؛ احسب $f(-x) + f(x)$ ثم أعط تفسيرا هندسياً لهذه النتيجة .

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ ، ثم فسّر النتيجةين بيانياً .

ج- أنشئ (T) و (C) في المعلم السابق؛ نأخذ $\alpha \approx 0,8$.

3) هل توجد مماسات للمنحنى (C) تعامد المستقيم ذو المعادلة $y=x$ ؟ برر جوابك .

4) ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1) = me^x$

5) g دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث : $g(x) = -x + \frac{e^x}{e^x - 1}$

بين أن $g(x) = f(-x)$ ثم أرسم (C_g) .

التمرين 61: فرنسا 2012

(ترجمة وتصرف الأستاذ جبالي)

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x(e^x - e) + e - 2$.

نسمي C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. الوحدة : $\|\vec{i}\| = 4\text{cm}$ ؛ $\|\vec{j}\| = 2\text{cm}$

1-أ- احسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$.

ب) ادرس إشارة $f''(x)$ ، ثم استنتج تغيّرات f' على $\mathbb{R}$.

ج- بيّن أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0,5; 0,6[$ ؛ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

د) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات f (تعطى $f(\alpha) \approx 0,2$) .

2-أ- أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -ex + e - 2$ مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى مستقيم (D) .

ج- بيّن أنه يوجد مماس (Δ) للمنحنى C_f يوازي المستقيم (D)، يطلب كتابة معادلة له .

د- أنشئ كلا من (Δ) و (D)، ثم المنحنى C_f على المجال $]-\infty; 1,5[$ (تعطى $f(1,5) \approx 3,36$) .

هـ- ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m+2-e)e^{-x} = x$.

مجلة الرائد في الرياضيات

الحلول

الجزء الثاني

العلوم التجريبية

الجزء الثالث

تقني رياضي

الجزء الرابع

رياضيات

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

BAC2020

الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook

الجزء الثاني: تمارين البكالوريات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 13: دورة 2019

1-أ) دراسة اتجاه تغير g

لدينا : دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = e^x - ex$

من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^x - e$

$g'(x) = e^x - e = 0$ معناه $x = 1$ ، $g'(x) < 0$ معناه $x < 1$ ، $g'(x) > 0$ معناه $x > 1$

ومنه g متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ و متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ و $g(1) = 0$

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x

من الجواب السابق نستنتج أن g تقبل قيمة حدية صغرى هي الصفر عند 1

أي من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$.

2) دراسة اتجاه تغير f

لدينا : دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$

من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - ex = g(x)$

من الجواب السابق (1-ب) نستنتج أن f متزايدة على $\mathbb{R}$ لأن : $g(x) \geq 0$

3) حساب كلاً من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وتشكيل جدول تغيراتها

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \frac{1}{2}ex^2 = +\infty - \infty \text{ ح ع ت} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{1}{2}ex^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e \right) = +\infty \text{ رفع ح ع ت}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

4) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (C_g)

لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة لـ (C_g) ندرس إشارة الفرق $(f(x) - g(x))$

$$(f(x) - g(x)) = -\frac{1}{2}ex^2 + ex = \frac{1}{2}xe(-x + 2)$$

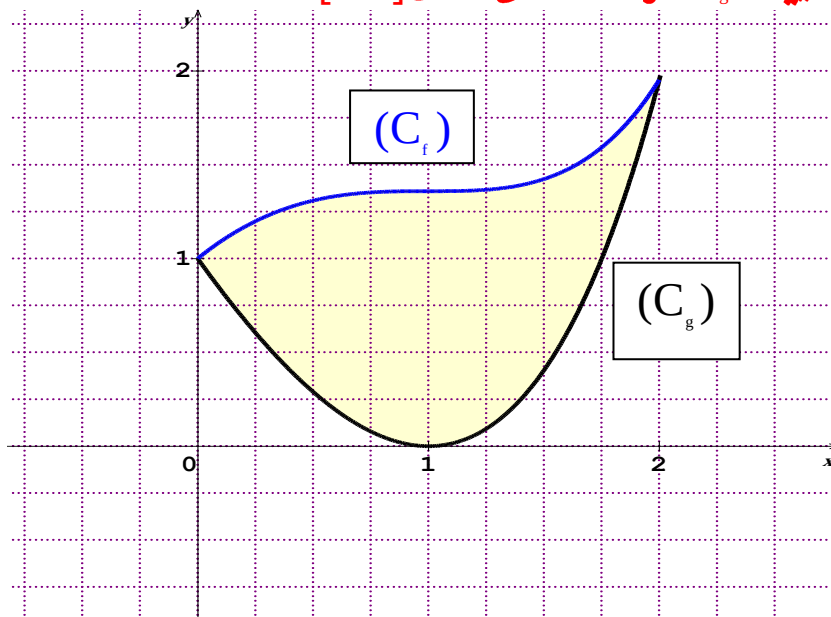
وعليه إشارة الفرق هي حسب إشارة $x(-x + 2)$

ومنه : من أجل كل $x \in]0; 2[$ يكون $x(-x + 2) > 0$ ومعناه (C_f) فوق (C_g)

من أجل كل $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ يكون $x(x+1) < 0$ ومعناه (C_f) تحت (C_g)

ومن أجل $x \in \{0; 2\}$ يكون $x(-x+2) = 0$ ومعناه (C_f) يقطع (C_g)

5) رسم كلا من المنحنيين (C_f) و (C_g) على المجال $[0; 2]$



7- أ) اثبات ان الدالة h زوجية

لدينا: دالة معرفة على المجال $[-2; 2]$ ب: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و (Γ) منحناها البياني

h دالة زوجية معناها من أجل كل $x \in [-2; 2]$ ومن أجل $-x \in [-2; 2]$ $h(-x) = h(x)$:

$$h(-x) = \frac{1}{2}e(-x)^2 - e^{|-x|} = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|} = h(x)$$

ب) حساب $h(x) + f(x)$ من أجل كل $x \in [0; 2]$

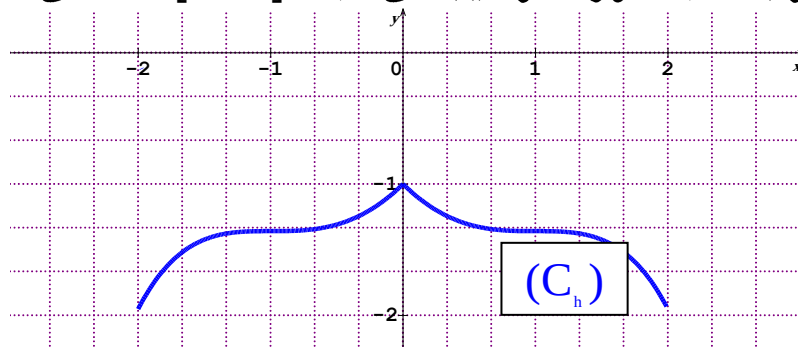
$$h(x) + f(x) = -e^x + \frac{1}{2}ex^2 + e^x - \frac{1}{2}ex^2 = 0 \quad \text{لدينا: } x \in [0; 2]$$

استنتاج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من (C_f) ثم رسم (Γ)

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & ; x \in [0; 2] \\ -f(-x) & ; x \in [-2; 0] \end{cases} \quad \text{لدينا } h(x) + f(x) = 0 \text{ ومعناه } h(x) = -f(x) \text{ معناها}$$

ومعناه (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل من أجل $x \in [0; 2]$

ثم نتم الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب من أجل $x \in [-2; 0]$ لأن h دالة زوجية



التمرين 14: دورة 2018

I- أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

g الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (-t)e^t = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x)e^{-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t)e^t = -\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = 1 \cdot e^{-x} - (x-1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}$
 إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $(2-x)$ لأن $e^{-x} > 0$
 الدالة g متناقصة تماما على $]2; +\infty[$ و متزايدة تماما على $]-\infty; 2[$ و $g(2) = 2 + e^{-2}$
 وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كما يلي

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)		+	-
f(x)	$-\infty$	$g(2)$	2

ج) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا حيد α حيث: $-0,38 < \alpha < -0,36$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]-\infty; 2[$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ و $g(2) = 2 + e^{-2}$
 لدينا: $g(-0,36) \cdot g(-0,38) < 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $-0,38 < \alpha < -0,36$.

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

من الجوابين ب) وجد) نستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ تكون كما يلي:
 من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ فإن $g(x) < 0$ لأن $g(x) < 0$
 من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن $g(x) > 0$ لأن $g(x) > 0$

II- أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \frac{x}{e^x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) = +\infty$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x+1))$ ثم تفسير النتيجة بيانيا.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x+1))$ تعني ان المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $(+\infty)$

ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) حيث $y = 2x + 1$: (Δ) .

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = -xe^{-x}$
 لدينا: $f(x) - y > 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ لأن $-xe^{-x} > 0$ ويكون (C_f) تحت (Δ)

$f(x) - y < 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لأن $-xe^{-x} < 0$ ويكون (C_f) فوق (Δ) :
 $f(x) = y$ من أجل كل $x = 0$ لأن $-xe^{-x} = 0$ ويكون (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$

2) تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ يكون: $f'(x) = g(x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2 - 1.e^{-x} + xe^{-x} = 2 + (x-1)e^{-x} = g(x)$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = g(x)$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ والموضحة في II - ج
 وعليه الدالة f متزايدة تماما على $]\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha[$
 وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

X	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا: (T) له معادلة من الشكل : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ حيث $a = 1$

ومنه : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ أي:

$$y = 2x + 1 - e^{-1} \text{ ومنه } y = 2x - 2 + 3 - e^{-1}$$

4) رسم (Δ) ، (T)، والمنحنى (C_f) .

5) تعيين عدد وإشارة حلول المعادلة $x = (1-m)e^x$

لدينا: $x = (1-m)e^x$ تكافئ $xe^{-x} = (1-m)$ وتكافئ

$$f(x) = 2x + m \text{ أي } 2x + 1 - xe^{-x} = 2x + m$$

لمعادلة $f(x) = 2x + m$ هندسيا تكافئ الجملة

$$\begin{cases} y = 2x + m \dots (1) \\ y = f(x) \dots (2) \end{cases} \text{ التالية:}$$

حلول الجملة السابقة هندسيا هي فواصل نقط

تقاطع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = 2x + m$ والمنحنى (C_f) . من البيان نجد :

1) $m < 1 - \frac{1}{e}$ المعادلة لا تقبل حلول ، $m = 1 - \frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا

3) $1 - \frac{1}{e} < m < 1$ المعادلة تقبل حلين موجبين ، 4) $m = 1$ المعادلة تقبل وحيدا معدوم

5) $m > 1$ المعادلة تقبل وحيدا سالبا.

التمرين 15: دورة 2017

I) تبيان ان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وإعطاء تفسيراً هندسياً للنتيجة وحساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$t = -x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = 2 - \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^t \cdot e = 2 - 0 = 2^*$$

نسنتج أن: المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل معادلته $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{1-x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = 2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{1-x} = -\infty^*$$

2-أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$

$$f'(x) = -[2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x}] = x(x-2)e^{1-x} : x \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $x(x-2)$.
لأن e^{1-x} موجبة تماماً على $\mathbb{R}$ وعليه إشارة $f'(x)$ تكون حسب الجدول التالي

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$x(x-2)$		+	0	-	0	+

وعليه جدول التغيرات للدالة f يكون كمايلي

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)			2		f(2)		2

3) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(T) له معادلة من الشكل : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي : $y = -x + 2$

II-1) تبيان انه من اجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$: $h(x) \geq 0$

h معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$ ومنه $h'(x) = -(1 \cdot e^{1-x} - xe^{1-x}) = (x-1)e^{1-x}$
 $h'(x) = 0$ إذا كان $x = 1$ ولدينا : $h'(x) < 0$ إذا كان $x < 1$ و $h'(x) > 0$ إذا كان $x > 1$

ولدينا $h(1) = 0$ أي أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن : $h(x) \geq 0$

دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T)

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x + 2)$

$$\text{لدينا : } f(x) - (-x + 2) = x(1 - xe^{1-x}) = x \cdot h(x)$$

وعليه إشارة الفرق هي حسب إشارة x لأن $h(x) \geq 0$ ونلخص الوضع في الجدول التالي:

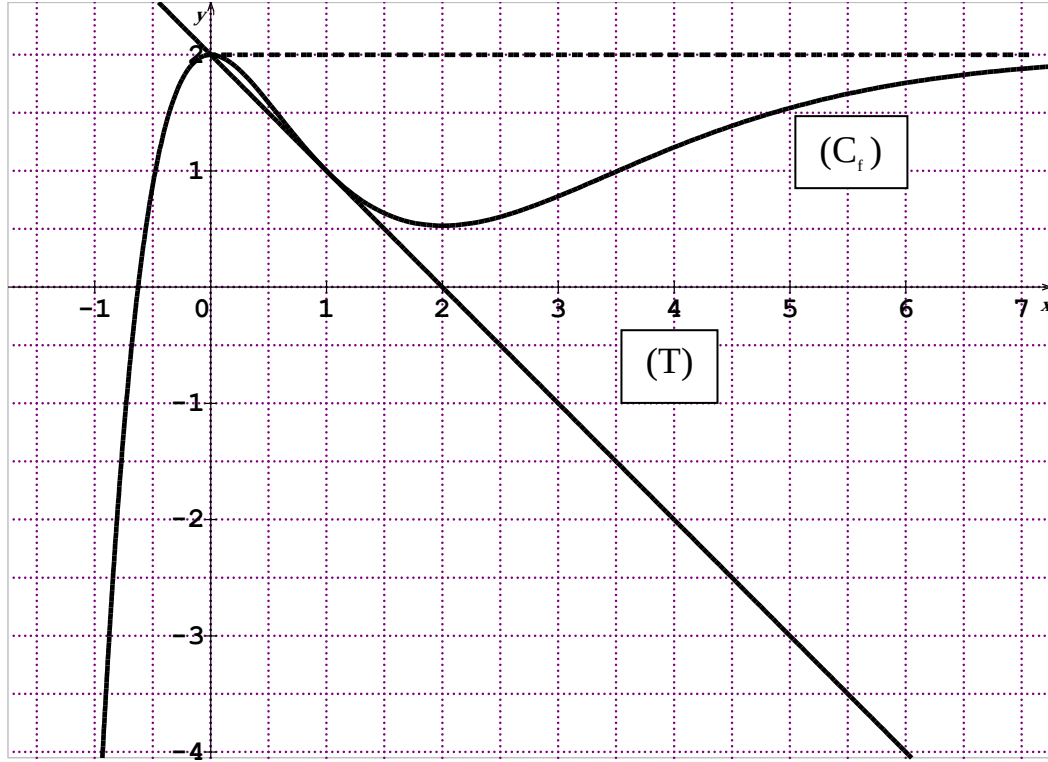
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
f(x) - y	-	0	+	0	+
الوضع		(T) تحت (C _f)	(T) فوق (C _f)	(T) فوق (C _f)	(T) فوق (C _f)
		(T) يقطع (C _f)	(T) يقطع (C _f)	(T) يقطع (C _f)	(T) يقطع (C _f)

2) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty; 0[$ و $f(0) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

لدينا: $f(-0,7) = 0,21 > 0$ و $f(-0,6) = -0,68 < 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha) = 0$ حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

6) إنشاء المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.



التمرين 16: دورة 2017 الاستدراكية

I- حساب $g(1)$

لدينا: الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2e^x - e$ ومنه $g(1) = 1^2e^1 - e = 0$

- تعين إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x بقراءة بيانية

بقراءة بيانية إشارة $g(x)$ تكون كمايلي:

من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ فإن $g(x) < 0$ لأن (C_g) تحت حامل محور الفواصل

من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ فإن $g(x) > 0$ لأن (C_g) فوق حامل محور الفواصل

استنتاج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

$g(-1) = (-1)^2e^1 - e = 0$ ومنه $g(1) = 1^2e^1 - e = 0$

$g(-x) < 0$ فإن $x \in]1; +\infty[$ و $g(-x) > 0$ فإن $x \in]-\infty; -1[$

II-1) حساب النهايات الآتية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\frac{e}{x}) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{e}{x}\right) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{e}{x}\right) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e}{x}\right) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0 \text{ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}) = -2$$

2- تبين أن المنحنى (γ) ذو المعادلة $y = e^{-x} - 2$ و (C_f) متقاربان عند $-\infty$.

المنحنى (γ) ذو المعادلة $y = e^{-x} - 2$ و (C_f) متقاربان عند $-\infty$ معناه $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (e^{-x} - 2)] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (e^{-x} - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e}{x}\right) = 0 \text{ لدينا}$$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة (γ)

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (γ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = -\frac{e}{x}$

من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ فإن $-\frac{e}{x} > 0$ وعليه يكون (C_f) فوق (γ)

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن $-\frac{e}{x} < 0$ وعليه يكون (C_f) تحت (γ)

3) تبين أنه من أجل كل حقيقي x غير معدوم: $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{x^2} = \frac{-x^2 e^{-x} + e}{x^2} = \frac{-[(-x)^2 e^{(-x)} - e]}{x^2} = \frac{-g(-x)}{x^2} : x \in \mathbb{R}^*$$

4) استنتاج أن f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1; 0[$ و $]0; +\infty[$ ومتناقصة على $]-\infty; -1]$

من العبارة $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(-x)$ وعليه:

(1) $x \in]-\infty; -1]$ معناه $f'(x) \leq 0$ ومنه الدالة f تكون متناقصة على المجال $]-\infty; -1]$

(2) $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ معناه $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1; 0[$ و $]0; +\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

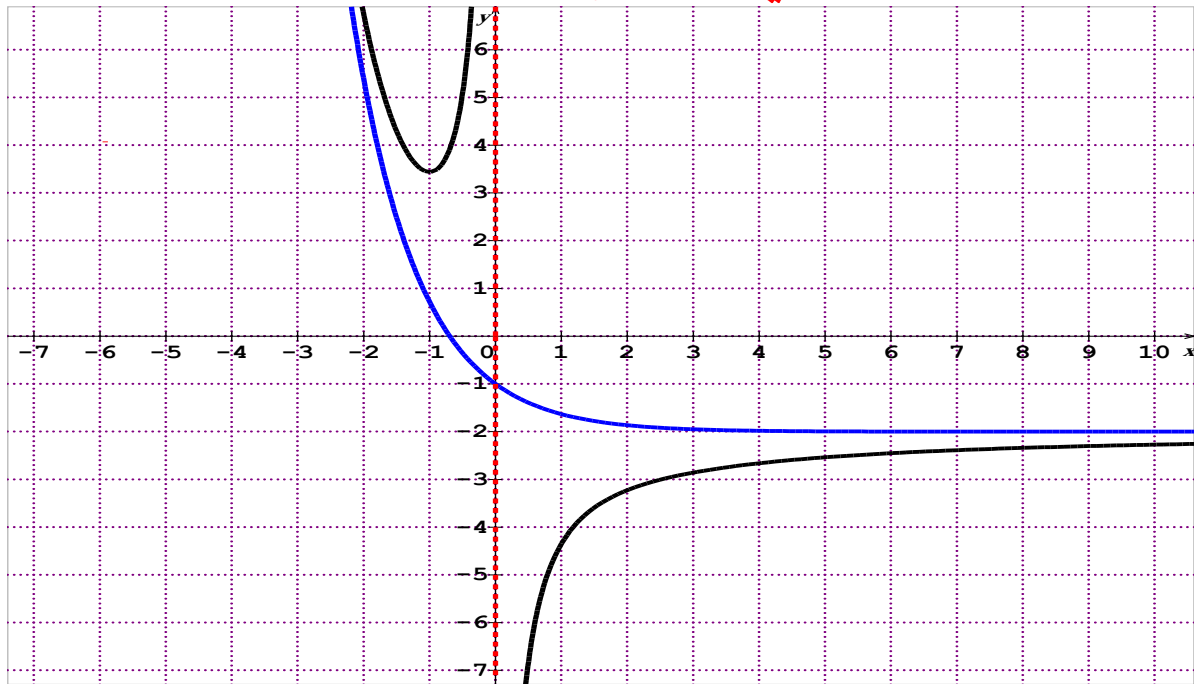
x	-1	0	+
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$2(e-1)$	$+\infty$

x	-1	0	+
f(x)	$+\infty$	$-\infty$	-2

5) تبين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة $x \rightarrow e^x$.

لدينا المنحنى (γ) ذو المعادلة $y = e^{-x} - 2$

ومنه المنحنى (γ) هو صورة منحنى الدالة $x \rightarrow e^{-x}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0; -2)$ علما أن منحنى الدالة $x \rightarrow e^{-x}$ هو نظير منحنى الدالة $x \rightarrow e^x$ بالنسبة لمحور الترتيب
رسم كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق .



التمرين 17: دورة 2016

(1-I) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

لدينا: الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$
لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ حيث $t = -x$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^t = +\infty$
لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ حيث $t = -x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} 1 + t^2 e^t = 1$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $g'(x) = (2x + 1)e^{-x} + (-1)e^{-x}(x^2 + x - 1) = (-x^2 + x + 2)e^{-x}$

لدينا: $g'(x) = 0$ معناه $(-x^2 + x + 2) = 0$ ومعناه $x = 2$ أو $x = -1$

$g'(x) > 0$ معناه $-1 < x < 2$ أي الدالة g متناقصة تماماً على $]-1; 2[$

$g'(x) > 0$ معناه $x < -1$ أو $x > 2$ أي الدالة g متزايدة تماماً على $]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$g'(x)$		-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$	$g(-1)$	$g(2)$	1		

2- (أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1,52 < \alpha < -1,51$

* المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم لأن $g(0) = 1 + (0^2 + -1)e^0 = 0$

* لدينا: الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -1[$ (أنظر جدول تغيرات g)
ولدينا: $g(-1,52) \times g(-1,51) < 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي
وحيد $\alpha \in]1,59; 1,60[$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

(ب) استنتاج إشارة $g(x)$.

