

# مجلة المفيد في الرياضيات

لتلاميذ بكالوريا 2025 شعب علمية



## الدوال العددية



- ملخص الدرس
- تمارين محلولة
- تمارين مقترحة

للأستاذ بلجودي حمو

# النهايات

## بعض نهايات الدوال المرجعية:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

## ❖ نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ و $-\infty$ :

لحساب النهاية عند  $+\infty$  و  $-\infty$  لدالة كثير حدود نحسب نهاية حدها الأعلى درجة عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

## ❖ نهاية دالة ناطقة:

### ✓ نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و $-\infty$ :

لحساب النهاية عند  $+\infty$  و  $-\infty$  لدالة ناطقة نحسب نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند  $+\infty$  و  $-\infty$ . نحصل بعد الاختزال على ثلاث حالات حسب درجة البسط و المقام:

### ✓ نهاية دالة ناطقة عند عدد حقيقي $a$ :

لحساب نهاية دالة ناطقة عند عدد حقيقي نعوض  $a$  مباشرة في عبارة الدالة.

## ❖ المستقيمات المقاربة:

### ✓ المستقيم المقارب الأفقي:

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = a$  أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = a$  فإن منحنى الدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته  $y = a$ .

### ✓ المستقيم المقارب العمودي:

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  فإن منحنى الدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته  $x = a$ .

### ✓ المستقيم المقارب المائل:

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  فإن منحنى الدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته  $y = ax + b$  بجوار  $(-\infty)$  و  $+\infty$ .

## ✓ دراسة الوضع النسبي لـ $(C_f)$ منحنى الدالة $f$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$ :

لدراسة الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  ندرس إشارة  $[f(x) - (ax + b)]$ :

• إذا كان  $[f(x) - (ax + b)] < 0$  فإن  $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$ .

• إذا كان  $[f(x) - (ax + b)] > 0$  فإن  $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$ .

• إذا كان  $[f(x) - (ax + b)] = 0$  فإن  $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$ .

## ✓ المنحنيان المتقاربان:

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$  أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$  فإن منحنى الدالة  $f$  و منحنى الدالة  $g$  متقاربان بجوار  $(-\infty)$  و  $+\infty$ .

## ✓ دراسة الوضع النسبي للمنحنيان

لدراسة الوضع النسبي للمنحنيان  $(C_f)$  و  $(C_g)$  الممثلان للدالتين  $f$  و  $g$  ندرس إشارة  $[f(x) - g(x)]$ :

• إذا كان  $[f(x) - g(x)] < 0$  يكون  $(C_f)$  تحت  $(C_g)$ .

• إذا كان  $[f(x) - g(x)] > 0$  يكون  $(C_f)$  فوق  $(C_g)$ .

• إذا كان  $[f(x) - g(x)] = 0$  يكون  $(C_f)$  يقطع  $(C_g)$ .

## ❖ نهاية دالة مركبة

$a, b, c$  و  $u, v, f$  تمثل أعدادا حقيقية أو  $+\infty$  أو  $-\infty$ ، و  $f = v \circ u$  حيث

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \text{ و إذا كانت } \lim_{x \rightarrow b} v(x) = c \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

## ❖ النهايات بالمقارنة

✓ إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$  و كان  $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

# الإستمرارية

❖ الاستمرارية:

✓ الاستمرارية عند عدد :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  : الدالة  $f$  مستمرة عند  $a$  معناه :  $f$  دالة مجموعة تعريفها  $D$  و  $a$  عدد حقيقي غير معزول من  $D$ .

✓ الاستمرارية على مجال :

•  $f$  مستمرة على مجال  $I$  يعني أن  $f$  مستمرة عند كل عدد حقيقي من  $I$ .

• هندسياً: تكون الدالة  $f$  مستمرة على مجال  $I$  عندما يمكن رسم منحنيتها البياني على هذا المجال دون رفع القلم.

## مبرهنة القيم المتوسطة

❖ مبرهنة القيم المتوسطة

❖ طرق:

1. لإثبات وجود حلول المعادلة  $f(x) = k$  على مجال  $[a; b]$  باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

✓ نتحقق من استمرارية الدالة  $f$  على المجال  $[a; b]$ .

✓ نتحقق من أن العدد  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$ .

2. لإثبات وجود حلول المعادلة  $f(x) = 0$  على مجال  $[a; b]$  باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

✓ نتحقق من استمرارية الدالة  $f$  على المجال  $[a; b]$ .

✓ نتحقق من أن  $f(a) \times f(b) < 0$ .

3. لإثبات أن المعادلة  $f(x) = k$  تقبل حلاً وحيداً على مجال  $[a; b]$  باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

✓ نتحقق أن الدالة  $f$  مستمرة و رتيبة تماماً على المجال  $[a; b]$ .

✓ نتحقق من أن العدد  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$ .

4. لإثبات أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً على مجال  $[a; b]$  باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

✓ نتحقق أن الدالة  $f$  مستمرة و رتيبة تماماً على المجال  $[a; b]$ .

✓ نتحقق من أن  $f(a) \times f(b) < 0$ .