باستعمال الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
g(x)	+	0	-	0	+

(II-1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + x^2 e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (t^2 e^t) = 0 \text{ علمنا أن } (-x = t) \text{ نضع } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t + t^2 e^t) = -\infty$$

(ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)$

$$f'(x) = -1 + (2x + 3)e^{-x} + (-1)e^{-x}(x^2 + 3x + 2) = -[1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = -g(x)$$

(ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

من العبارة $f'(x) = -g(x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

وعليه جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ يكون كمايلي:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	$+\infty$	$f(\alpha)$	$f(0)$	$-\infty$	

(د) تعيين ودون حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ **والتفسير الهندسي للنتيجة.**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = -g(\alpha) = 0$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماساً يوازي حامل موحور الفواصل معادلته $y = f(\alpha)$

(2-أ) تبين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) حيث: $y = -x$ معادلة له عند $+\infty$

المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0 \text{ لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0 \text{ لأن } \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^t = 0$$

(ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $(x^2 + 3x + 2)$ لأن $e^{-x} > 0$

$(x^2 + 3x + 2) = 0$ معناه $x = -2$ أو $x = -1$ و الفرق يكون موجب تماماً لأن المستقيم (Δ)

مقارب في جوار $+\infty$ أي $x \in [0; +\infty[$ وعليه (C_f) يكون فوق (Δ)

(ج) تبين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما

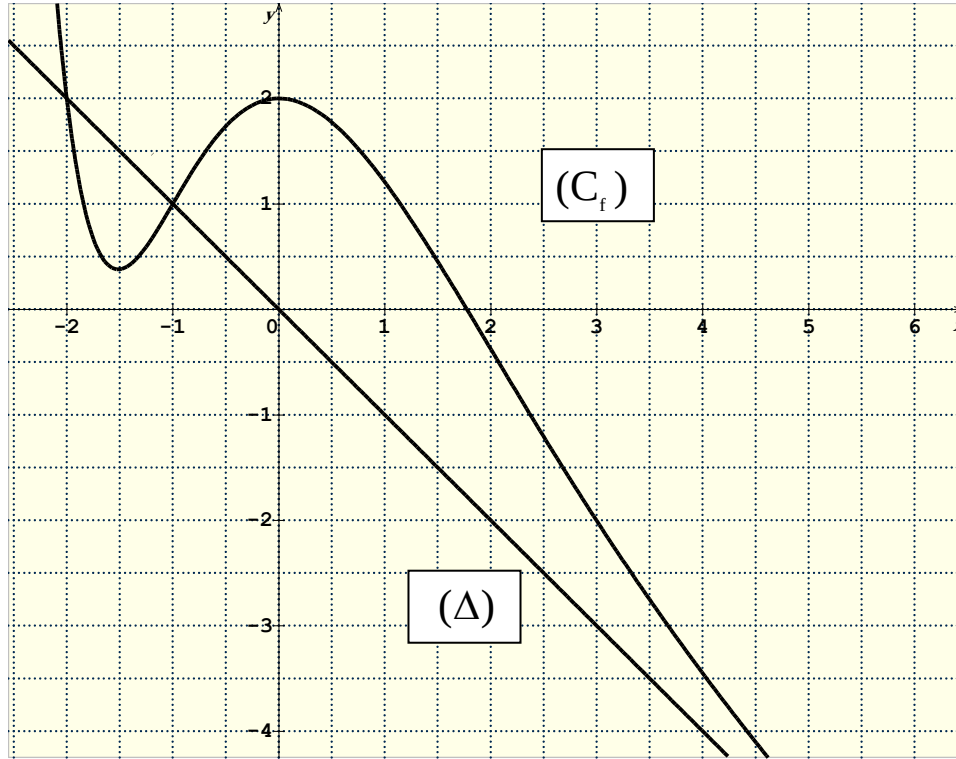
لدينا: $f'(x) = -g(x)$ وعليه $f''(x) = -g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي حسب الجدول المقابل:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
إشارة $f''(x)$	+	0	-	+

الجدول يبين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف

أحداثيهما: $(-1;1)$ و $(2; -2 + \frac{12}{e^2})$

(د رسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$)



(ه المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $(m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$)

نضع: $(m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0 \dots (1)$

(1) تكافئ الجملة: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = -m \end{cases}$ وعليه حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f)

والمستقيم $(\Delta_m): y = -m$ (مستقيم يوازي محور الفواصل) ومن البيان نميز الحالات التالية:

(1) $m > -f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجب ، (2) $m = -f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين .

(3) $-f(\alpha) < m < -2$ المعادلة تقبل حلين سالبين وحل موجب

(4) $m = -2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما مضاعف معدوم وآخر سالب .

(5) $m > -2$ المعادلة لا تقبل حلول.

التمرين 18: دورة 2016 الاستدراكية

I-1 (أ) حساب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ودراسة اتجاه تغير الدالة g'

لدينا: الدالة g معرفة على المجال $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$

حساب $g'(x)$: لدينا: $g'(x) = 2e^x - 2x - 1$

دراسة اتجاه تغير g' : نحسب $g''(x)$ وندرس إشارته

لدينا: $g'(x) = 2e^x - 2x$ ومنه: $g''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$
 $g''(x) = 0$ معناه $(e^x - 1) = 0$ ومعناه $e^x = 1$ وعليه $x = \ln 1 = 0$
 $x < 0$ معناه $g''(x) < 0$ ومنه الدالة g' متناقصة على المجال $]0; +\infty[$
 $x > 0$ معناه $g''(x) > 0$ ومنه الدالة g' متزايدة على المجال $] -\infty; 0[$

ب) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$

من الجواب السابق نستنتج أن الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى هي $g'(0) = 1$
 ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 1$ ومنه $g'(x) > 0$

ج) حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وتشكيل جدول تغيراتها

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty^* \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2e^x}{x^2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$$

g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ لأن $g'(x) > 0$ وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-1,38 < \alpha < -1,37$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ و $g(-1,38) \times g(-1,37) < 0$ وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $-1,38 < \alpha < -1,37$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على من أجل كل عدد حقيقي x .

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) > 0$

II-1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

لدينا: الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \text{ نهاية شهيرة و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 - \frac{x}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ ، لاحظ أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

ب) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{xe^x \cdot g(x)}{(e^x - x)^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x + x^2)(e^x)'(e^x - x) - (e^x)'(x^2 e^x)}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x(2e^x - x^2 - x)}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

(ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، وتشكيل جدول تغيراتها

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
(x)	-	-	0	+
g(x)	-	0	+	+
f'(x)	+	0	-	+

نستنتج ان إشارة $f'(x)$ هي من

إشارة الجداء $x.g(x)$

وهي حسب الجدول المقابل وعليه

جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	+
f(x)				

(أ) تبين أن: $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ثم استنتاج حصر العدد $f(\alpha)$

*لدينا: $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 e^\alpha}{e^\alpha - \alpha}$ ومن جهة أخرى لدينا: $g(\alpha) = 0$ ومنه $e^\alpha = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha)$

ومنه: $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha)}{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha) - \alpha} = \frac{\alpha^4 + \alpha^3}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{(\alpha^3 + \alpha^2)}{(\alpha - 1)} = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

*لدينا: $-1,37 < \alpha < -1,38$ تكافئ (1) $-0,74 < 2\alpha + 2 < -0,76$

لدينا: $-1,37 < \alpha < -1,38$ تكافئ (2) $(-1,37)^2 < \alpha^2 < (-1,38)^2$

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد: (3) $1,12 < \alpha^2 + 2\alpha + 2 < 1,16$

لدينا: $-1,37 < \alpha < -1,38$ تكافئ: $-2,37 < \alpha - 1 < -2,38$

وتكافئ (4) $-\frac{2}{2,37} < \frac{2}{\alpha - 1} < -\frac{2}{2,38}$

بجمع (3) و (4) طرف لطرف نجد: $0,27 < \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1} < 0,32$

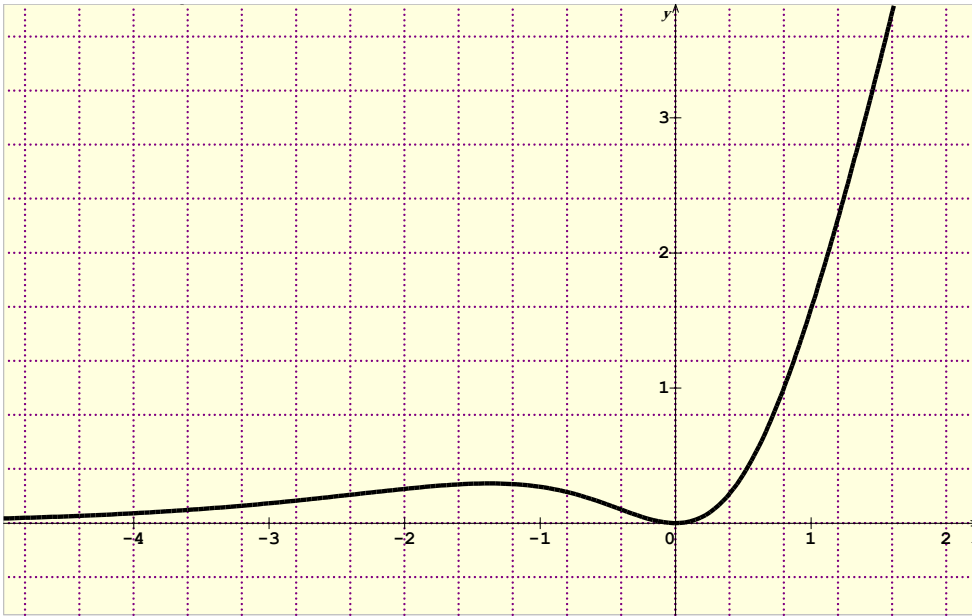
ومنه: $0,27 < f(\alpha) < 0,32$

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ وتفسير النتيجة بيانيا.

*لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 e^x}{e^x - x} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{e^x - x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^2}} \right] = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = 0^*$ معناه منحنى الدالة "مربع" مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

(ج) رسم المنحنى (C_f)



التمرين 19: دورة 2015

I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

لدينا: $g'(x) = (1 - 2x)' - (e^{2x-2})' = -2 - 2e^{2x-2} = -2(1 + e^{2x-2})$

$g'(x) < 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لأن: $(1 + e^{2x-2}) > 0$. وعليه تكون g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. و التحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$.

لدينا: $g(0,36) = 0,002$ و $g(0,37) = -0,02$ أي $g(0,36) \times g(0,37) < 0$

وعليه: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $0,36 < \alpha < 0,37$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ تكون إشارة $g(x)$ موجبة

من أجل $x = \alpha$ تكون إشارة $g(x)$ معدومة

من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ تكون إشارة $g(x)$ سالبة.

II-1) إثبات أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.

لدينا: $f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - e^{2x+2} \times e^{-2x-2}$

أي: $f'(x) = e^{2x+2}(1 - 2(-x) - e^{2(-x)-2}) = e^{2x+2}g(-x)$

أ) استنتاج أن f متناقصة على المجال $]-\infty; -\alpha[$ و متزايدة على $]-\alpha; +\infty[$

من العبارة $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(-x)$

$x \in]-\infty; -\alpha[$ أي $-x \in]\alpha; +\infty[$ معناه $g(-x) < 0$

$x = -\alpha$ أي $-x = \alpha$ معناه $g(-x) = 0$

$x \in]-\alpha; +\infty[$ أي $-x \in]-\infty; \alpha[$ معناه $g(-x) > 0$

ومنه: f متناقصة على المجال $]-\infty; -\alpha[$ و متزايدة على $]-\alpha; +\infty[$.

2) حساب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

ح.ع.ت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لكن $f(x) = x(e^{2x+2} - 1) + 1$ وعليه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{2x+2} - 1) + 1 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x+2} = 0$ (نهاية شهيرة) و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 1) = +\infty$.

X	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\alpha)$	$+\infty$

3) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ وتفسير النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x e^{2x+2}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^2}{2} [2x e^{2x}] = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^2}{2} [u e^u] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + 1)] = 0 \text{ تكافئ } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = 0$$

ومنه المستقيم ذي المعادلة: $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = -x + 1$

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ندرس إشارة الفرق $[f(x) - (-x + 1)]$

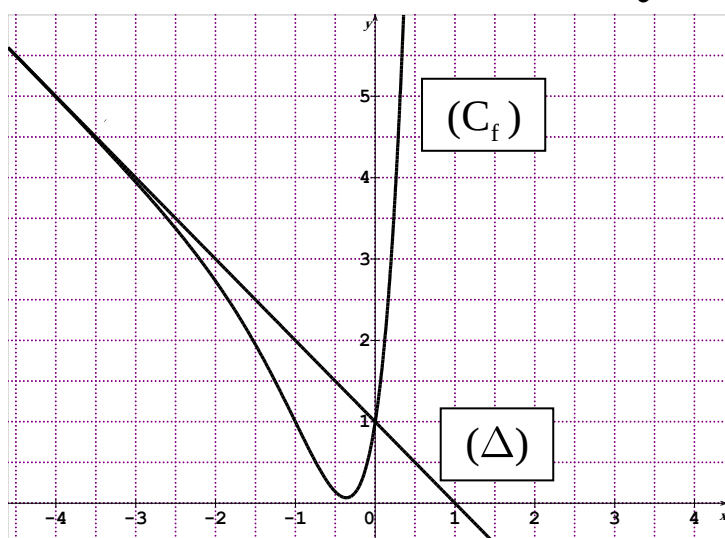
لدينا: $[f(x) - (-x + 1)] = x e^{2x+2}$ وإشارته حسب إشارة x لأن $e^{2x+2} > 0$

وعليه: $x \in]-\infty; 0[$ معناه الفرق سالب أي (C_f) تحت (Δ) .

$x = 0$ معناه الفرق معدوم أي (C_f) يقطع (Δ) في نقطة احداثياتها $(0; 1)$

$x \in]0; +\infty[$ معناه الفرق موجب أي (C_f) فوق (Δ) .

5) إنشاء (Δ) و (C_f) في المجال المذكور.



1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

لدينا: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ والمعرفة على $] -\infty; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1: \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty: \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right) = -\infty$$

استنتاج مستقيمين مقاربين للمنحنى (C)

من النهايتين السابقتين نستنتج أن :

المستقيم ذا المعادلة : $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C)

المستقيم ذا المعادلة : $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C)

2) حساب $f'(x)$ وتبيان أن f متناقصة تماما على $] -\infty; 1[$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \left[1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right] \text{ ومنه: } f'(x) = \left(\frac{x}{x-1} \right)' + \left(e^{\frac{1}{x-1}} \right)' = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$f'(x) < 0 \text{ لأن } 1 + e^{\frac{1}{x-1}} > 0 \text{ و } \frac{-1}{(x-1)^2} < 0 \text{ ومنه الدالة } f \text{ متناقصة تماما على }] -\infty; 1[$$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $] -\infty; 1[$

x	$-\infty$	0	α	1
$f'(x)$		-	-	-
$f(x)$	2	e^{-1}	0	$-\infty$

3) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \text{ و }] -\infty; 1[\text{ المجال } f \text{ متناقصة تماما على}$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيدا $\alpha \in] -\infty; 1[$ يحقق $f(\alpha) = 0$:

إيجاد حصرا للعدد α باستعمال الجدول المعطى

$$f(0,22) = -0,005 \text{ و } f(0,21) = 0,016 \text{ لدينا:}$$

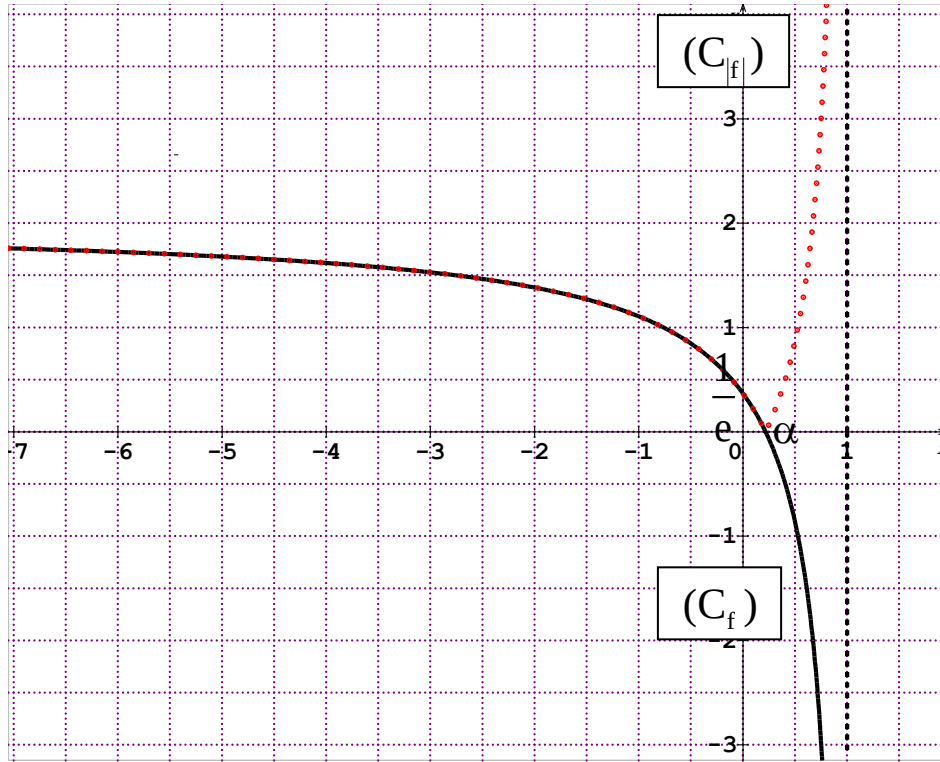
من الجدول المعطى نستنتج أن $\alpha \in] 0,21; 0,22[$

4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) و (C') المنحنى المثل للدالة $|f|$.

توضيح: كيفية رسم (C') المنحنى المثل للدالة $|f|$.

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; x \in]-\infty; \alpha] \\ -f(x) & ; x \in]\alpha; 1[\end{cases} \text{ لدينا:}$$

ومنه : $x \in]-\infty; \alpha]$ معناه $(C') = (C)$ و $x \in]\alpha; 1[$ معناه نظير (C) بالنسبة لمحور الفواصل



5) تعيين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m

المعادلة $|f(x)| = m$ تقبل حلان مختلفان في الإشارة معناه المستقيم ذو المعادلة $y = m$ يقطع

المنحنى (C') في نقطتين مختلفتين من البيان نجد أن : $m \in]e^{-1}; 2[$

1-II) دراسة تغيرات g وتشكيل جدول تغيراتها على $]-\infty; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2^*$$

* لدينا: $g(x) = f(2x-1)$ ومنه $g'(x) = 2f'(2x-1)$ وعليه الدالة g لها نفس اتجاه تغير الدالة f أي g متناقصة تماما على $]-\infty; 1[$ لأن $f'(2x-1) < 0$ وعليه جدول تغيرات الدالة g هو

x	$-\infty$	1
$g'(x)$	-	
$g(x)$	2	$-\infty$

$$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0 \text{ وأن: } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$$

$$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2 \cdot \frac{\alpha+1}{2} - 1\right) = f(\alpha) = 0 \text{ من الجواب 3 و } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2 \cdot \frac{\alpha+1}{2} - 1\right) = 2f'(\alpha)$$

ب) استنتاج معادلة (T) المماس لـ g عند الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$

لدينا: $(T): y = g'(\frac{\alpha+1}{2})(x - \frac{\alpha+1}{2}) + g(\frac{\alpha+1}{2})$ ومنه: $(T): y = 2f'(\alpha)(x - \frac{\alpha+1}{2}) + 0$

ج) التحقق أن: $y = \frac{2x}{(\alpha-1)^3} - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T)

لدينا: $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} - \frac{-1}{(\alpha-1)^2} e^{\frac{1}{\alpha-1}}$ لكن: $f(\alpha) = 0$ معناه $-\frac{\alpha}{(\alpha-1)} = e^{\frac{1}{\alpha-1}}$

ومنه: $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} + \frac{\alpha}{(\alpha-1)^3} = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$ وعليه تكون معادلة (T) كما يلي:

$$(T): y = 2 \frac{1}{(\alpha-1)^3} (x - \frac{\alpha+1}{2}) = \frac{2x}{(\alpha-1)^3} - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$$

التمرين 21: دورة 2012

1-I) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^x) = -\infty$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $g'(x) = (1 - xe^x)' = 0 - (1e^x + xe^x) = e^x(-x - 1)$

$g'(x) = 0$ معناه $(-x - 1) = 0$ لأن $e^x > 0$ معناه $(-x - 1) = 0$ أي $x = -1$ و $g(-1) = 1 + e^{-1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	+	0	-

وعليه جدول التغيرات يكون كالآتي

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	$g(-1)$	$-\infty$

3-أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ و $g(-1) > 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث يحقق $f(\alpha) = 0$.

ب) التحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا: $g(0,5) > 0$ و $g(0,6) < 0$ ومنه $0,5 < \alpha < 0,6$

لدينا: $g(-\infty; \alpha] =]1; 0[$ معناه $g(x) > 0$ و $g(\alpha; +\infty) =]-\infty; 0[$ معناه $g(x) < 0$.

1-II حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^x - 1) = +\infty$$

2) تبين أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 2]$: $f'(x) = -g(x)$

لدينا من أجل كل $x \in]-\infty; 2]$: $f'(x) = 1e^x + (x-1)e^x - 1 = -(1 - xe^x) = -g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$ على $]-\infty; 2]$ وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = -g(x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$f(2)$

3) تبين أن $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$ واستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا: (1) $0,5 < \alpha < 0,6$ ومنه: (1) تكافئ $0,25 < \alpha^2 < 0,36$ وتكافئ (2) $1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36$

من (1) و (2) نجد: $\frac{1,25}{0,6} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < \frac{1,36}{0,5}$ أي $2,08 < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < 2,72$ ومنه $-2,72 < f(\alpha) < -2,08$

4-أ) تبين أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = 0$$

ومنه: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

لدينا: $(f(x) - y) = (x-1)e^x$ إشارة الفرق $(x-1)e^x$ هي حسب إشارة $(x-1)$ لأن $e^x > 0$

وعليه وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) تكون حسب الجدول التالي.

x	$-\infty$	1	2
إشارة الفرق	-	0	+
الوضعية	(C_f) فوق (Δ) (C_f) تحت (Δ) (C_f) يقطع (Δ)		

5-أ) تبين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2

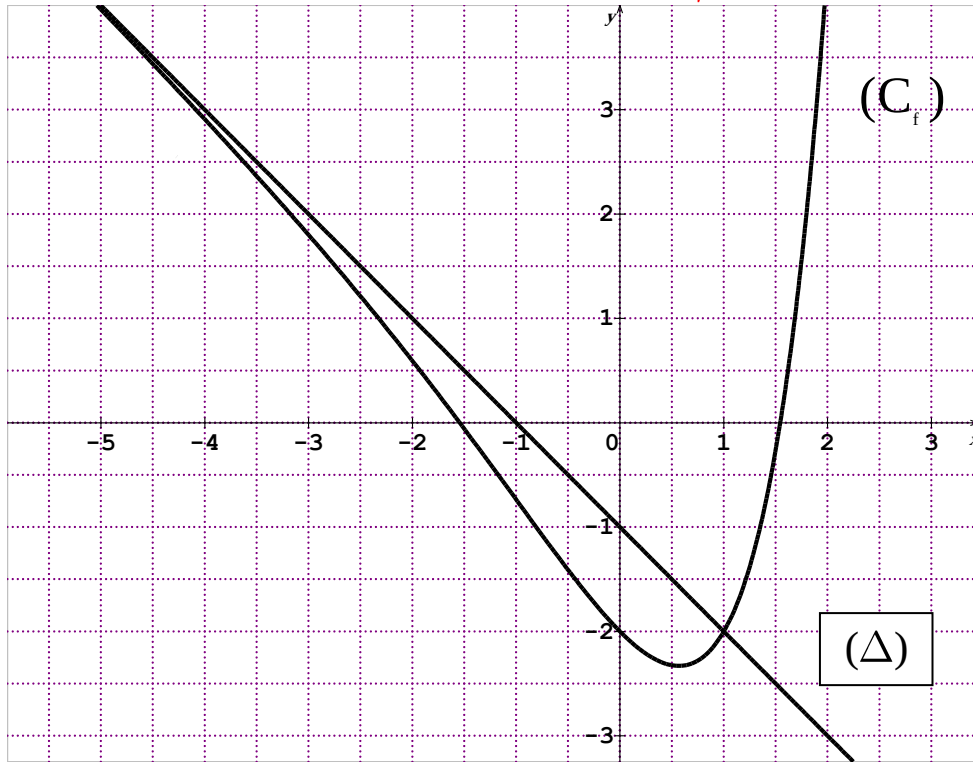
الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1[$ و $f(-1,5) = -0,05$ و $f(-1,6) = 0,07$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_1 حيث

$$f(x_1) = 0 \quad -1,6 < x_1 < -1,5.$$

الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-1;2[$ و $f(1,5) = -0,26$ و $f(1,6) = 0,37$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_2 حيث $f(x_2) = 0$ يحقق $1,5 < x_2 < 1,6$

(ب) إنشاء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)



التمرين 22: دورة 2011

1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - ex - 1) = +\infty - \infty \text{ و.ح.ع. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - ex - 1) = 0 + \infty - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty$$

(ب) حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

$f'(x) = e^x - e$ و $f'(x) = 0$ معناه $x = 1$ وإشارته $f'(x)$ هي حسب الجدول التالي

(ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

2-أ) بيان أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$ ومنه المستقيم $(\Delta): y = -ex - 1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

ب) كتابة معادلة للمماس (T)

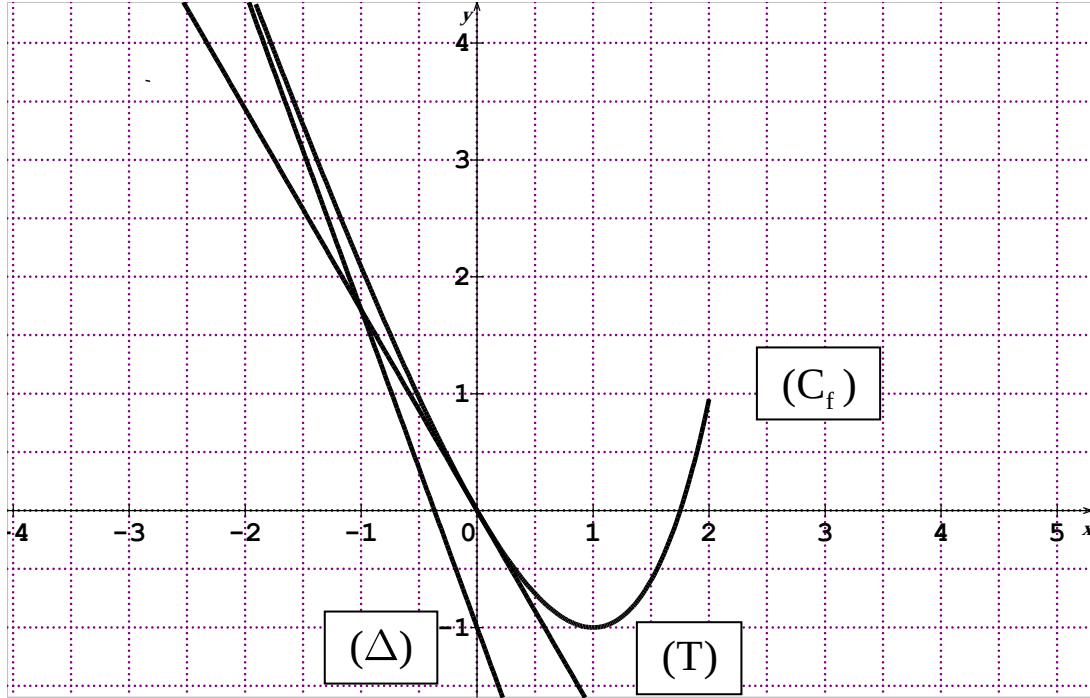
(T) له معادلة من الشكل $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

ومنه: $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = (1 - e)(x) + 0 = (1 - e)x$

ج) تبين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1,75; 1,76[$ و $f(1,75) = -0,0023$ ، $f(1,76) = 0,028$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α محصور بين 1,75 و 1,76 يحقق: $f(\alpha) = 0$

د) رسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحنى (C_f)



التمرين 23: دورة 2010

1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 0 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ التفسير الهندسي

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{e^x - 1} \right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-1}{e^x - 1} \right) = -\infty$$

نستنتج أن المستقيم ذي المعادلة: $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f)

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}^*$

لدينا: $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$ ، $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^*$

جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+		+
f(x)	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

أ- تبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ')

$$+\infty \text{ جوار } (C_f) \text{ لـ } (\Delta): \text{ مقارب مائل لـ } (C_f) \text{ في جوار } +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^x - 1} \right) = 0$$

$$-\infty \text{ جوار } (C_f) \text{ لـ } (\Delta'): \text{ مقارب مائل لـ } (C_f) \text{ في جوار } -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{e^x - 1} \right) = 0$$

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ')

$$\text{لدينا: من أجل كل } x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) - x = \left(-\frac{1}{e^x - 1} \right) < 0 \quad (C_f) \text{ تحت } (\Delta)$$

$$\text{لدينا: من أجل كل } x \in \mathbb{R}_-^* \quad f(x) - (x+1) = \left(\frac{-e^x}{e^x - 1} \right) > 0 \quad (C_f) \text{ فوق } (\Delta')$$

4- إثبات أن النقطة $\omega(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر لـ (C_f)

$$\omega(0; \frac{1}{2}) \text{ مركز تناظر لـ } (C_f) \text{ معناه } f(-x) + f(x) = 1$$

$$\text{لدينا: } f(-x) + f(x) = -x - \frac{1}{e^{-x} - 1} + x - \frac{1}{e^x - 1} = -\frac{e^x}{1 - e^x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 1$$

5- أ- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β

$$\text{الدالة } f \text{ متزايدة تماما على المجال } \mathbb{R}_+^* \text{ و } f(\ln 2) \times f(1) < 0$$

$$\text{ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد } \alpha \text{ محصور بين } \ln 2 \text{ و } 1 \text{ يحقق: } f(\alpha) = 0$$

$$\text{الدالة } f \text{ متزايدة تماما على المجال } \mathbb{R}_+^* \text{ و } f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$$

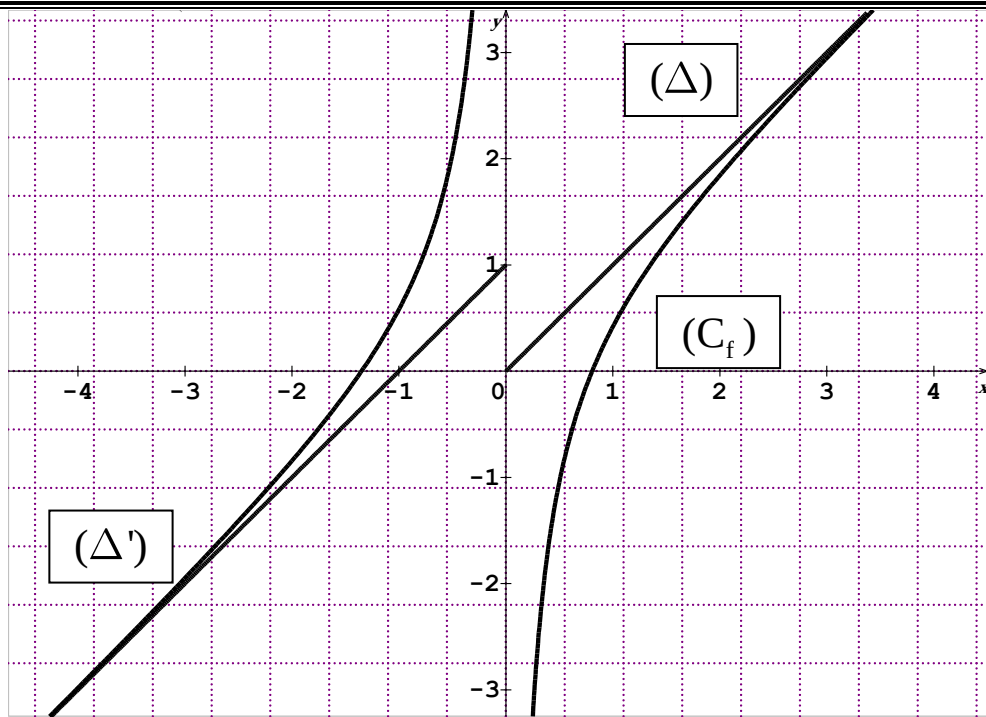
$$\text{ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد } \beta \text{ محصور بين } -1,4 \text{ و } -1,3 \text{ يحقق: } f(\beta) = 0$$

ب- البحث عن وجود مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)

$$\text{المماس لـ } (C_f) \text{ يوازي } (\Delta) \text{ معناه } f'(x_0) = 1$$

$$\text{ومنه: } 1 = \frac{e^{x_0}}{(e^{x_0} - 1)^2} \text{ أي } e^{x_0} = 0 \text{ هذه المعادلة لا تقبل حلول إذن لا يوجد مماس يوازي } (\Delta)$$

ج- رسم (Δ) و (Δ') ثم المنحنى (C_f)



د) المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة $(m-1)e^{-x} = m$

نضع: $(m-1)e^{-x} = m \dots (1)$

(1) تكافئ $m(e^x - 1) = -1$ تكافئ $x + m = x - \frac{1}{e^x - 1} = f(x)$ تكافئ

لدينا: $x + m = f(x)$ تكافئ $\begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases}$ حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f)

المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة: $y = x + m$ من البيان نجد:

(1) إذا كانت $m < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حل موجب تماما.

(2) إذا كانت $0 \leq m \leq 1$ فإن المعادلة (1) لا تقبل حلول.

(3) إذا كانت $m > 1$ فإن المعادلة (1) تقبل حل سالب تماما.

التمرين 24: دورة 2008

I- تعيين العددين الحقيقيين a و b

لدينا: $f(-1) = 1$ معناه $(-a+b)e + 1 = 1$ ومنه $a=b$

لدينا: $f'(-1) = -e$ معناه $(2a-b)e = -e$ ومنه $2a-b = -1$ نستنتج مما سبق أن $a=b=-1$

II- تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ والتفسير الهندسي

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} (ue^u) + 1 = 1$ نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي لـ (C_f) .

ب) دراسة تغيرات الدالة g

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ ، $g(-2) = e^2 + 1$

اتجاه التغير:

g قابلة للإشتقاق على D_f حيث: $f'(x) = g'(x) = xe^{-x}$ وإشارته هي حسب إشارة x

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$e^2 + 1$	0	1

(ج) تبين ان المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I

(C_g) يقبل نقطة انعطاف I معناه g'' يندم ويغير اشارته

لدينا: $g'(x) = xe^{-x}$ ومنه: $g''(x) = (1-x)e^{-x}$

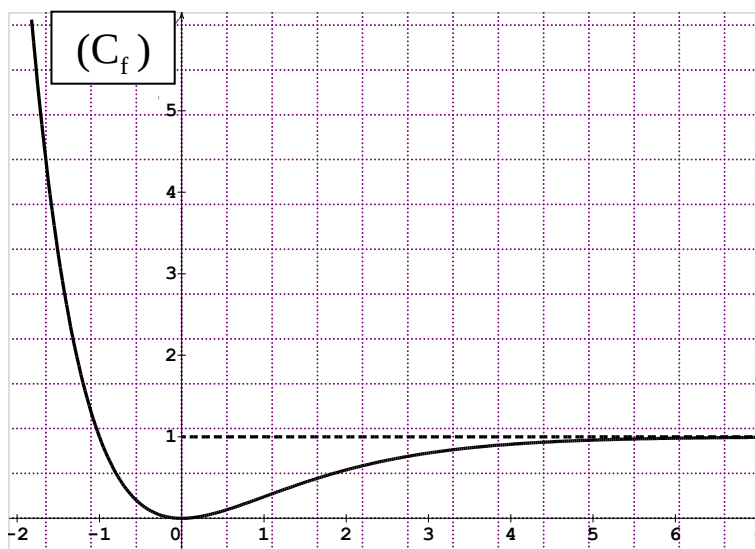
إشارة $g''(x)$ هي حسب إشارة $(1-x)$ وهي كمايلي

$g(1) = -2e^{-1} + 1$ ومنه نقطة الإنعطاف هي $I(1, g(1))$

(د) كتابة معادلة المماس لـ (C_g) عند نقطة انعطاف I

$$y = g'(1)(x - 1) + g(1) = e^{-1}x - 3e^{-1} + 1$$

(هـ) إنشاء (C_g)



III تعيين اتجاه تغير k وتشكيل جدول تغيراتها

k معرفة على $[-2, +\infty[$ حيث: $k(x) = g(x^2)$

ومنه $k'(x) = 2xg'(x^2)$ وإشارة $k'(x)$ هي حسب إشارة x لأن $g(x^2) > 0$

$$k(-2) = g(4) = -5e^{-2} + 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x^2) = 1$$

جدول تغيرات الدالة k

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$		- 0 +	
$k(x)$	$-5e^{-2} + 1$	0	1

I-أ) حساب $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$ بقراءة بيانية

من البيان نجد: $g(-1) = -\frac{1}{4}$ و $g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

ب) استنتاج وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$ بقراءة بيانية

من البيان الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$ و $g(-1) \times g(-\frac{1}{2}) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha \in]-1; -\frac{1}{2}[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

التحقق أن: $-0,8 < \alpha < -0,7$

: $g(-0,8) = -0,01$ و $g(-0,7) = 0,14$ أي $g(-0,8) \times g(-0,7) < 0$ ومنه $-0,8 < \alpha < -0,7$

ج) استنتاج إشارة $g(x)$

من بيان الدالة g ومن الجواب 2-أ) نستنتج أن :

$g(x) > 0$ معناه $g(] \alpha; +\infty[) =]0; +\infty[$ و $g(x) < 0$ معناه $g(]-\infty; \alpha]) =]-\infty; 0[$

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x+2) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+2) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$

2) تبيان أن من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = g(x)$ ثم تشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x) = (x+2)' \cdot (e^x - 1) + (x+2) \cdot (e^x - 1)' = 1 \cdot (e^x - 1) + (x+2) \cdot e^x = (x+3) \cdot e^x - 1 = g(x)$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعليه f متناقصة على $]-\infty; \alpha[$ ومتزايدة على $]\alpha; +\infty[$

جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + x)$ ثم استنتاج ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2)(e^x - 1) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x + 2e^x - 2) = -2 \text{ لدينا: }^*$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \text{ هاتين شهرتين}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = -2^{**}$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x - 2)) = 0$ ومعناه ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) له معادلة من الشكل : $y = -x - 2$ عند $-\infty$.

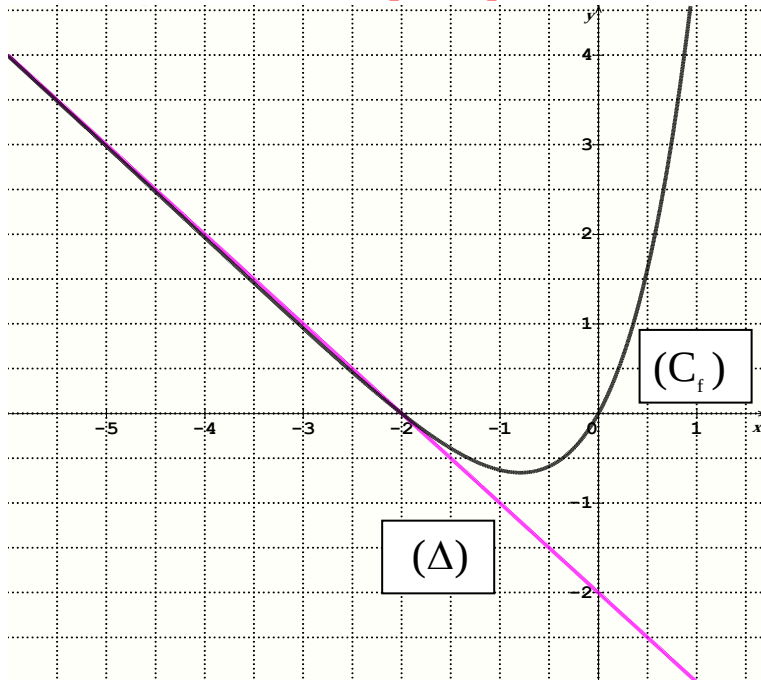
ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

لتحديد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ لدينا: $f(x) - y = x e^x + 2e^x = e^x(x + 2)$ وعليه إشارة الفرق هي حسب إشارة $(x + 2)$ وعليه من أجل كل $(x < -2)$ يكون (C_f) تحت والمستقيم (Δ) ومن أجل كل $(x > -2)$ يكون (C_f) فوق والمستقيم (Δ) من أجل $(x = -2)$ يكون (C_f) يقطع والمستقيم (Δ) في النقطة التي إحداثياتها $(-2; 0)$

ج) كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_f) الموازي للمستقيم (Δ)

لتعيين معادلة المماس الموازي لـ (Δ) يجب البحث عن فاصلة نقطة التماس والتكن x_0 (C_f) يوازي (Δ) معناه $f'(x_0) = -1$ المماس والمستقيم (Δ) لهما نفس الميل لدينا: $f(x_0) = -1$ تكافئ $g(x_0) = -1$ وتكافئ $(x_0 + 3)(e^{x_0}) = 0$ أي $x_0 = -3$ المماس (T) له معادلة من الشكل : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ أي : $y = f'(-3)(x + 3) + f(-3)$ أي : $y = -x - 2 + e^{-3}$

4) رسم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 1]$ علما أن : $f(\alpha) \approx -0,7$



6-أ) اثبات ان الدالة h زوجية

لدينا: h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = |x|(e^{|x|} - 1)$ نبرهن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$ $h(-x) = h(x)$

لدينا: $h(x) = |-x|(e^{|x|-2} - 1) = h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1)$ لأن: $|-x| = |x|$

ب) التأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $h(x) = f(x-2) + 1$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$: $h(x) = x(e^{x-2} - 1)$(1)

ولدينا (2)..... $f(x-2) + 1 = (x-2+2)(e^{x-2} - 1) = x(e^{x-2} - 1)$

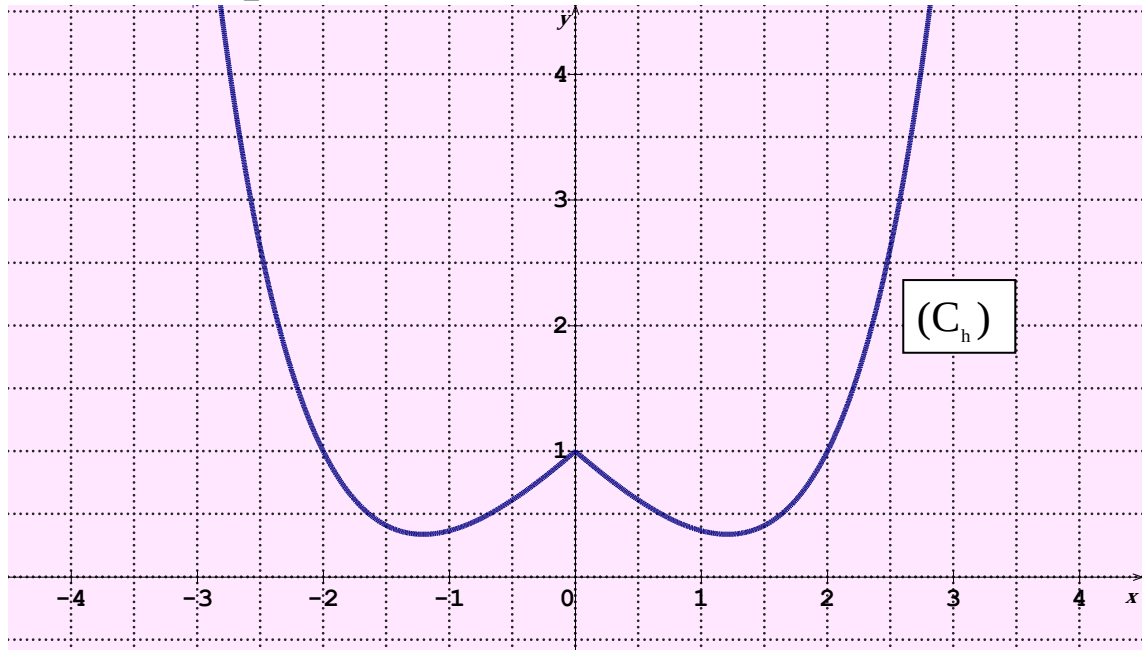
من (1) و(2) نستنتج ان $h(x) = f(x-2) + 1$

ج) شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقاً من المنحنى (C_f) ثم رسم (C_h) على المجال $[-3; 3]$

العبارة $h(x) = f(x-2) + 1$ تعني ان (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}_1^{(2)}$ على المجال $[0; +\infty[$.

وعليه: (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}_1^{(2)}$ على المجال $[0; 3]$

(C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب على المجال $[-3; 0]$ لأن h زوجية.



التمرين 26: دورة 2018

1) حساب: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم تفسير النتيجة بيانياً، ثم حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1; -\infty[$: $f(x) = \frac{x}{x-1} e^{-x}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} e^{-1} = -\infty^*$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ معناه المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} e^{-x} = 1 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty^{**}$$

2- تبين أنه من أجل كل x من $]1; -\infty[$: $f'(x) = \frac{(-x^2 + x - 1)e^{-x}}{(x-1)^2}$

$$\text{لدينا: } f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \cdot e^{-x} + (-1) \left(\frac{x}{x-1} \right) \cdot e^{-x} = \frac{-x^2 + x - 1}{(x-1)^2} \cdot e^{-x}$$

$f'(x) < 0$ لأن $-x^2 + x - 1 < 0$ المميز $\Delta < 0$ ومعامل x^2 سالب وكذلك كلا من $e^{-x} > 0$ و $(x-1)^2 > 0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

الدالة f متناقصة تماما على مجال تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$	0	1
f'(x)		-	
f(x)	$+\infty$		$-\infty$

3- أ) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.

لدينا: (T) له معادلة من الشكل : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ حيث $a=0$

ولدينا: $f'(0) = -1$ و $f(0) = 0$ ومنه : $y = -1(x-0) + 0$ أي $y = -x$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة h ثم استنتاج أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $h(x) \geq 0$.

لدينا: h الدالة العددية المعروفة على المجال $]-\infty; 1[$ ب: $h(x) = e^{-x} + x - 1$ ومنه : $h'(x) = -e^{-x} + 1$

$h'(x) = 0$ معناه $-e^{-x} + 1 = 0$ ومنه $x = 0$

$h'(x) < 0$ معناه $-e^{-x} + 1 < 0$ ومنه $x < 0$ و $h'(x) > 0$ معناه $-e^{-x} + 1 > 0$ ومنه $0 < x < 1$

نستنتج أن : $h(0) = 0$ قيمة حدية صغرى للدالة h

وعليه نستنتج أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $h(x) \geq 0$.

4) تبين أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $f(x) + x = \frac{xh(x)}{(x-1)}$.

$$\text{لدينا: } f(x) + x = \frac{x}{x-1} e^{-x} + x = \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{x-1} = \frac{xh(x)}{(x-1)}$$

استنتاج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) وتفسير النتيجة بيانيا.

$$\text{العبرة } f(x) + x = \frac{xh(x)}{(x-1)} \text{ تكتب على الشكل } f(x) - (-x) = \frac{xh(x)}{(x-1)}$$

إشارة الفرق $f(x) - (-x)$ تحدد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T)

وهو حسب إشارة العبرة $\frac{xh(x)}{(x-1)}$ والموضحة في فيما يلي

1- من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ يكون $f(x) - (-x) > 0$ ومعناه يكون (C_f) فوق (T)

2- من أجل كل $x \in]0; 1[$ يكون $f(x) - (-x) < 0$ ومعناه يكون (C_f) تحت (T)

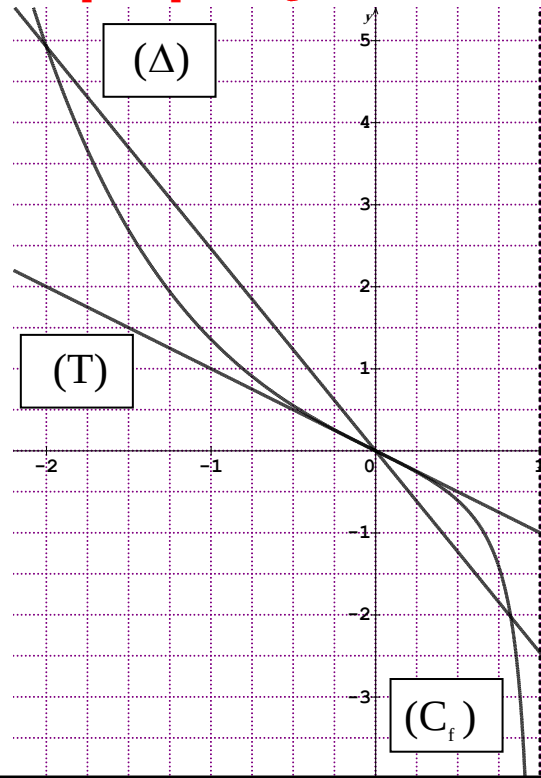
3- من $x = 0$ يكون $f(x) - (-x) = 0$ ومعناه يكون (C_f) يقطع (T) في نقطة المبدأ O

نستنتج مما سبق أن المماس (T) يخرق المنحنى (C_f) في نقطة المبدأ O
ومنه نقطة المبدأ O هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

5) كتابة معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O والنقطة $A(-2; \frac{2}{3}e^2)$.

المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ له معادلة من الشكل : $y = ax$ لأنه يشمل المبدأ المعلم O
 $A \in (\Delta)$ معناه $\frac{2}{3}e^2 = -2a$ ومعناه $a = -\frac{1}{3}e^2$ ومنه (Δ) له معادلة من الشكل $y = -\frac{1}{3}e^2x$

رسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-2; 1]$.



التمرين 27: دورة 2017 الاستثنائية

I- دراسة اتجاه تغير الدالة g واستنتاج إشارة $g(x)$

* لدينا: الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$

ومنه : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = -(2e^{-x} - 2xe^{-x}) = 2e^{-x}(x - 1)$

لدينا: إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(x - 1)$ حيث $g'(x) = 0$ من أجل $x = 1$

وعليه تكون الدالة g متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty; 1]$

* لدينا $g(1) = 1 - 2e^{-1} > 0$ أي $g(1)$ قيمة حدية صغرى لـ g نستنتج أن إشارة $g(x) > 0$

II-1- أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا: الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = (x + 1)(1 + 2e^{-x})$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2e^{-x}) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2e^{-x}) = 1$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها .

من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = 1 \cdot (1 + 2e^{-x}) + (x+1)(-2e^{-x}) = 1 + 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} = g(x)$$

من العبارة $f'(x) = g(x)$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي $f'(x) > 0$
 جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2-أ) تبيان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$ ثم استنتاج معادلة لـ: (Δ) لمقارب المائل للمنحنى (C_f) .

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)(1 + 2e^{-x} - 1) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

توضيح: $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = - \lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$ نهاية شهيرة.

من العبارة $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ نستنتج أن :

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = (x+1)(2e^{-x})$
 لدينا: $f(x) - y = 0$ من أجل $x = -1$ ويكون (C_f) يقطع (Δ) في نقطة إحداثيها $(-1; 0)$

$f(x) - y < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; -1[$ ويكون (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

: $f(x) - y > 0$ من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ويكون (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

3) أثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) وتعيين معادلة له.

المماس (T) يوازي (Δ) معناه (T) و (Δ) لهما نفس معامل التوجيه معناه $f'(x_0) = 1$

$f'(x_0) = 1$ تكافئ $g(x_0) = 1$ وعليه $-2x_0e^{-x_0} = 0$ أي $x_0 = 0$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

كتابة معادلة للمماس (T) : المماس (T) له معادلة من الشكل :

$y = 1(x - 0) + f(0) = x + 3$ أي $y = x + 3$

4) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين.

لتعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين

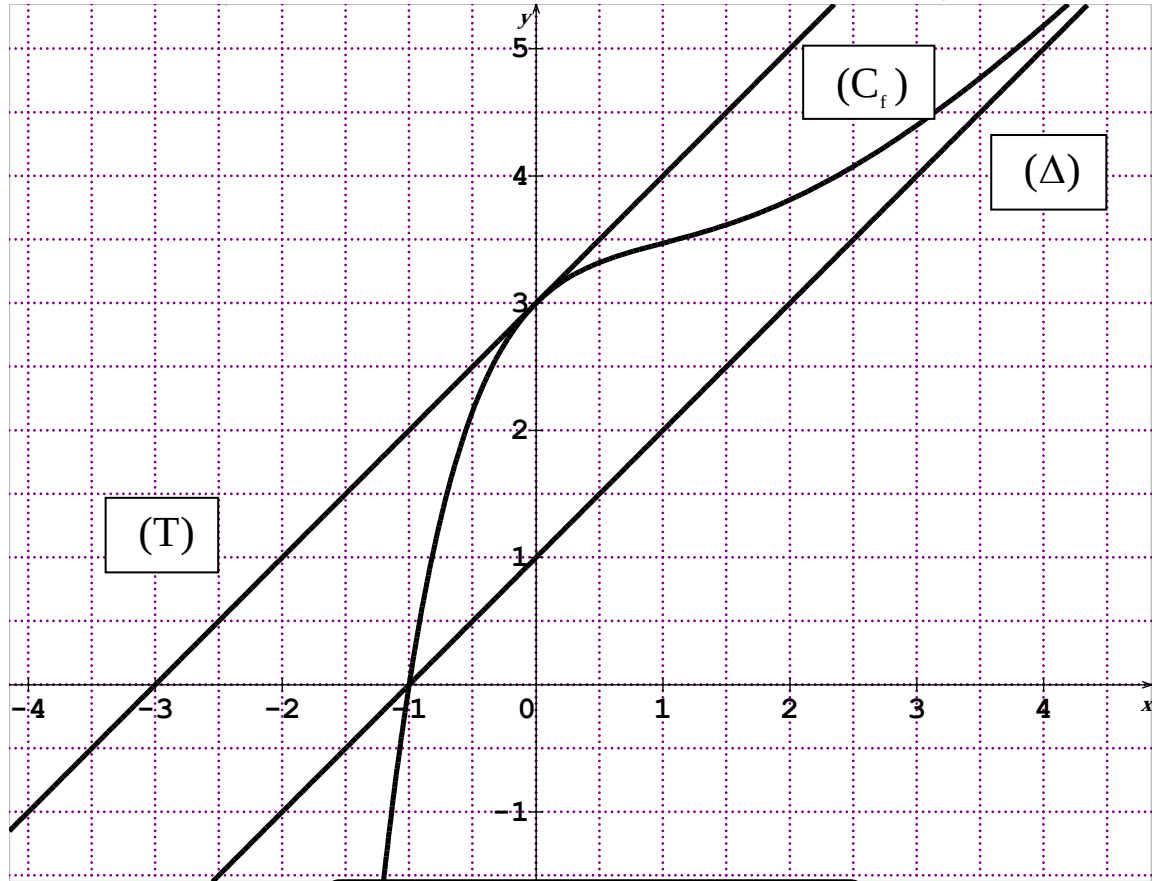
نستعمل المنحنى (C_f) والموجود في آخر الحل

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ بيانيا هي الحل البياني للجملة $\begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases}$

وهي فواصل نقط تقاطع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = x + m$ والمنحنى (C_f)

من البيان يكون للجملة $\begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases}$ حلين مختلفين معناه (Δ_m) يقع في الشريط الذي حداه

المستقيمين (T) و (Δ) وعليه $1 < m < 3$.



التمرين 28: دورة 2015

1- I حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$ نهاية شهيرة و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x - 2 = -2$

2) دراسة اتجاه تغير g وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $g'(x) = 1 \cdot e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$ وإشارته هي حسب إشارة $x+3$

وعليه ج تغيرات الدالة g كمايلي:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-2	$g(-3)$	$+\infty$

3) حساب $g(0)$ استنتاج إشارة $g(x)$

لدينا: $g(0) = (0+2)e^0 - 2 = 0$ ومن جدول التغيرات للدالة g لدينا:

$g(x) < 0$ من أجل كل $]-\infty; 0[$ و $g(x) > 0$ من أجل كل $]0; +\infty[$

(I-1) تبيان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ثم حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + 3 - (x+1)e^x]$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x+3}{x+1} \right] = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty: \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{2x+3}{x+1} - e^x \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x + 3 - (x+1)e^x] = -\infty^* \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x = 0 \text{ نهاية شهيرة و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+3) = -\infty$$

(2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)$.

لدينا: $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$ ومنه: $f'(x) = 2 - [1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x] = 2 - (x+2)e^x = -g(x)$

ب) استنتاج إشارة $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x) = -g(x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على $]-\infty; 0[$ و متناقصة تماماً على $]0; +\infty[$

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كما يلي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(0)$	$-\infty$

ج) تبيان أن المستقيم (Δ) إذا المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$y = 2x + 3 : (\Delta) \text{ مقارب مائل لـ } (C_f) \text{ بجوار } -\infty \text{ معناه } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x = 0 \text{ نهاية شهيرة}$$

*** دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)**

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - (2x + 3)$

من الجواب السابق لدينا: $f(x) - (x+1) = -(x+1)e^x$

إشارة الفرق هي من إشارة $-(x+1)$ لأن $e^x > 0$

$$-(x+1) = 0^* \text{ ومنه } x = -1 \text{ معناه } (C_f) \text{ يقطع } (\Delta) \text{ في النقطة التي فاصلتها } -1$$

$$-(x+1) < 0^* \text{ ومنه } x > -1 \text{ معناه } (C_f) \text{ تحت } (\Delta) \text{ في المجال }]-1; +\infty[$$

$$-(x+1) > 0^* \text{ ومنه } x < -1 \text{ معناه } (C_f) \text{ فوق } (\Delta) \text{ في المجال }]-\infty; -1[$$

3-أ) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β

* الدالة f مستمرة و متزايدة على المجال $]-\infty; 0[$

$$f(-1,55) = 0,016 \text{ و } f(-1,56) = -0,0023 \text{ أي } f(-1,55) \times f(-1,56) < 0$$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β حيث:

$f(x) = 0$ يحقق $f(\beta) = 0$ أي β حلا وحيدا للمعادلة $-1,56 < \beta < -1,55$.

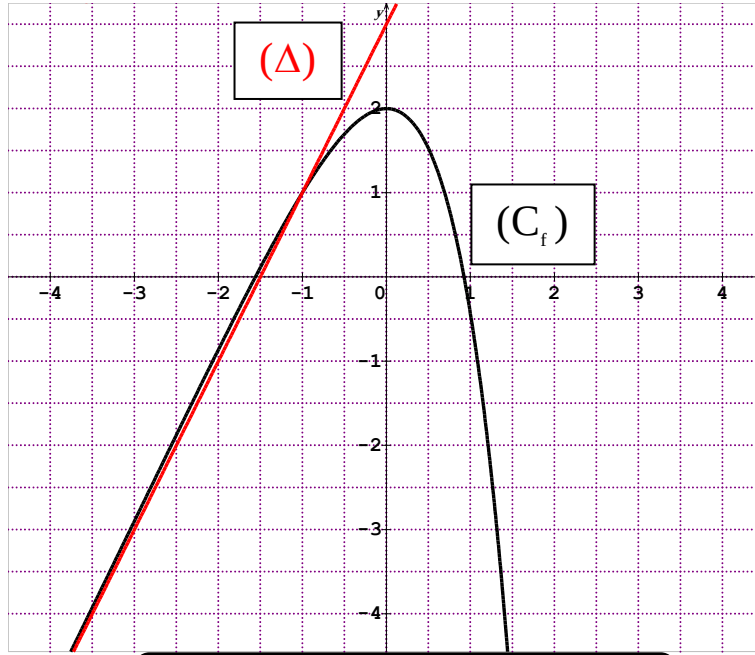
* الدالة f مستمرة ومتناقصة على المجال $]0; +\infty[$

$f(0,92) = 0,022$ و $f(0,93) = -0,031$ أي $f(0,92) \times f(0,93) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث:

$f(\alpha) = 0$ يحقق $0,92 < \alpha < 0,93$ أي α حلا وحيدا للمعادلة $f(x) = 0$.

ب) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}[$



التمرين 29: دورة 2014

1- تعيين نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

لدينا: f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)e^x$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x)e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x)e^x = +\infty$ بن شهيرة

2- دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f'(x) = [(x-1)e^x]' = 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x = xe^x$ وشارته هي حسب إشارة x

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	0		$+\infty$

3- أ) تبين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا

وحيدا α على $\mathbb{R}$. ثم التحق

أن: $1,27 < \alpha < 1,28$

f مستمرة و متزايدة على المجال $]0; +\infty[$

و $f(0) = -1$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ أي $1 \in]-1; +\infty[$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق $f(\alpha) = 1$.

ولدينا: $f(1,27) = 0,96$ و $f(1,28) = 1,007$ أي $f(1,27) < f(\alpha) < f(1,28)$ ومنه $1,27 < \alpha < 1,28$

ب) كتابة معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(T) له معادلة من الشكل $y = f'(1)(x-1) + f(1) = e(x-1) + 0 = e(x-1)$ ومنه: $y = e(x-1)$

تحديد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T)

لدراسة وضعية (T) بالنسبة لـ (C_f) ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y = (x-1)e^x - (x-1)e = (x-1)(x-e)$$

العبارتان $(x-1)$ و $(x-e)$ ينعدمان عند 1 ولهما نفس الإشارة وهي:

من أجل $x < 1$ العبارتان $(x-1) < 0$ و $(x-e) < 0$ وعليه $(x-e)(x-1) > 0$

من أجل $x > 1$ العبارتان $(x-1) > 0$ و $(x-e) > 0$ وعليه $(x-e)(x-1) > 0$

من أجل $x = 1$ العبارتان $(x-1) = 0$ و $(x-e) = 0$ وعليه $(x-e)(x-1) = 0$

نستنتج مما سبق أن: المماس (T) يكون دوماً فوق (C_f) ويمس في النقطة التي إحداثياتها (1;0)

ج) رسم (T) و (C_f) في آخر الحل

4) تعيين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة: $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلاً واحداً في $\mathbb{R}$

نضع: (1) $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$

لدينا: (1) تكافئ $(x-1)e^x = (m-1)e^m - 1$ (1) وتكافئ $f(x) = f(m) - 1$

من البيان المعادلة $f(x) = f(m) - 1$ تقبل حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$ معناه $f(m) - 1 \geq 0$.

$f(m) - 1 \geq 0$ ومنه $f(m) \geq 1$ أي $m \geq \alpha$ لأن f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

5- أتبين أن الدالة h زوجية.

H زوجية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$ ، $h(-x) = h(x)$.

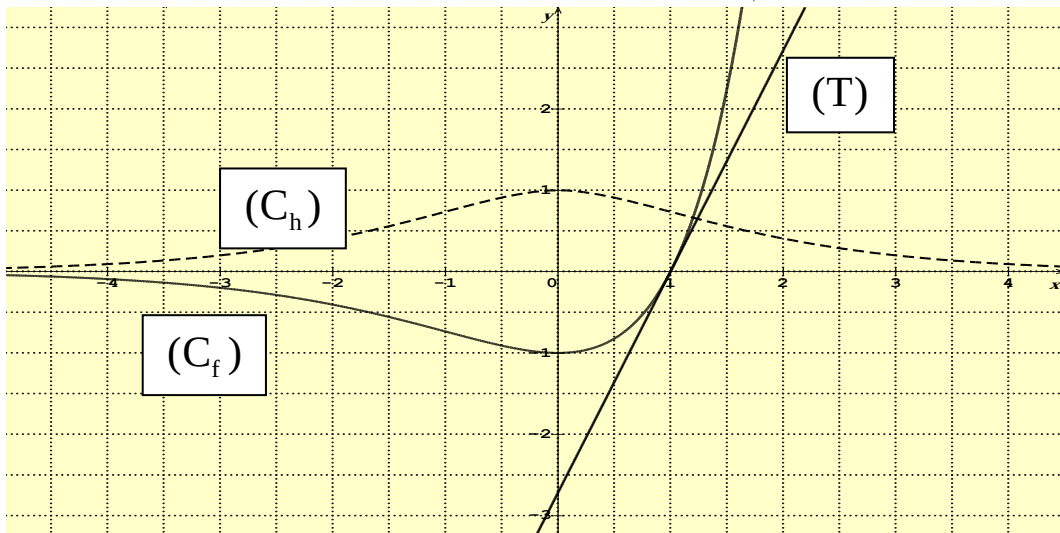
لدينا: $h(-x) = (|-x|+1)e^{-|x|} = (|x|+1)e^{-|x|} = h(x)$ لأن $|-x| = |x|$.

ب) رسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f).

الجملة تعني أن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل $h(x) = \begin{cases} -f(x); x \in]-\infty; 0[\\ f(x); x \in [0; +\infty[\end{cases}$

من أجل $x \in]-\infty; 0[$ ونكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب لأن h زوجية

رسم (C_h).



6) تعيين a و b حتى يكون : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$.

لدينا: $g(x) = (ax + b)e^x$

ومنه: $g'(x) = (a) + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$

$g'(x) = f(x)$ معناه $(ax + a + b)e^x = (x - 1)e^x$ بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} a = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

التمرين 30: دورة 2012

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$
النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4 - 2xe^x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 - 2xe^x = -4$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$$f'(x) = [(4 - 2x)e^x]' = -2e^x + (4 - 2x)e^x = (2 - 2x)e^x$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-4	$f(1)$	$-\infty$

2) بَيِّنْ أَنَّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,59 < \alpha < 1,60$.

* المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم لأن $g(0) = 0$.

* لدينا: الدالة g مستمرة ومنتزيدة تماما على المجال $]1,59; +\infty[$ (أنظر جدول تغيرات الدالة g)

ولدينا: $g(1,59) = 0,02$ و $g(1,60) = -0,03$ أي $g(1,60) \times g(1,59) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha \in]1,59; 1,60[$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$.

باستعمال الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	-

II-1) تبَيِّنْ أَنَّ (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x - 2}{e^x - 2x}$

نبيِّنْ أَنَّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 - e^x}{e^x - 2x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{e^x - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x} - 2} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^*$$

$$-2) \text{ أ) البرهان أنه من أجل } x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$$

$$\text{لدينا: } f'(x) = \frac{2(e^x - 2x) - (e^x - 2)(2x - 2)}{(e^x - 2x)^2} = \frac{4e^x - 2xe^x - 4}{(e^x - 2x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$$

ب) استنتاج إشارة $f'(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$ (أنظر I-3) وعليه يكون جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	-1	$f(0)$	$f(1)$	$f(\alpha)$	0

ج) حساب $f(1)$ ، ثم استنتاج إشارة $f(x)$.

لدينا: $f(1) = 0$ وإشارة $f(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

$$-3) \text{ أ) تبين أن : } f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$\text{لدينا } f(\alpha) = \frac{2\alpha - 2}{e^\alpha - 2\alpha} \text{ ولدينا من جهة أخرى } g(\alpha) = 0 \text{ والتي تكافئ } e^\alpha = \frac{4}{4 - 2\alpha - 2} = \frac{2}{2 - \alpha}$$

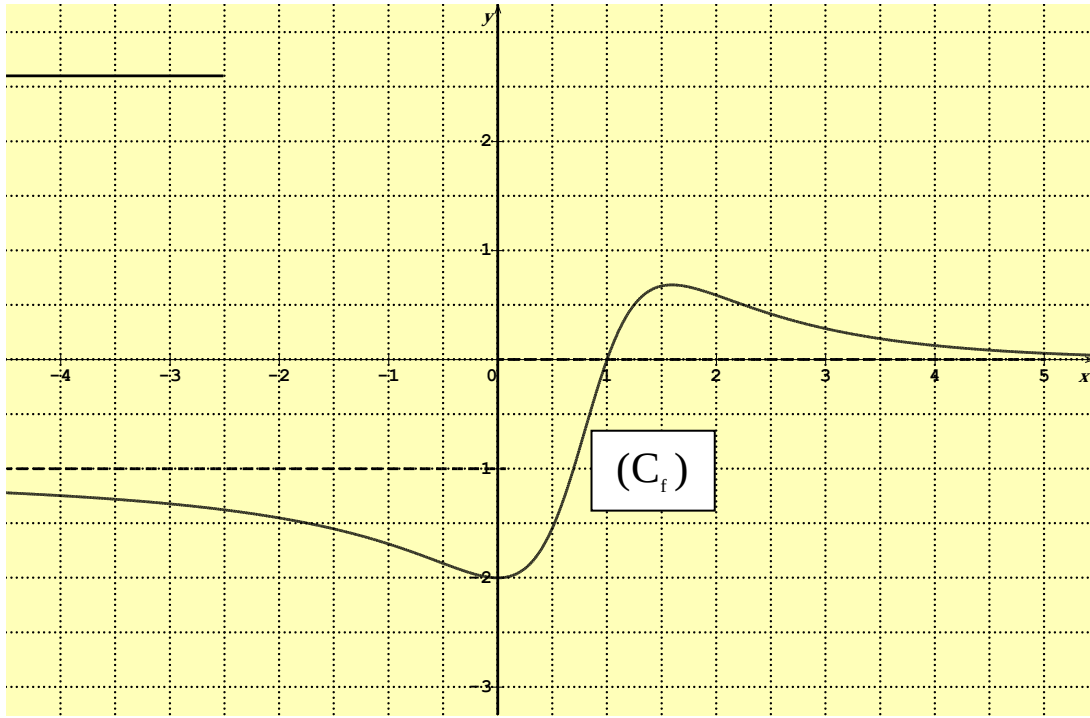
$$\text{ومنه: } f(\alpha) = \frac{2\alpha - 2}{\frac{2}{2 - \alpha} - 2\alpha} = \frac{(\alpha - 1)(2 - \alpha)}{(\alpha - 1)^2} = \frac{(2 - \alpha)}{(\alpha - 1)} = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

ب) استنتاج حصر العدد $f(\alpha)$.

$$\text{لدينا: } 1,59 < \alpha < 1,60 \text{ تكافئ } 0,59 < \alpha - 1 < 0,60 \text{ تكافئ } \frac{1}{0,6} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \leq \frac{1}{0,59}$$

وتكافئ $0,66 \leq f(\alpha) \leq 0,69$ اذن $0,66 \leq -1 + \frac{1}{\alpha-1} \leq 0,69$

(ج) رسم (C_f) .



4- المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة $2x - 2 = (e^x - 2x)(m+1)$

نضع: $2x - 2 = (e^x - 2x)(m+1) \dots (e)$ تكافئ $(m+1) = \frac{2x-2}{(e^x-2x)}$ أي $f(x) = (m+1)$ أي $y = m+1$
 $y = f(x)$

حلول المعادلة (e) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذو المعادلة: $y = m+1$.
 من البيان نميز الحالات التالية:

- 1) $m+1 < -2$ أي $m < -3$ المعادلة (e) لا تقبل حلول.
- 2) $m+1 = -2$ أي $m = -3$ المعادلة (e) تقبل حلا مضاعف معدوم.
- 3) $-1 < m+1 < -2$ أي $-2 < m < -3$ المعادلة (e) لا تقبل حلين مختلفين في الإشارة.
- 4) $-2 < m+1 \leq 0$ أي $-3 < m \leq -1$ المعادلة (e) تقبل حل وحيد موجب.
- 5) $0 < m+1 < f(\alpha)$ أي $-1 < m < -1+f(\alpha)$ المعادلة (e) لا تقبل حلين موجبين تماما.
- 6) $m+1 = f(\alpha)$ أي $m = -1+f(\alpha)$ المعادلة (e) تقبل حلا مضاعف موجب تماما.
- 7) $m+1 > f(\alpha)$ أي $m = -1+f(\alpha)$ المعادلة (e) لا تقبل حلول.

5- أ) حساب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ ثم استنتاج إشارة $h'(x)$

لدينا: h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x) = [f(x)]^2$

ومنه $h'(x) = 2f(x).f'(x)$ استعمال مشتق دالة مركبة.

من العبارة $h'(x) = 2f(x).f'(x)$ نستنتج أن إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة الجداء $f(x).f'(x)$ وهي ملخصة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
f(x)	-	-	0		+
f'(x)	-	0	+	0	-
h'(x)	+	0	-	0	-

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة h.

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
h'(x)	+	0	-	0	-
h(x)		$[f(0)]^2$		$[f(\alpha)]^2$	

Diagram showing arrows from 1 to $[f(0)]^2$ and from $[f(0)]^2$ to 0, and from 0 to $[f(\alpha)]^2$ and from $[f(\alpha)]^2$ to 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^2 = (0)^2 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]^2 = (-1)^2 = 1$$

التمرين 31: دورة 2011

1- دراسة تغيرات الدالة f.

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 3 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{e^x + 1} = -1$$

اتجاه التغير

$$f'(x) = 0 - \frac{-4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

ونلاحظ أن $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
وجداول تغيراتها هو كمايلي

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	-1	3

2- تعيين المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = -1$ عند $-\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 3$ عند $+\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

3- تبين أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطاب تعيينها.

(C_f) نقطة انعطاف ω معناه $f''(x)$ ينعدم ويغير اشارته

لدينا: $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ ومنه: $f''(x) = \frac{4e^x(e^x + 1)^2 - 2(e^x + 1) \cdot 4e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{4e^x(e^x + 1)[(e^x + 1) - 2]}{(e^x + 1)^4} = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	

إشارة $f''(x)$ هي حسب إشارة $e^x - 1$ وهي كمايلي
 $f(0) = 1$ ومنه نقطة الإنعطاف هي $\omega(0;1)$

كتابة معادلة المماس لـ (C_f) عند نقطة انعطاف ω

معادلة من الشكل $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

ومنه: $y = x + 1$ أي $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = (1)(x - 0) + 1 = x + 1$

4-أ- دراسة تغيرات الدالة g.

لدينا: g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = f(x) - x$

النهايات

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ ولأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ ولأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$

اتجاه التغير

$g'(x) \leq 0$ ونلاحظ أن $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} - 1 = \frac{4e^x - (e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2} = \frac{-(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$

ومنه الدالة g متناقصة على $\mathbb{R}$. وجدول تغيراتها هو كمايلي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 -	
$g(x)$	$+\infty$	1	$-\infty$

ب- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,7 < \alpha < 2,8$.

* لدينا: الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ (أنظر جدول تغيرات الدالة g)
ولدينا: $g(2,7) = 0,04$ و $g(2,8) = -0,02$ أي $g(2,7) \times g(2,8) < 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $2,7 < \alpha < 2,8$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

4- حساب $f(-x) + f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا.

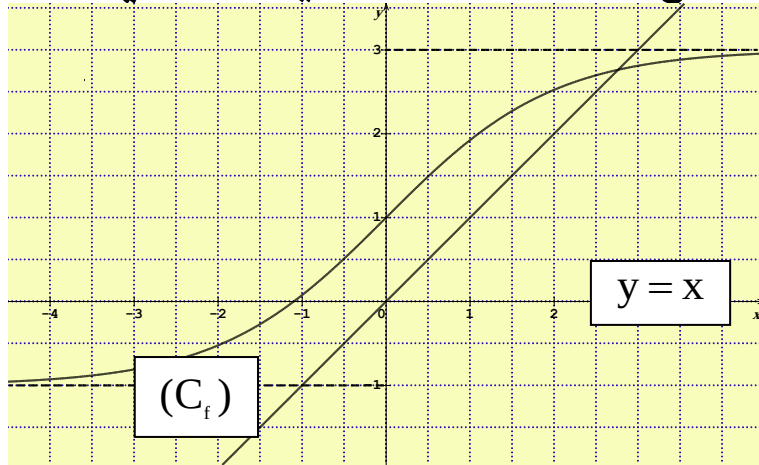
لدينا: $f(-x) + f(x) = 3 - \frac{4}{e^{-x} + 1} + 3 - \frac{4}{e^x + 1} = 6 - \left(\frac{4e^x}{e^x + 1} + \frac{4}{e^x + 1} \right) = 6 - 4 = 2$

ومن أجل كل عدد حقيقي x: $f(-x) + f(x) = 2$

العبارة $f(-x) + f(x) = 2$ تعني أن النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5- حل المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$.

$x = -\ln 3$ إذن $e^x = \frac{1}{3}$ ومنه $3e^x - 1 = 0$ أي $\frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = 0$ ومعناه $3 - \frac{4}{e^x + 1} = 0$ معناه $f(x) = 0$
التفسير الهندسي: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة التي إحداثياتها $(-\ln 3; 0)$



التمرين 32: دورة 2010

1- تعيين العددين الحقيقيين a و b

لدينا: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$

لدينا: $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$ تكافئ (1) $f(x) = x - \frac{4}{3(e^x - 1)}$

ولدينا: من اجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ (2)

بالمطابقة بين الشكلين (1) و (2) نجد: $a = 1$ و $b = -4$.

2- حساب نهايات الدالة f عند اطراف مجالات تعريفها.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{4}{3(e^x - 1)} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{3(e^x - 1)} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{4}{3(e^x - 1)} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3(e^x - 1)} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \frac{4}{3(e^x - 1)} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{3(e^x - 1)} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{4}{3(e^x - 1)} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{3(e^x - 1)} = +\infty$

3- تبين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f(x) = x - \frac{4}{3(e^x - 1)}$ ومنه: $f'(x) = 1 + \frac{4e^x}{3(e^x - 1)^2}$

من العبارة $f'(x) = 1 + \frac{4e^x}{3(e^x - 1)^2} > 0$ فنستنتج أن $f'(x) > 0$ وعليه تكون الدالة متزايدة تماما على

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+		+
f(x)	$-\infty$		$+\infty$

مجال تعريفها وجدول تغيراتها يكون كما يلي:

5- (أ) تبين أن (D) و (D') مقاربان لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

* المستقيم $y = x$: (D) مقارب لـ (C_f) لأن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{3(e^x - 1)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4}{3} \left[\frac{1}{(e^x - 1)} + 1 \right] = 0 \text{ لأن: } (D') : y = x + \frac{4}{3} \text{ مقارب لـ } (C_f) \text{ لأن:}$$

* لدينا: $[f(x) - y] = -\frac{4}{3(e^x - 1)} < 0$ تحت المستقيم (D) : $y = x$ من أجل كل $x > 0$

فوق المستقيم (D') : $y = x + \frac{4}{3}$ من أجل كل $x < 0$: $[f(x) - y] = -\frac{4}{3} \left[\frac{e^x}{(e^x - 1)} \right] > 0$

ب) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث: $0,91 < x_0 < 0,9$ و $-1,65 < x_1 < -1,66$.

الدالة f متزايدة تماماً على المجال $\mathbb{R}_+$ و $f(0,9) \times f(0,91) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد x_0 محصور بين 0,9 و 0,91 يحقق: $f(x_0) = 0$

الدالة f متزايدة تماماً على المجال $\mathbb{R}_-$ و $f(-1,66) \times f(-1,65) < 0$

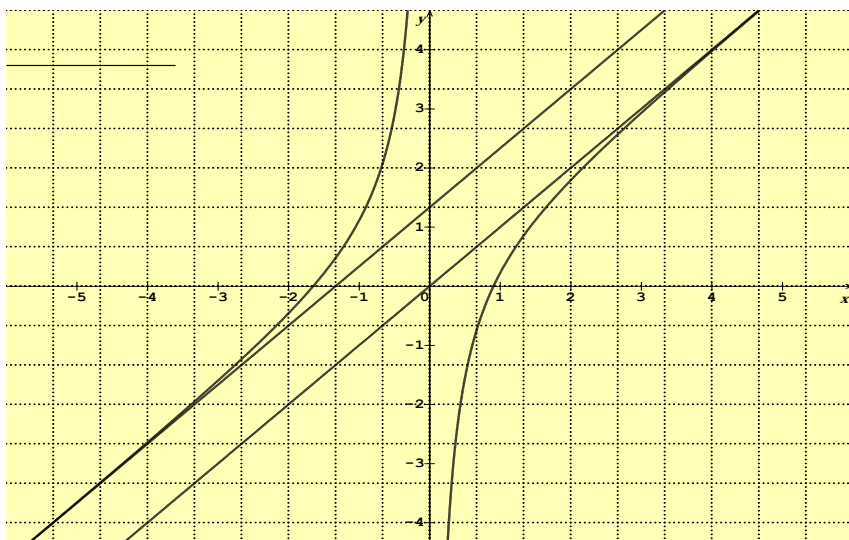
ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد x_1 محصور بين -1,66 و -1,65 يحقق: $f(x_1) = 0$

ج) حساب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x) + f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسياً.

$$f(-x) + f(x) = -x - \frac{4}{3(e^{-x} - 1)} + x - \frac{4}{3(e^x - 1)} = -\frac{4}{3} \left[\frac{-e^x}{(e^x - 1)} + \frac{1}{(e^x - 1)} \right] = \frac{4}{3}$$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x) + f(x) = \frac{4}{3}$

العلاقة $f(-x) + f(x) = \frac{4}{3}$ تعني ان النقطة التي احداثياتها $(0; \frac{2}{3})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).



د) رسم (D) و (D') و (C_f).

5- المناقشة البيانية حسب قيم m

لعدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

لدينا: $f(x) = x + m$ تكافئ الجملة

$$\begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases} \text{ التالية}$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط

تقاطع (C_f) والمستقيم (D_m) ذو

المعادلة: $y = x + m$ والذي له نفس منحى المستقيمين (D) و (D') من البيان نميز الحالات التالية:

(1) إذا كانت $m < 0$ فإن المعادلة تقبل حل موجب تماما.

(2) إذا كانت $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.

(3) إذا كانت $m > \frac{4}{3}$ فإن المعادلة تقبل حل سالب تماما.

6- دراسة تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x

لدينا: g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = [f(x)]^2$

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^2 = +\infty$$

اتجاه التغير

من العبارة $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$ استعمال مشتق دالة مركبة.

نستنتج أن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ لأن $f'(x) > 0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة h .

x	0	x_0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$g(x_0)$	$+\infty$

التمرين 33: دورة 2009

1- حساب $f(-x) + f(x)$ و الإستنتاج.

لدينا: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$.

$$\text{ومنه: } f(-x) + f(x) = -x + \frac{2}{1+e^{-x}} + x + \frac{2}{1+e^x} = \frac{2e^x}{1+e^x} + \frac{2}{1+e^x} = \frac{2(e^x + 1)}{1+e^x} = 2$$

من العبارة $f(-x) + f(x) = 2$ نستنتج أن (C_f) يقبل النقطة التي إحداثياتها $(0; 2)$ كمرکز تناظر

2- دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم استنتاج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2}{e^x + 1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

اتجاه التغير

لدينا: $f(x) = x - \frac{4}{3(e^x - 1)}$ ومنه: $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$

من العبارة $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$ نستنتج أن $f'(x) > 0$ وعليه تكون الدالة متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ وجدول تغيراتها يكون كما يلي:

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	1	$+\infty$

(C_f) يقبل النقطة التي إحداثياتها (0;1) كمرکز تناظر وعليه جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$ يكون كما يلي

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

ملاحظة: $f'(x) > 0$ وعليه تكون الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{2}{e^x + 1} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

3-تبيان أن المستقيم $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

المستقيم $y = x$: (D) مقارب لـ (C_f) لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(e^x + 1)} = 0$

4-حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)]$ ثم تفسير النتيجة هندسيا.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = 0$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

5-تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حدا وحيد α حيث: $-1,7 < \alpha < -1,6$

* لدينا: الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ (أنظر جدول تغيرات الدالة f)

ولدينا: $f(-1,7) = -8,93 \times 10^{-3}$ و $f(-1,6) = 6,40 \times 10^{-2}$ أي $f(-1,6) \times f(-1,7) < 0$ ومنه

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $-1,7 < \alpha < -1,6$ يحقق $f(\alpha) = 0$.

6-تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

(C_f) يقبل نقطة انعطاف ω معناه $f''(x)$ يندغم ويغير اشارته

لدينا: $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$ ومنه: $f''(x) = \frac{2e^{2x}(e^x + 1)^2 - 2(e^x + 1)e^x(e^{2x} + 1)}{(e^x + 1)^4} = \frac{2e^x[e^x(e^x + 1) - (e^{2x} + 1)]}{(e^x + 1)^3} = \frac{2e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

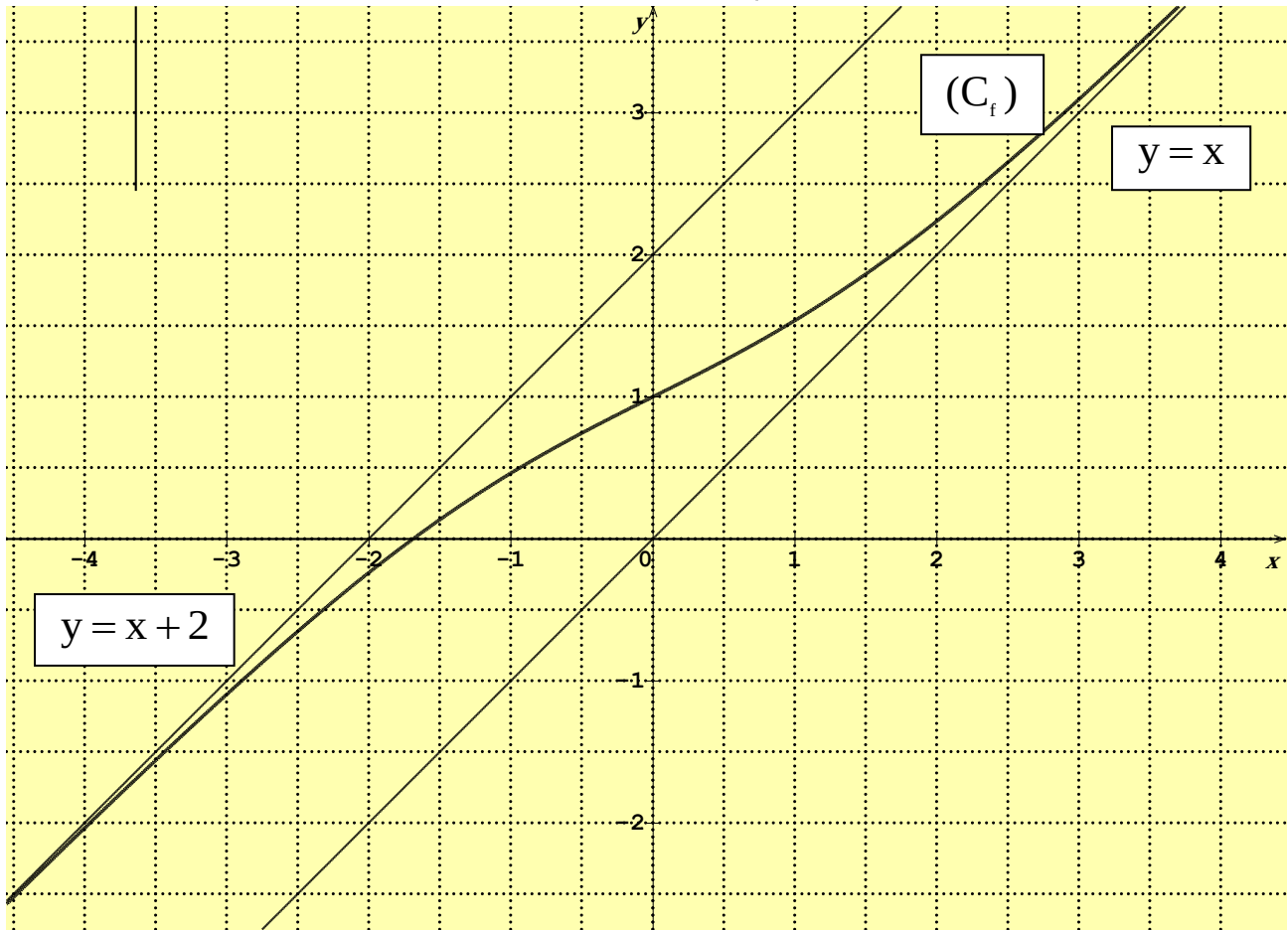
إشارة $f''(x)$ هي حسب إشارة $e^x - 1$ وهي كمايلي
 $f(0) = 1$ ومنه نقطة الإنعطاف هي $\omega(0;1)$

7-تبيان أن المنحنى (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان المقاربان ثم رسم المنحنى (C_f)

لدينا: $[f(x) - y] = \frac{2}{(e^x + 1)} > 0$ حيث $y = x$ ومنه $f(x) > x$ من أجل كل $x \in [0; +\infty[$

ولدينا: $[f(x) - y] = \frac{2e^x}{e^x + 1} < 0$ حيث $y = x + 2$ ومنه $f(x) < x + 2$ من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$

نستنتج مما سبق أن: $x < f(x) < x + 2$ أي أن نقط المنحنى (C_f) تقع في شريط حداه المستقيمان المقاربان اللذان معادلتيهما: $(D); y = x$ و $(D'); y = x + 2$



الجزء الثالث: شعبة: الرياضيات

التمرين 34: دورة 2019

I-1) تبين أن كل المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما

f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي .
ليكن (C_k) تمثيلها البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين معناه احداثيات هاتين النقطتين مستقلة عن k
 $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ تكافئ $y = (x+1)^2 e^{-kx}$ ومعناه $(x+1) = 0$ أو $x = 0$ و $y = 0$
أي من أجل ثنائية $(x; y) = (-1; 0)$ أو $(x; y) = (0; 0)$
تكون المعادلة $y = (x+1)^2 e^{-kx}$ محققة من أجل كل عدد حقيقي k
وعليه جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين احداثياتهما $(-1; 0)$ ، $(0; 0)$

2) حساب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$ (حسب قيم الوسيط الحقيقي k)

نميز ثلاث حالات هي : $k > 0$ ، $k = 0$ ، $k < 0$

الحالة 1: $k > 0$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-kx} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = 0$: لأن $\lim_{t \rightarrow -\infty} (-t+1)^2 e^{kt} = 0$ حيث $-x = t$

الحالة 2: $k = 0$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-kx} = e^0 = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = +\infty$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = e^0 = 1$

الحالة 3: $k < 0$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-kx} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = 0$: لأن $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-t+1)^2 e^{kt} = 0$ حيث $-x = t$

3-أ) حساب $f'_k(x)$ ، ثم تحديد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k .

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'_k(x) = 2(x+1)e^{-kx} - ke^{-kx}(x+1)^2 = k(x+1)(-x-1 + \frac{2}{k})e^{-kx}$

$f'_k(x) = 0$ من أجل $x_2 = -1 + \frac{2}{k}$ أو $x_1 = -1$ لأن $e^{-kx} > 0$

وعليه إشارة $f'_k(x)$ هي حسب إشارة $-k(x+1)(x+1 - \frac{2}{k})$ لأن $e^{-kx} > 0$

نميز ثلاث حالات هي : $k > 0$ ، $k = 0$ ، $k < 0$

1) $k < 0$: $f'_k(x) > 0$ من أجل $x \in]x_2; x_1[$ و $f'_k(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; x_2[\cup]x_1; +\infty[$

2) $k = 0$: $f'_k(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; x_1[$ و $f'_k(x) > 0$ من أجل $x \in]x_1; +\infty[$

3) $k > 0$: $f'_k(x) < 0$ من أجل $x \in]x_1; x_2[$ و $f'_k(x) > 0$ من أجل $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

من أجل k عدد حقيقي موجب تماما لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = +\infty$$

$f'_k(x) < 0$ من أجل $x \in]x_1; x_2[$ و $f'_k(x) > 0$ من أجل $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$
وعليه جدول تغيرات الدالة f_k يكون كما يلي:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	$+\infty$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	0	

4- المناقشة وحسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية (C_k) و (C_{k+1}) .

لدراسة الأوضاع النسبية (C_k) و (C_{k+1}) ندرس إشارة الفرق: $f_{k+1}(x) - f_k(x)$:

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx-x} - (x+1)^2 e^{-kx} = f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx} (e^{-x} - 1)$$

ومنه إشارة الفرق هي حسب إشارة $(e^{-x} - 1)$ لأن $(x+1)^2 e^{-kx} \geq 0$

(1) من أجل $x > 0$ يكون $e^{-x} - 1 < 0$ ومعناه $f_{k+1}(x) - f_k(x) \leq 0$ ويكون (C_{k+1}) تحت (C_k)

(2) من أجل $x < 0$ يكون $e^{-x} - 1 > 0$ ومعناه $f_{k+1}(x) - f_k(x) \geq 0$ ويكون (C_{k+1}) فوق (C_k)

(3) من أجل $x = 0$ يكون $e^{-x} - 1 = 0$ ومعناه $f_{k+1}(x) - f_k(x) = 0$ ويكون (C_{k+1}) يقطع (C_k)

II- 1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f (من أجل $k=2$)

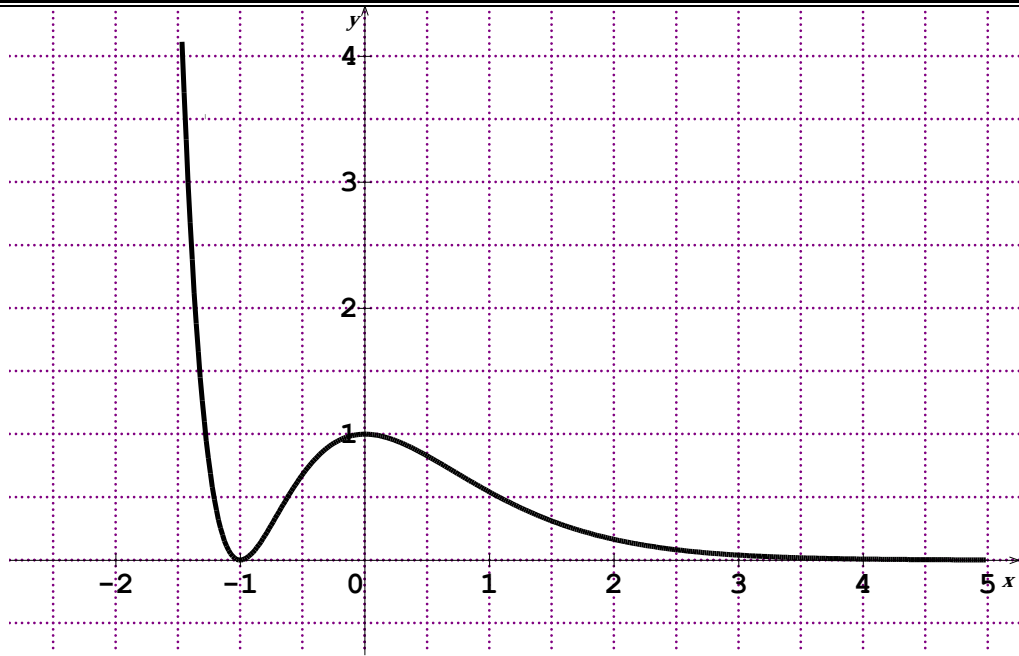
f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

باستعمال جدول التغيرات الوارد في الجواب 3-ب) نضع $k=2$ نجد الجول التالي:

x	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	$f(-\frac{3}{2})$	$f(-1)$	$f(0)$	0	

رسم المنحنى (C_f)



2-أ) بيّن ان المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث : $-1,28 < \alpha < -1,27$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ و $f(-1,28) = 1,01 > 1$ و $f(-1,27) = 0,91 < 1$ وعليه حسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق $f(\alpha) = 1$ حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$

ب) تعيين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right| = \left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

المعادلة : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right| = \left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ تكافئ المعادلة : $f(x) = f(m)$ لأن :

$$(x+1)^2 e^{-2x} = (m+1)^2 e^{-2m} \quad f(x) = f(m) \text{ تكافئ}$$

$$\left|\frac{x+1}{e^x}\right| = \left|\frac{m+1}{e^m}\right| \text{ وتكافئ } |x+1|e^{-x} = |m+1|e^{-m}$$

للمعادلة $f(x) = f(m)$ لها حلا وحيدا معناه المستقيم ذو المعادلة : $y = f(m)$ يقطع المنحنى (C_f)

في نقطة وحيدة فاصلتها m حيث $m \in \left[-\frac{3}{2}; \alpha\right]$

التمرين 35: دورة 2018

I-1) تبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$

$$\text{لدينا: } g'(x) = (2x+1)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{2x^3+x^2+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

لأن $2x^3+x^2+1 = (x+1)(2x^2+1)$ بنشر العبارة

2- أ) استنتاج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

من عبارة $g'(x)$ نستنتج أن اشارتها موجبة تماماً لأن

لأن كلا من: $e^{\frac{1}{x}} > 0$ و $(2x^2 + 1) > 0$ و $x^2 > 0$ و $(x + 1)$ وعليه الدالة g متزايدة تماماً على مجال تعريفها.

2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α حيث $1,9 < \alpha < 1$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ و $g(1) = 3e^{-1} - 1 > 0$ و $g(1,9) = -$ وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $1,9 < \alpha < 1$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) > 0$

II-1- أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x) = 1$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x)^2}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} (x+1)e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{g(x)}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{(x)^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن المقام موجب تماماً

وعليه الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]0; \alpha[$ ومتزايدة تماماً على المجال $]\alpha; +\infty[$

وجداول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

2-تبيان أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x)$

($\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x)$) حالة عدم التعيين

بوضع $t = -\frac{1}{x}$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x) = -\lim_{t \rightarrow 0} (\frac{e^t - 1}{t}) = -1$ لأن $\lim_{t \rightarrow 0} (\frac{e^t - 1}{t}) = 1$ نهاية شهيرة

استنتاج ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقاري للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$.

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقاري للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$ معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(e^{\frac{1}{x}} - x)] = 0$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x) = -1$ من التبيان السابق.

3-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ودراسة اتجاه تغير الدالة h

h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي: $h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} - 1 + e^{\frac{1}{x}} \right] = 0^*$$

** من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن:

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} (-1 + e^{\frac{1}{x}})$$

إشارة $h'(x) < 0$ لأن $-1 + e^{\frac{1}{x}} < 0$ ولأن $\frac{1}{x^2} > 0$

توضيح: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإن:

$$-1 + e^{\frac{1}{x}} < 0 \text{ ومنه } e^{\frac{1}{x}} < 1 \text{ لأن الدالة الأسية متزايدة تماما وتعني } -1 + e^{\frac{1}{x}} < 0$$

ومنه الدالة h متناقصة تماما على مجال تعريفها.

استنتاج إشارة $h(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

من الجوابين السابقين:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \text{ و } h \text{ متناقصة تماما على مجال تعريفها نستنتج أن } h(x) > 0$$

ب) التحقق أن: $f(x) - x = (1+x)h(x)$.

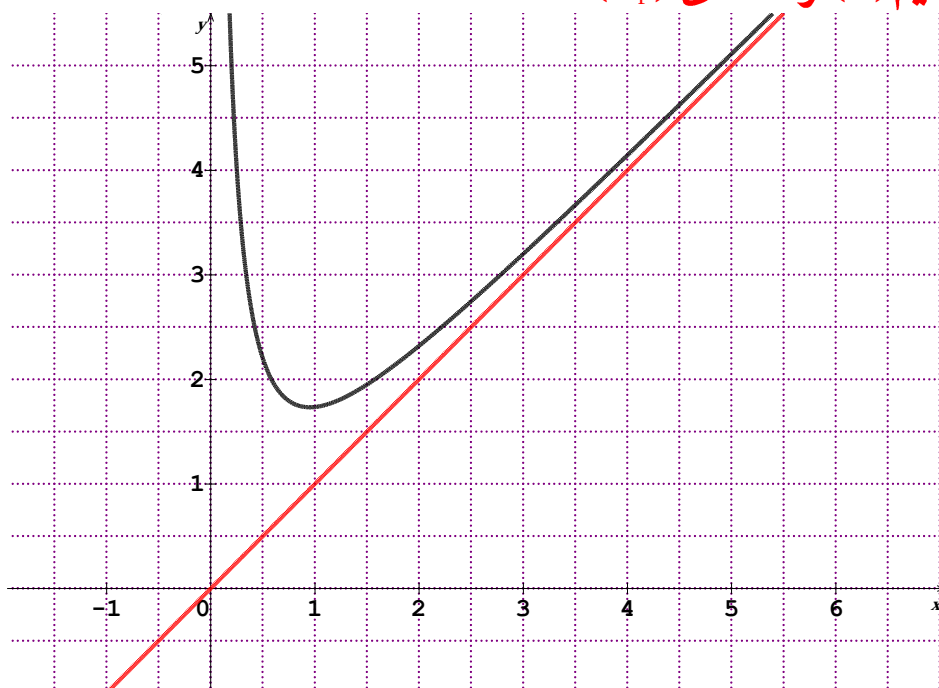
$$\text{لدينا: } f(x) - x = \frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} - x = (x+1)\left(\frac{1}{x} - 1 + e^{\frac{1}{x}}\right) = (x+1)h(x)$$

استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ينبغي دراسة إشارة الفرق $f(x) - x$

ولدينا: $f(x) - x = (1+x)h(x)$ ومنه إشارة الفرق موجبة تماما $(x+1)h(x) > 0$ لأن $x > 0$ وعليه نقول ان المنحنى (C_f) وفوق المستقيم (Δ) .

ب- رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)



التمرين 36: دورة 2017

1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، استنتاج وجود مستقيم مقارب لـ (C_f) وتعيين معادلة له

الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3)e^{-x+1} = +\infty$$

حالة عدم التعيين وفي ما يلي نقوم بإزالتها كما يلي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3)e^{-x+1} = -\infty \times 0$

نضع $t = -x$: ومنه $\lim_{t \rightarrow -\infty} (t^3)e^{t+1} = 0$ علما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3)e^{-x+1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^3)e^{t+1} = 0$ نهاية شهيرة

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ نستنتج أنه يوجد مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) معادلته $y = 0$ في جوار $+\infty$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$.

لدينا: $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$

$$f'(x) = (-x^3 + 2x^2)'e^{-x+1} + (-x^3 + 2x^2)(e^{-x+1})' = (-3x^2 + 4x)e^{-x+1} - e^{-x+1}(-x^3 + 2x^2)$$

$$f'(x) = [(-3x^2 + 4x) - (-x^3 + 2x^2)]e^{-x+1} = (x^3 - 5x^2 + 4x)e^{-x+1} = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $x(x^2 - 5x + 4)$ لأن $e^{-x+1} > 0$

$$x(x^2 - 5x + 4) = 0 \text{ معناه } x = 0 \text{ أو } x = 1 \text{ أو } x = 4$$

إشارة $x(x^2 - 5x + 4)$ هي حسب الجدول التالي:

x	−∞		0	1	4	+∞	
x² − 5x + 4	+		+	0	−	0	+
x	−		0	+	+	+	
f '(x)	−		+	−	+		

وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$	0			1	4			$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	0		+
f(x)	$+\infty$	$\searrow$			$\nearrow$	$\searrow$			$\nearrow$
		f(0)			f(1)	f(4)			0

2) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

(T) له معادلة من الشكل : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ حيث $a = 2$

ومنه : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ أي $y = -4e^{-1}(x - 2) + 0$ وعليه : $y = -4e^{-1}(x - 2)$

3) دراسة اتجاه تغير الدالة h ثم استنتاج إشارة h(x)

لدينا: الدالة العددية والمعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي: $h(x) = x^2 e^{-x+2} - 4$.

ومنه $h'(x) = 2xe^{-x+2} - x^2 e^{-x+2} = (-x^2 + 2x)e^{-x+2}$

إشارة $h'(x)$ هي حسب إشارة $(-x^2 + 2x)$ لأن $e^{-x+1} > 0$

$(-x^2 + 2x) = 0$ معناه $x = 0$ أو $x = 2$ وإشارة $(-x^2 + 2x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	0	2	$+\infty$	
h'(x)	0	+	0	-

لدينا: $h(2) = 0$ أي أن الدالة h تقبل 0 كقيمة حدية عظمى وعليه يكون $h(x) \leq 0$

تحديد وضعية المنحنى (C_f) النسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$.

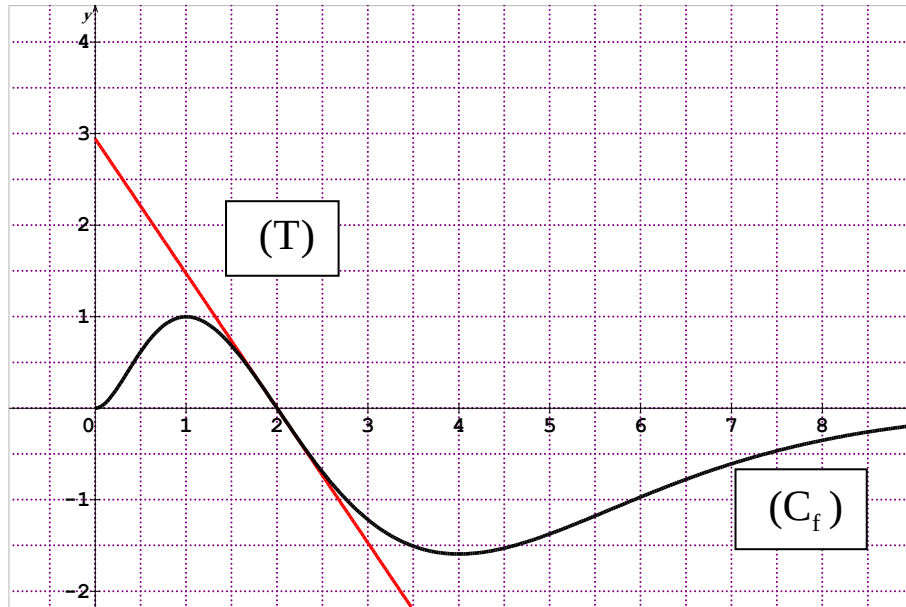
لتحديد وضعية (C_f) النسبة إلى (T) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ حيث $y = -4e^{-1}(x - 2)$

لدينا: $f(x) - y = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1} - 4e^{-1}(2 - x) = (2 - x)(x^2 e^{-x+2} - 4) = (2 - x)h(x)$

الجدول التالي يوضح وضعية (C_f) النسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$.

x	0	2	$+\infty$
h(x)	-	0	-
$2-x$	+	0	-
$(2-x)h(x)$	-	0	+
الوضعية	(T) تحت (C_f)	(T) فوق (C_f)	(T) يقطع (C_f)

3) رسم كلا من المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[0; +\infty[$.



5) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة (E).

لدينا: $f(x) = m(x - 2)$... (E) ومنه (E) تكافئ الجملة التالية

$$\begin{cases} y = m(x - 2) \dots (1) \\ y = f(x) \dots (2) \end{cases}$$

المعادلة (1) تعني ان جميع المستقيمات (Δ_m) ذات المعادلة $y = m(x - 2)$ تشمل نقطة وحيدة احداثيها $(2; 0)$ لانه من أجل كل عدد حقيقي m المعادلة (1) محققة من أجل $(x; y) = (2; 0)$ وعليه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (Δ_m) (مستقيم دوار يشمل النقطة التي احداثيها $(2; 0)$) ومن البيان نميز الحالات التالية:

(1) $m \leq -4e^{-1}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا أو $m > 0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .

(2) $-4e^{-1} < m < 0$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول. (3) $m = 0$ المعادلة تقبل حلين

6) تشكيل جدول تغيرات الدالة g.

لدينا : g الدالة العددية والمعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

* اتجاه تغير الدالة g : لدينا: $g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

$g'(x) = 0$ معناه $f'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ومعناه $x = 1$ أو $x = \frac{1}{4}$ وإشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة $f'(x)$

وعليه اتجاه تغير g يكون كمايلي:

(1) الدالة g تكون متناقصة تماما على المجال $\left]0; \frac{1}{4}\right[\cup]1; +\infty[$ لأن: $f'(x) > 0$

(2) الدالة g تكون متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ لأن: $f'(x) < 0$

* النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

x	0	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
g'(x)	-	0	+	0
g(x)	0		1	0

التمرين 37: دورة 2017 الاستثنائية

(1- I) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot e^{-t} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^{-x} = +\infty$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2 = e^{-x}(x+1)[2 - (x+1)] = -(x^2 - 1)e^{-x}$

من العبارة $f'(x) = -(x^2 - 1)e^{-x}$ فنستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $-(x^2 - 1)$

لدينا: $-(x^2 - 1) = 0$ معناه $x = -1$ أو $x = 1$ عليه اشارة $f'(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	0

تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	0
f(x)	$+\infty$	0	$4e^{-1}$	0

(3) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف و تعيين إحداثيهما.

(C_f) يقبل نقطتي إنعطاف معناه الدالة المشتقة f'' تنعدم عند قيمتين وتغير اشارتهما عندهما

لدينا: $f'(x) = -(x^2 - 1)e^{-x}$ ومنه $f''(x) = -[(2x)e^{-x} - e^{-x}(x^2 - 1)] = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$

$f''(x) = 0$ معناه $(x^2 - 2x - 1) = 0$ ومعناه $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ أو $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

وإشارة $f''(x)$ هي حسب $(x^2 - 2x - 1)$ وهي حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

مما سبق نستنتج أن (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف إحداثيهما: $(x_1; y_1)$ و $(x_2; y_2)$

حيث: $y_1 = (2 - \sqrt{2})^2 e^{\sqrt{2}-1}$ و $y_2 = (2 + \sqrt{2})^2 e^{-\sqrt{2}-1}$

حساب $f(-2)$ ورسم (C_f)

لدينا: $f(-2) = e^2$ ونلاحظ $f(0) = 1$ رسم (C_f) في آخر الحل

(II-1) إثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω وتعيين إحداثيهما.

لدينا: الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$ و (C_m) تمثيلها البياني جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة $\omega(x; y)$ معناه توجد ثنائية $(x; y)$ مستقلة عن m

نضع: $y = f(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x} \dots (e)$

المعادلة (e) تكافئ $mx e^{-x} + (x^2 + 1 - y) = 0$ وتكافئ $x = 0$ و $y = 1$

من أجل الثنائية $(x; y) = (0; 1)$ تكون المعادلة (e) محققة من أجل كل عدد حقيقي m وعليه جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة $\omega(0; 1)$.

(2) دراسة اتجاه تغير f_m .

لدينا: $f_m(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$

ومنه: $f'_m(x) = (2x + m)e^{-x} - (x^2 + mx + 1)e^{-x} = e^{-x} [-x^2 + (2 - m)x + m - 1]$

$f'_m(x) = 0$ معناه $[-x^2 + (2 - m)x + m - 1] = 0 \dots (*)$

لحل المعادلة (*) نستعمل المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = m^2$

ومنه المعادلة (*) تقبل حلين مهما يكن الوسيط الحقيقي m هما: 1 و $1 - m$

إشارة $f'_m(x)$ هي حسب إشارة العبارة $-x^2 + (2 - m)x + m - 1$

(1) من أجل $m = 0$ يكون لدينا $f'_0(x) = -(x - 1)^2 e^{-x} \leq 0$ أي الدالة f_m متناقصة

(2) من أجل $m \neq 0$ المعادلة (*) تقبل حلين مختلفين

الحالة 1: $m < 0$ يكون لدينا $f'_m(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; 1[\cup]1 - m; +\infty[$

ويكون لدينا $f'_m(x) > 0$ من أجل $x \in]1; 1 - m[$

وعليه f_m متناقصة تماما على $x \in]-\infty; 1[\cup]1 - m; +\infty[$ و متزايدة تماما على $]1; 1 - m[$

الحالة 2: $m > 0$ يكون لدينا $f'_m(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; 1 - m[\cup]1; +\infty[$

ويكون لدينا $f'_m(x) > 0$ من أجل $x \in]1 - m; 1[$

وعليه f_m متناقصة تماما على $x \in]-\infty; 1 - m[\cup]1; +\infty[$ و متزايدة تماما على $]1 - m; 1[$

استنتاج قيم m التي من أجلها تقبل f_m قيمتين حديتين و تعيينهما

الدالة f_m تقبل قيمتين حديتين معناه المعادلة $f'_m(x) = 0$ تقبل حلين متميزين أي $\Delta > 0$

$\Delta > 0$ معناه $m \neq 0$ ومعناه $x_1 = 1$ أو $x_2 = 1 - m$

ومنه f_m تقبل قيمتين حديتين احدهما: $(1; (m+2)e^{-1})$ و $(1-m; (-m+2)e^{m-1})$

(3) اثبات أنه عندما m يسمح $\mathbb{R}$ فإن M_m تنتمي إلى منحنى و تعينه.

لدينا M_m نقطة من (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m = 1 - m$

من أجل $x_m = 1 - m$ فإن $y_m = f(1 - m) = (-m + 2)e^{m-1}$

ومنه $M_m(x_m; y_m)$ حيث $y_m = (-m + 2)e^{m-1}$

أي M_m تنتمي إلى منحنى ذو المعادلة $y = (-x + 2)e^{x-1}$

(4) دراسة حسب قيم الوسيط m حيث $m \neq 2$ الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m)

لدراسة الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m) ندرس إشارة الفرق: $f_m(x) - f(x)$

لدينا: $f_m(x) - f(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x} - (x + 1)^2e^{-x} = (m - 2)xe^{-x}$

$f_m(x) - f(x) = 0$ معناه $x = 0$ أي (C) و (C_m) متقاطعان في النقطة $\omega(0; 1)$

لدراسة إشارة الفرق نميز حالتين:

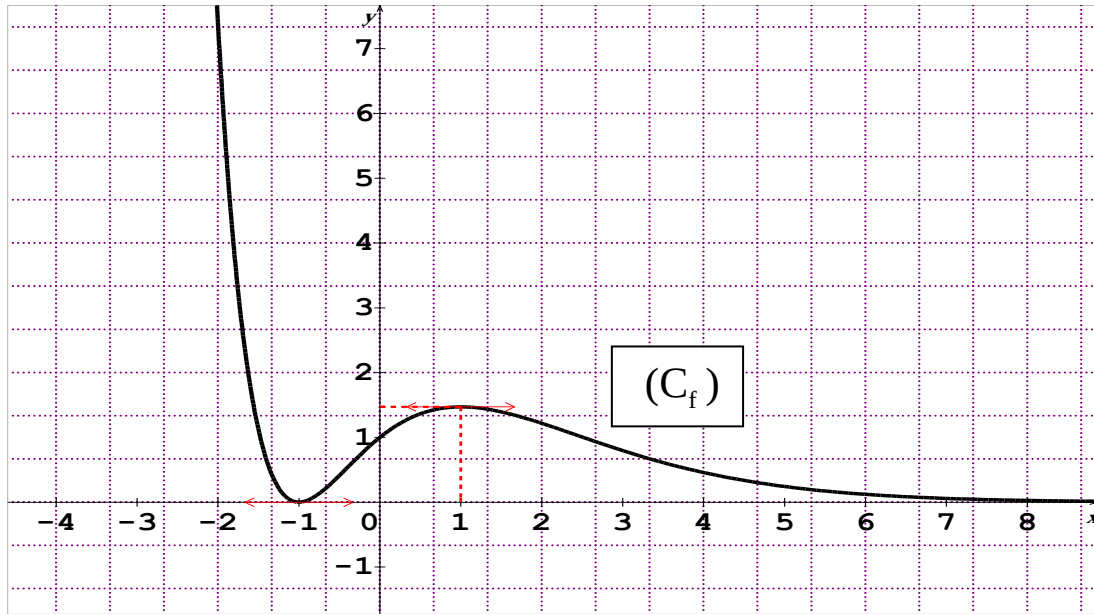
الحالة 1: $m < 2$ ويكون الفرق $f_m(x) - f(x) = (m - 2)xe^{-x}$ حسب إشارة x

من أجل $x < 0$ يكون (C) تحت (C_m) ومن أجل $x > 0$ يكون (C) فوق (C_m)

الحالة 2: $m > 2$ يكون الفرق $f_m(x) - f(x) = (m - 2)xe^{-x}$ حسب إشارة x

من أجل $x < 0$ يكون (C) فوق (C_m) ومن أجل $x > 0$ يكون (C) تحت (C_m)

إنشاء المنحنى (C_f)



التمرين 38: دورة جوان 2016

I-1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$

لدينا: الدالة φ معرفة على المجال $\mathbb{R}$ ب: $\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2)e^{-x+1} - 1 = -1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x+1} - 1 = +\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة φ و تشكيل جدول تغيراتها

من أجل كل $\varphi'(x) = (2x-1)e^{-x+1} - (x^2-x+1)(e^{-x+1}) = (-x^2+3x-2)e^{-x+1} : x \in \mathbb{R}$

إشارة $\varphi'(x)$ هي حسب إشارة $(-x^2+3x-2)$ لأن $e^{-x+1} > 0$

$(-x^2+3x-2) = 0$ معناه $x=1$ أو $x=2$ وإشارة $(-x^2+3x-2)$ هي حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$(-x^2 + 3x - 2)$		-	0	+	0	-
اتجاه تغير الدالة φ	متناقصة تماما		متزايدة تماما		متناقصة تماما	

2) تبين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha (\alpha \neq 1)$ والتحقق أن $2,79 < \alpha < 2,80$

الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على $]2; +\infty[$ و: $\varphi(2,79) = 0.0007$ و $\varphi(2,80) = -0.001$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $\varphi(\alpha) = 0$

3) استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

من الجواب السابق نستنتج المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلين هما 1 و α وإشارة $\varphi(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ فإن: $\varphi(x) > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $\varphi(x) < 0$

II-1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)e^{-x+1} = \lim_{y \rightarrow -\infty} -ye^{y+1} = 0$ نهاية شهيرة

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x) = 2e^{-x+1} - (2x-1)e^{-x+1} = e^{-x+1}(-2x+3)$ وإشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $(-2x+3)$

لأن $e^{-x+1} > 0$ وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	$f(\frac{3}{2})$	$-\infty$

2) تبين أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا معناه $f'(1) = g'(1)$

لدينا: $f'(x) = e^{-x+1}(-2x+3)$ ومنه $f'(1) = e^{-1+1}(-2 \cdot 1 + 3) = 1$

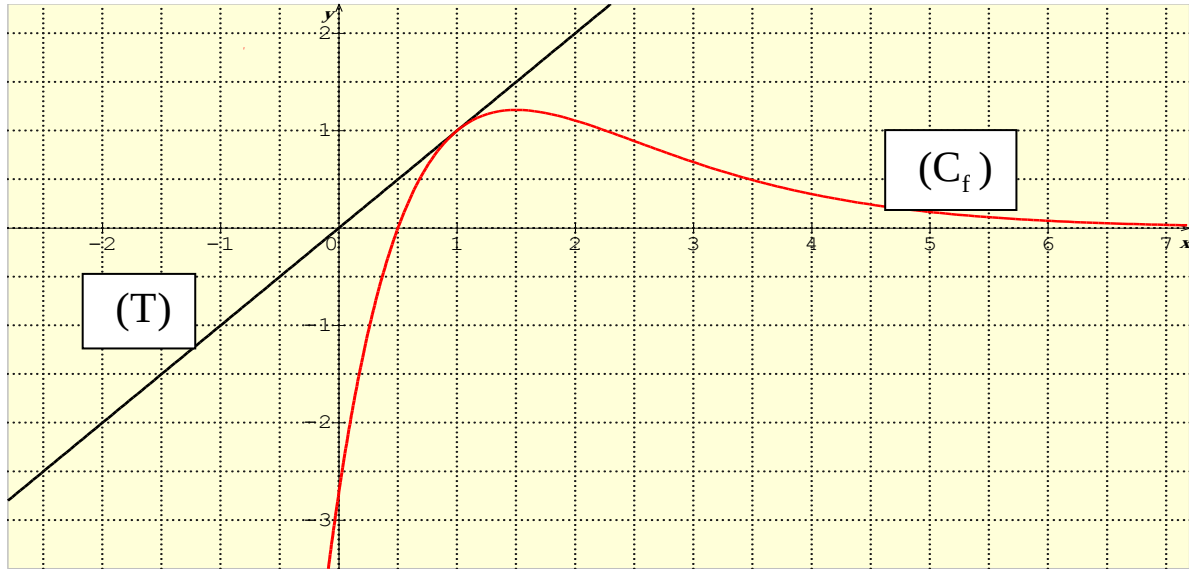
لدينا: $g'(x) = \frac{2(x^2-x+1) - (2x-1)^2}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2}$ ومنه $g'(1) = 1$

كتابة معادلة ديكرتية للمماس (T)

(T) له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

ومنه: $y = 1(x-1) + f(1)$ وعليه: $y = x$

3) رسم كلا من المماس (T) والمنحنى (C_f)



4-أ) تبين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$

$$f(x) - g(x) = (2x-1)e^{-x+1} - \frac{(2x-1)}{x^2-x+1} = \frac{(2x-1)(x^2-x+1)e^{-x+1} - 1}{x^2-x+1} = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$$

ب) دراسة إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ واستنتاج الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g)

إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ هي حسب إشارة $(2x-1)\varphi(x)$ لأن $x^2-x+1 > 0$

و الجدول التالي يلخص إشارة الفرق وكذا الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g)

X	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+	+
$\varphi(x)$	+	+	0	-
$(2x-1)\varphi(x)$	-	0	+	-
الوضع النسبي	(C_g) تحت (C_f)		(C_g) فوق (C_f)	
	(C_g) يقطع (C_f)		(C_g) يقطع (C_f)	

التمرين 39: دورة جوان 2015

1) دراسة استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)$ لدينا: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ والمعرفة على $] -\infty; 0[$ و $f(0) = 0$

f مستمرة عند 0 من اليسار معناه $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = -1 \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = -1 \cdot 0 = 0$

ومنه الدالة f مستمرة عند 0 من اليسار.

2) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وتفسير النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

لدينا: $u = \frac{1}{x}$ لدينا: $x \rightarrow 0$ وعليه $u \rightarrow -\infty$

ومنه: $\lim_{u \rightarrow -\infty} u \cdot e^u = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} (1-u)e^u = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^u - u \cdot e^u = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0 \text{ معناه } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

ومنه الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليسار أي المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة التي فاصلتها 0 يوزي حامل محور الفواصل.

3-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) \cdot e^0 = -\infty$$

ب) دراسة اتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ والمعرفة على $]-\infty; 0[$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} + (x-1) \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left[1 - \frac{(x-1)}{x^2}\right] = e^{\frac{1}{x}} \left[\frac{(x^2 - x + 1)}{x^2}\right]$$

$$f'(x) > 0 \text{ لأن } e^{\frac{1}{x}} > 0 \text{ و } \frac{(x^2 - x + 1)}{x^2} > 0 \text{ لأن } x^2 - x + 1 > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها. وعليه جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

x	$-\infty$	0
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	0

4-أ) تبين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ حالة عدم التعيين.

نفرض أن: $t = \frac{1}{x}$ حيث: $x \rightarrow -\infty$ و $t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t - 1} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{e^t - 1}{t - 1} - e^t \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t - 1} - 1 = 0$$

ب) استنتاج أن (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

من الجواب السابق لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$
ومنه المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ و $y = x$ معادلة له.

(5-) أ، حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

لدينا: معرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كمايلي: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1: \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{1}{x}) e^{\frac{1}{x}} = 1$$

(ب) دراسة اتجاه تغير g وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: معرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كمايلي: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - 1 \cdot f(x)}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \left[\frac{(x^2 - x + 1)}{x} \right] - (x - 1)e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$$g'(x) < 0 \text{ لأن } x^3 < 0 \text{ و } e^{\frac{1}{x}} > 0$$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على مجال تعريفها. وعليه جدول تغيرات الدالة g كمايلي:

x	$-\infty$	0
$g'(x)$		-
$g(x)$	1	0

ملاحظة: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ من الجواب 2.

(6-) أ، تبين أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ ، $f(x) > x$.

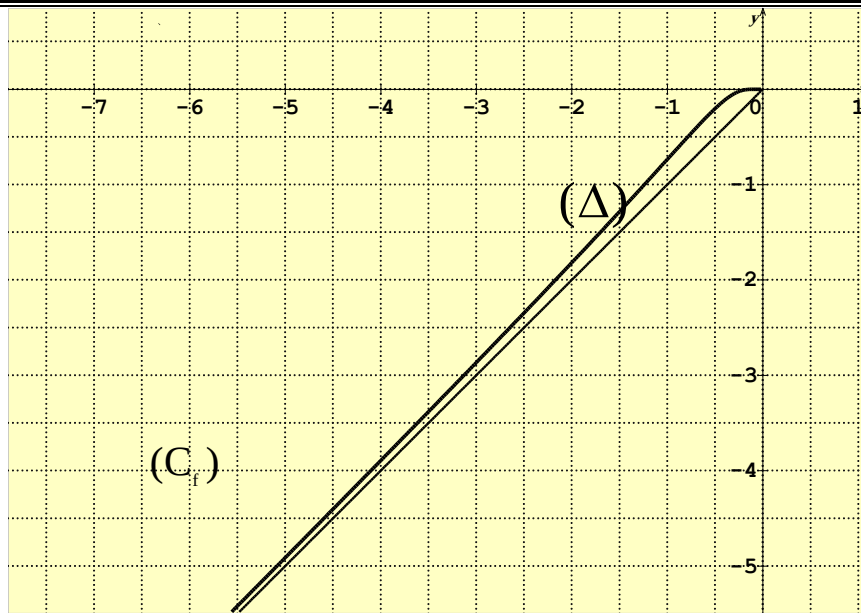
من الجواب السابق لدينا: $0 < g(x) < 1$ أنظر جدول تغيرات الدالة g

$$\text{ومنه: } 0 < \frac{f(x)}{x} < 1 \text{ أي } 0 < f(x) < x \text{ لأن } x \text{ سالب تماما. وعليه } f(x) > x$$

(ب) استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

من الجواب السابق لدينا: $f(x) > x$ أي $f(x) - x > 0$ وعليه يكون (C_f) فوق المستقيم (Δ) .

(ج) إنشاء المنحنى (C_f)



(8)-أ) حساب $h'_m(x)$.

لدينا $h_m(x)$ دالة معرفة على المجال $]-\infty; 0[$ حيث: $h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$

لدينا: $h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$ ومنه $h'_m(x) = e^{\frac{1}{x}} + x(-\frac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}} - x = \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}} - mx}{x}$

(ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$

$$\begin{cases} y = mx \\ y = f(x) \end{cases} \quad h'_m(x) = 0 \text{ معناه } (x-1)e^{\frac{1}{x}} = mx \text{ ومنه } mx = f(x) \text{ والتي تكافئ}$$

باستعمال المنحنى (C_f) نستنتج أن حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$ أي $mx = f(x)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم الدوار الذي معادلته $y = mx$ من البيان نميز الحالات التالية:

(1) $m \in]0; 1[$ المعادلة $h'_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty; 0[$

(2) $m \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$ المعادلة $h'_m(x) = 0$ لا تقبل حولا .

التمرين 40: دورة جوان 2014

(I) 1-دراسة تغيرات الدالة g .

لدينا: الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (2-x)e^x - 1$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2e^x - xe^x - 1] = -1$

اتجاه التغير:

حساب المشتق ودراسة اشارته

لدينا: $g'(x) = (-1+2-x)e^x = (1-x)e^x$

إشارة $g'(x) = (1-x)e^x$ هي نفس إشارة $1-x$

لأن $e^x > 0$ وعليه التغيرات يكون كما يلي

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-1	$e-1$	$-\infty$

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

2- تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث: $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$.

* الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $[1; +\infty[$ و $g(1.8) \times g(1.9) = (0.21)(-0.33) < 0$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة β تحقق: $g(\beta) = 0$

* الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty; 1[$ و $g(-1.2) \times g(-1.1) = (-0.036)(0.032) < 0$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	-

3- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

من الجواب السابق نستنتج المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلين هما β و α وإشارة $\phi(x)$ هي

حسب الجدول التالي:

II-1- حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ وتفسير النتيجة هندسيا.

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)}{(e^x - x)} \quad \text{بـ } \mathbb{R} \text{ دالة معرفة على}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}} = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

• (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين $y = 0$ و $y = 1$.

2) تبيان أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ واستنتاج اتجاه تغير f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	1

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$$

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ نستنتج أن

إشارة الدالة المشتقة f' تتبع إشارة $g(x)$.

• جدول تغيرات الدالة:

3) تبيان أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ واستنتاج حصر اللعدين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

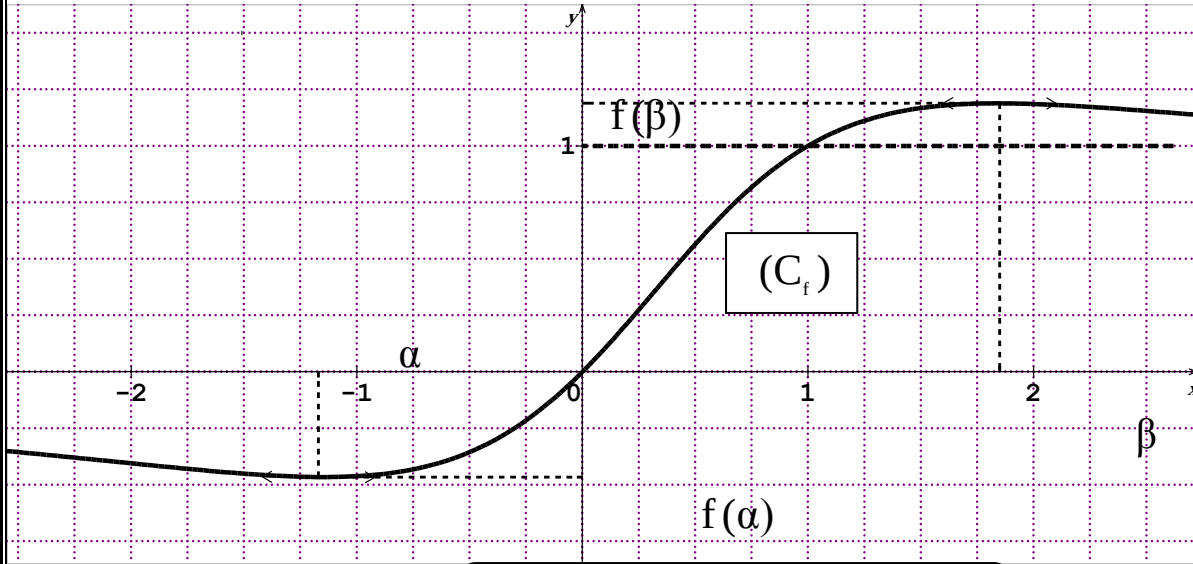
$$\text{لدينا: } g(\alpha) = 0 \quad \text{ومنه} \quad e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha} \quad \text{وعليه} \quad \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{1}{(\alpha - 1)^2} = \frac{1}{1 - 2\alpha + \alpha^2} = f(\alpha)$$

$$-1,2 < \alpha < -1,1 \quad \text{ومنه} \quad -2,2 < \alpha - 1 < -2,1 \quad \text{ومنه} \quad \frac{1}{-1,1} < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{-2,1} \quad \text{أي} \quad -0,48 < f(\alpha) < -0,45$$

$$1,8 < \beta < 1,9 \quad \text{ومنه} \quad 0,8 < \beta - 1 < 0,9 \quad \text{ومنه} \quad \frac{1}{0,9} < \frac{1}{\beta - 1} < \frac{1}{0,8} \quad \text{أي} \quad 1,11 < f(\beta) < 1,25$$

4) حساب $f(1)$ ، ثم رسم المنحنى (C_f) .

$$f(1) = 1$$



التمرين 41: دورة جوان 2013

I-1-أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{e^x} \right] = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 e^{-x}] = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 e^{-x}] = +\infty$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها

حساب المشتق ودراسة اشارته

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0

حساب المشتق ودراسته اشارة

$g'(x) = (2x)e^{-x} - (x^2 - 1)e^{-x} = (-x^2 + 2x + 1)e^{-x}$

اشارة $g'(x)$ من اشارة $(-x^2 + 2x + 1)$ لان $e^{-x} > 0$

$$g'(x) = (2x)e^{-x} - (x^2 - 1)e^{-x} = (-x^2 + 2x + 1)e^{-x}$$

اشارة $g'(x)$ من اشارة $(-x^2 + 2x + 1)$ لأن $e^{-x} > 0$

$(-x^2 + 2x + 1) = 0$ معناه $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ أو $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ وهي حسب الجدول اعلاه

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$	$g(x_2)$	$g(x_1)$	1	

جدول تغيرات g يكون كمايلي

2-أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

* الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty; x_2[$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ و $g(x_2) = -0,25$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α تحقق $g(\alpha) = 0$

* الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]x_2; x_1[$ و $g(x_2) = -0,25$ و $g(x_1) = 1,43$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة β تحقق $g(\beta) = 0$

التحقق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا معدوما لأن: $g(0) = 0$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$ لأن: $g(-0,8) \times g(-0,7) < 0$

ب- استنتاج اشارة $g(x)$ ، حسب قيم العدد الحقيقي x .

من الجواب السابق نستنتج ان اشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[$ فإن: $g(x) > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; 0[$ فإن: $g(x) < 0$

II-1-أ- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 e^{-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{e^x} \right] = 0 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty$$

ب-تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 e^{-x} = 0 \text{ ومنه } (C_f) \text{ يقبل مقارب مائل } (\Delta) \text{ عند } -\infty \text{ و } y = x \text{ معادلة له.}$$

ج-دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

لدينا: $f(x) - x < 0$ لأن $f(x) - x = -(x+1)^2 e^{-x} < 0$ وعليه يكون (C_f) تحت (Δ) .

2-أ-تبيان أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 1 - 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = 1 + (x^2 - 1)e^{-x} = g(x)$$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$f(\alpha)$	-1	$+\infty$

ب-تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

من العبارة $f'(x) = g(x)$ نستنتج أن اشارة

$f'(x)$ تتبع اشارة $g(x)$ وعليه جدول

تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

3-أ-تبيان أن (C_f) يقبل مماسين ، معمل توجهه كل منهما يساوي 1 يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

(C_f) يقبل مماسين ، معمل توجهه كل منهما يساوي 1 معناه المعادلة $f'(a) = 1$ تقبل حلين متميزين

$f'(a) = 1$ تكافئ $g(a) = 0$ وتكافئ $(a^2 - 1)e^{-a} = 0$ أي $a = 1$ أو $a = -1$ لأن $e^{-a} > 0$

كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $a = 1$

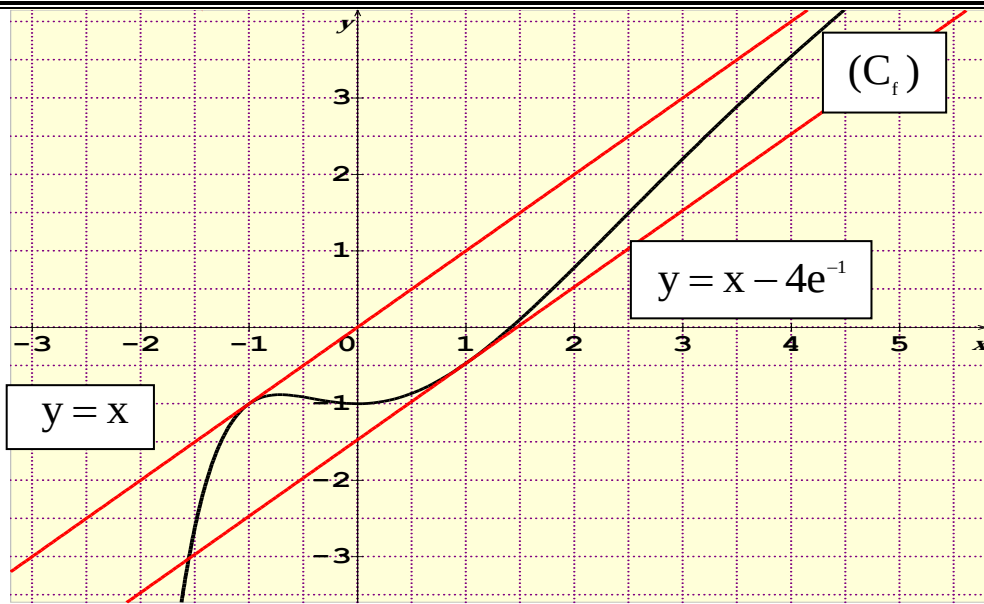
المماس له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

ومنه : $y = 1(x - 1) + f(1)$ وعليه: $y = x - 4e^{-1}$

كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $a = -1$

المماس له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

ومنه : $y = 1(x + 1) + f(-1)$ وعليه: $y = x$



ج- المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$

المعادلة: $(x+1)^2 + me^x = 0$ تكافئ $m = (x+1)^2 e^{-x}$ وتكافئ $x + m = f(x)$ أي $\begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (D_m) ذو المعادلة: $y = x + m$ والذي له

نفس المنحنى مع حامل المماسين والمستقيم (Δ) ومن البيان نميز الحالات التالية :

- 1) إذا كانت $m < -4e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا تماما.
- 2) إذا كانت $m = -4e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب وآخر مضاعف موجب
- 3) إذا كانت $-4e^{-1} < m < -1$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب تماما.
- 4) إذا كانت $m = -1$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة وحل معدوم.
- 5) إذا كانت $-1 < m < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين وحل موجب تماما.
- 6) إذا كانت $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حل مضاعف سالب.
- 7) إذا كانت $m > 0$ فإن المعادلة لاتقبل حلول .

التمرين 42: دورة جوان 2012

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = 2 - xe^x$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - [xe^x] = 2$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0$ نهاية شهيرة و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

اتجاه التغير: حساب المشتق ودراسة اشارته

اشارة $g'(x) = (-1)e^x - (x)e^x = -(1+x)e^x$

$g'(x) = -(1+x)e^x$ هي نفس اشارة $-(1+x)$

لأن $e^x > 0$ والموضحة في الجدول المقابل

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$

جدول تغيرات g يكون كمايلي

2-تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل

حالا وحيدا α حيث $0,8 < \alpha < 0,9$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	2	$g(-1)$	$-\infty$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $[-1; +\infty[$ و $g(0.8) \times g(0.9) = (0.21)(-0.21) < 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$

3) تعين حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

من الجواب السابق نستنتج ان إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ فإن $g(x) > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن $g(x) < 0$

1-II) تبيان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم تفسير النتيجة بيانيا.

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{e^x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^{-x} + 2e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ معناه (C_f) يقبل مقارب يوازي حامل محور الفواصل و $y = 0$ معادلة له.

2) أ-حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2}{e^x+2} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+2) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x+2) = 2$$

ب-تبيان أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة: $y = x + 1$ مقارب لـ (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^x}{e^x+2} = 0 \text{ ومنه } (C_f) \text{ يقبل مقارب مائل } (\Delta') \text{ عند } -\infty \text{ و } y = x + 1 \text{ معادلة له}$$

3) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		0	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ) (C_f) تحت (Δ)	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
-x		0	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ) (C_f) تحت (Δ)	

$$[f(x) - x] = \frac{2 - xe^x}{e^x + 2} = \frac{g(x)}{e^x + 2} *$$

الفرق هي حسب إشارة $g(x)$ الموضحة في

جد 3) ووضعية لـ (C_f) بالنسبة (Δ) تكون

حسب الجدول التالي:

$$[f(x) - (x+1)] = \frac{-xe^x}{e^x + 2} *$$

هي حسب إشارة $-x$ ووضعية لـ (C_f) بالنسبة

(Δ') تكون حسب الجدول التالي:

4-تبيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 2)^2}$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = \frac{2(e^x + 2) - e^x(2x + 2)}{(e^x + 2)^2} = \frac{2(2 - xe^x)}{(e^x + 2)^2} = \frac{2g(x)}{(e^x + 2)^2}$$

من عبارة $f'(x)$ نستنتج ان اشارته هي حسب اشارة $g(x)$ والموضحة في جـ3)

ب-تبيّن أن $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	α	0

* لدينا : $f(\alpha) = \frac{2\alpha + 2}{e^\alpha + 2}$ ولدينا أيضا:

$$g(\alpha) = 2 - \alpha e^\alpha = 0 \quad (\text{من الجواب 2})$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha + 2}{\frac{2}{\alpha} + 2} = \frac{(\alpha + 1)\alpha}{(\alpha + 1)} = \alpha \quad \text{أي } e^\alpha = \frac{2}{\alpha} \text{ ومنه:}$$

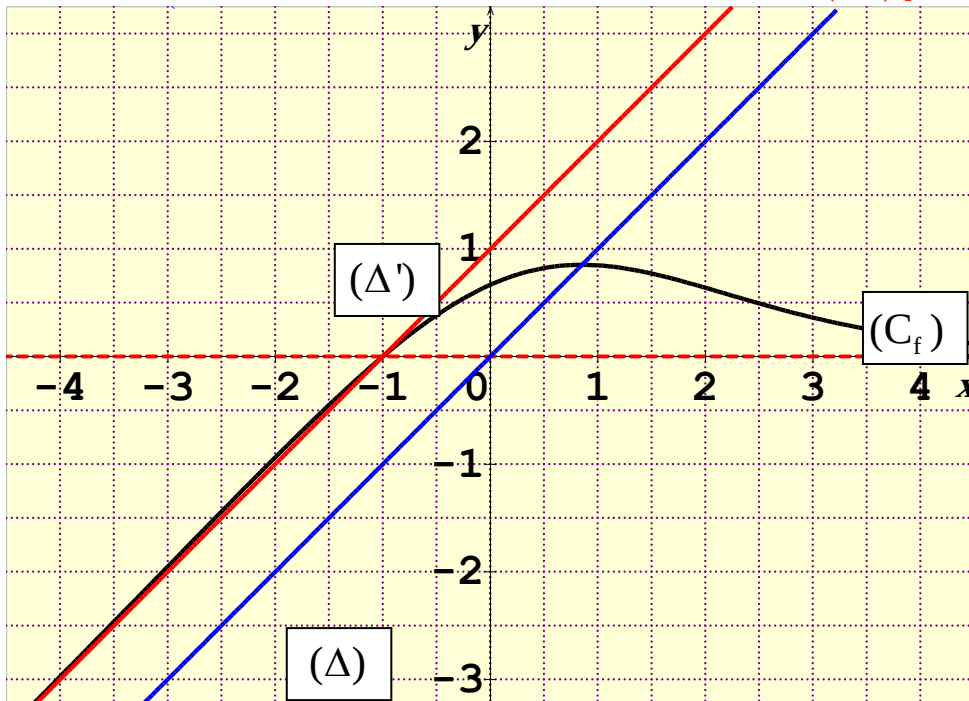
6) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

المعادلة: $f(x) = f(m)$ تكافئ الجملة التالية $\begin{cases} y = f(m) \\ y = f(x) \end{cases}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (D_m) ذو المعادلة: $y = f(m)$ والذي له نفس المنحى مع حامل الفواصل من البيان نميز الحالات التالية :

- 1) إذا كانت $m \in]-\infty; -1[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .
- 2) إذا كانت $m \in]-1; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين
- 3) إذا كانت $m = \alpha$ فإن المعادلة تقبل مضاعف.

5) رسم (Δ) و (Δ') و (C_f) .



التمرين 43: دورة جوان 2010

I-1) دراسة تغيرات الدالة g.

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (3-x)e^x - 3$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x)e^x - 3 = -3$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0$ نهاية شهيرة و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

اتجاه التغير:

حساب المشتق ودراسة اشارته

لدينا: $g'(x) = (-1)e^x + (3-x)e^x = (2-x)e^x$

إشارة $g'(x) = (2-x)e^x$ هي نفس إشارة $(2-x)$

لأن $e^x > 0$ والموضحة في الجدول المقابل
جدول تغيرات g يكون كمايلي

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	-

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	-3	$g(2)$	$-\infty$

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما معدوم والآخر $\alpha \in]2,82; 2,83[$

* المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا معدوما لأن: $g(0) = 0$

* الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]2; +\infty[$ و $g(2.82) \times g(2.83) < 0$
وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$

3) استنتاج إشارة g(x) حسب قيم x

من الجواب السابق نستنتج ان إشارة g(x) هي:

من أجل كل $x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن $g(x) > 0$

II-1) تبين أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

$$f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ ب: } \begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$ معناه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = L$ حيث L عدد حقيقي ثابت

لدينا: $0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ لاحظ أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ شهيرة

كتابة معادلة لـ (T) ماس (C_f) عند O

المماس له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ نلاحظ أن $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ ومنه : $y = 0(x - 0) + f(0)$ وعليه: $y = 0$ حامل محور الفواصل.

(2) **أثبتان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم إيجاد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$**

* نضع $y = -x$: ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} -(y^3 e^y) = 0$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 0$ وذلك باستعمال النتيجة السابقة و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = +\infty$

(ب) **تبيان أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$**

$$f'(x) = \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2[(3e^x - 3 - e^x)]}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2 \cdot g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

(ج) **التحقق أن: $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ، ثم تعيين حصره.**

* لدينا: $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{e^\alpha - 1}$ ولدينا من جهة أخرى $g(\alpha) = (3 - \alpha)e^\alpha - 3 = 0$ ومعناه $e^\alpha = -\frac{3}{\alpha - 3}$

$$\text{ومنه: } f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{-\frac{3}{\alpha - 3} - 1} = \frac{\alpha^3(\alpha - 3)}{\alpha} = \alpha^2(3 - \alpha)$$

* **تعيين الحصر:**

لدينا: $\alpha^2 \in]2,82; 2,83[\dots (1)$ تكافئ $\alpha \in]7,95; 8,00[$

لدينا: $3 - \alpha \in]0,17; 0,18[\dots (2)$ تكافئ $\alpha \in]2,82; 2,83[$

من (1) و (2) نجد: $f(\alpha) \in]1,35; 1,44[$

(د) **إنشاء جدول تغيرات f**

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$		$f(\alpha)$	

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 0 0 0

من العبارة $f'(x) = \frac{x^2 \cdot g(x)}{(e^x - 1)^2}$ نستنتج ان إشارة

$f'(x)$ تتبع إشارة $g(x)$ والموضحة في ج(3).
وعليه جدول تغيرات يكون كمايلي:

(3) **حساب $f(x) + x^3$ واستنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C)**

$$f(x) + x^3 = \frac{x^3}{e^x - 1} + x^3 = \frac{x^3(e^x)}{e^x - 1}$$

لدراسة الوضعية النسبية (C_f) و (C) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - (-x^3) = \frac{x^3(e^x)}{e^x - 1}$

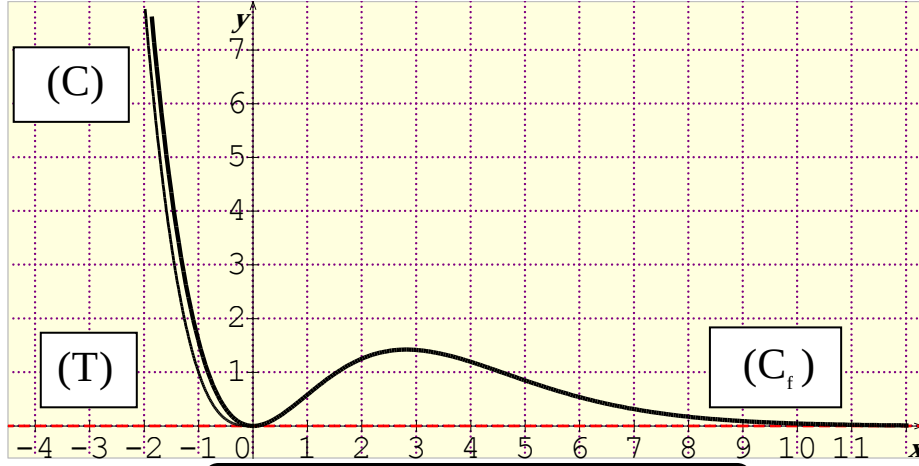
إشارة الفرق هي حسب إشارة $x(e^x - 1)$ ونلاحظ ان $x(e^x - 1) \geq 0$ وعليه يكون (C_f) فوق (C)

(4) **تبيان أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ وتفسير النتيجة هندسيا.**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3(e^x) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(e^x)}{e^x - 1} = 0$$

مقارب للمنحى لـ (C_f) في جوار $-\infty$.
 معناه $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x^3)] = 0$ ومنحنى الدالة $x \rightarrow -x^3$ منحنى

5) إنشاء في نفس المعلم المماس (T) و (C_f) و (C)



التمرين 44: دورة جوان 2008

I-1) دراسة تغيرات الدالة f

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \text{ بـ } \mathbb{R}$$

$$\text{النهايات: } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0$$

اتجاه التغير وجدول التغيرات

حساب المشتق ودراسة اشارته

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ معناه } (e^x - 1)^2 = 0 \text{ أي } x = 0$$

$$\text{نلاحظ } f'(x) \geq 0 \text{ لأن } (e^x - 1)^2 \geq 0$$

2) تبين ان (C_f) يقبل نقط إنعطاف ω وكتابة معادلة المماس (C_f) عند ω .

* (C_f) يقبل نقط إنعطاف ω معناه الدالة المشتقة f' تنعدم عند قيمة x_0 وتحافظ على اشارتها

من خلال جدول التغيرات للدالة f نلاحظ $f'(x) \geq 0$ تنعدم عند 0 و $f'(x) \geq 0$

ومنه (C_f) يقبل نقط إنعطاف $\omega(0;1)$.

* كتابة معادلة المماس (C_f) عند ω .

المماس له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ومنه: $y = 0(x - 0) + f(0)$ وعليه: $y = 1$.

* تبين أن ω مركز تناظر لـ (C_f)

$f(-x) + f(x) = 2$: $-x \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}$ معنى من أجل كل (C_f)

$$f(-x) + f(x) = -x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1} + x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} = -2 + \frac{4e^x}{e^x + 1} + \frac{4}{e^x + 1} = -2 + \frac{4(e^x + 1)}{e^x + 1} = 2$$

3) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)]$ واستنتاج أن (C_f) يقبل مقاربين

$$y = x - 1 : \text{معناه } (C_f) \text{ يقبل مقارب مائل معادلته } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0^*$$

$$y = x + 3 : \text{معناه } (C_f) \text{ يقبل مقارب مائل معادلته } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4e^x}{e^x + 1} = 0^*$$

4) تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $[-2,77; -2,76]$ $x_0 \in$

f مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $f(-2.77) \times g(-2.76) < 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة x_0 تحقق: $f(x_0) = 0$ معناه (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة x_0

* حساب $f(1)$ و $f(-1)$ ورسم (C_f) الرسم يكون آخر الحل

$$f(1) = \frac{4}{e - 1} \text{ و } f(-1) = -2 + \frac{4e}{e + 1}$$

II) 1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) = f(-x)$

$$g \text{ دالة عددية معرفة على } \mathbb{R} : g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$$

$$\text{لدينا: } f(-x) = -x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1} = -x + 3 + \frac{4e^x}{e^x + 1} - 4 = -x + 3 + \frac{4e^x - 4e^x - 4}{e^x + 1} = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1} = g(x)$$

2) انشاء (C_g) في نفس المعلم السابق (دون دراسة g).

من العبارة $g(x) = f(-x)$ نستنتج أن (C_g) هو نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الترتيب