# الإشتقاق

## العدد المشتق - الدالة المشتقة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $R$  .  $a$  و  $a+h$  عدنان حقيقيان من  $I$  مع  $h \neq 0$  .  
 نقول أن  $f$  تقبل الاشتقاق عند  $a$  إذا قبلت النسبة  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  نهاية محدودة لما يؤول  $h$  إلى 0.  
 تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $a$  و نرمز لها بالرمز  $f'(a)$ .

## مماس منحنى دالة

معادلته:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

## مشتقات دوال مألوفة

| $f(x)$                                    | $f'(x)$               | مجالات قابلية الاشتقاق          |
|-------------------------------------------|-----------------------|---------------------------------|
| $k$ (حيث $k$ ثابت حقيقي)                  | 0                     | $R$                             |
| $x$                                       | 1                     | $R$                             |
| $x^n$ ( $n \geq 2$ و $n \in \mathbb{Z}$ ) | $nx^{n-1}$            | $R$                             |
| $\frac{1}{x}$                             | $-\frac{1}{x^2}$      | $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ |
| $\sqrt{x}$                                | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0; +\infty[$                  |
| $\cos x$                                  | $-\sin x$             | $R$                             |
| $\sin x$                                  | $\cos x$              | $R$                             |

## المشتقات والعمليات على الدوال

$u$  و  $v$  دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال  $I$  من  $R$  و  $k$  عدد حقيقي.

| الدالة  | $u+v$     | $ku$  | $uv$        | $\frac{1}{v}$     | $\frac{u}{v}$ (الدالة $v$ لا تنعدم على $I$ ) |
|---------|-----------|-------|-------------|-------------------|----------------------------------------------|
| المشتقة | $u' + v'$ | $ku'$ | $u'v + v'u$ | $-\frac{v'}{v^2}$ | $\frac{u'v - v'u}{v^2}$                      |

## طريقة:

لدراسة قابلية اشتقاق دالة  $f$  عند  $a$  ندرس نهاية النسبة  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  لما يؤول  $h$  إلى 0.

- إذا كانت منتهية (و لتكن  $l$ ) فإن  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $a$  و المنحني  $(C_f)$  الممثل للدالة  $f$  يقبل عند النقطة ذات الفاصلة  $a$  مماسا  
 معامل توجيهه  $l$ .

- إذا كانت غير منتهية فإن  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $a$  و المنحني  $(C_f)$  الممثل للدالة  $f$  يقبل عند النقطة ذات الفاصلة  $a$  مماسا موازيا  
 لحامل محور الترتيب.

❖ دراسة تغيرات دالة :

لدراسة تغيرات الدالة  $f$  نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نحسب نهايات الدالة عند الاطراف المفتوحة لمجالات تعريفها .
- ✓ نحسب  $f'$  الدالة المشتقة للدالة  $f$  ثم ندرس اشارة  $f'(x)$  و نستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  .
- ✓ نشكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

❖ معادلة المماس:

✓ كتابة معادلة المماس عند نقطة فاصلتها معطاة و لتكن  $x_0$

نقوم بحساب  $f'(x_0)$  و  $f(x_0)$  ثم نطبق الدستور التالي :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  .

✓ كتابة معادلة المماس معامل توجيهه معطى و ليكن  $a$

نبحث عن  $x_0$  بحل المعادلة  $f'(x_0) = a$  . ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند  $x_0$  كما في الطريقة الأولى .

✓ كتابة معادلة مماس أفقى :

نبحث  $x_0$  بحل المعادلة  $f'(x_0) = 0$  . ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند  $x_0$  كما في الطريقة الأولى .

✓ كتابة معادلة المماس الموازي لمستقيم (  $\Delta$  ) الذي معادلته  $y = ax + b$

نبحث عن  $x_0$  بحل المعادلة  $f'(x_0) = a$  . ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند  $x_0$  كما في الطريقة الأولى .

✓ كتابة معادلة المماس العمودي على المستقيم (  $\Delta$  ) الذي معادلته  $y = ax + b$

نبحث عن  $x_0$  بحل المعادلة  $a \times f'(x_0) = -1$  . ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند  $x_0$  كما في الطريقة الأولى .

❖ شفعية دالة:

✓ تبين أن الدالة  $f$  زوجية :

نبين انه من اجل  $x$  كل من  $D_f$  ،  $D_f$  و  $f(-x) = f(x)$  .

✓ تبين أن الدالة  $f$  فردية :

نبين انه من اجل  $x$  كل من  $D_f$  ،  $D_f$  و  $f(-x) = -f(x)$  .

❖ مركز التناظر

لتبين أن النقطة  $W(a; b)$  هي مركز تناظر لمنحني الدالة  $f$  :

نبين انه من اجل  $x$  كل من  $D_f$  ،  $D_f$  و  $f(2a - x) + f(x) = 2b$  .

❖ محور التناظر

لتبين أن النقطة المستقيم ذو المعادلة  $x = a$  هو محور تناظر لمنحني الدالة  $f$  :

نبين انه من اجل كل  $x$  من  $D_f$  ،  $D_f$  و  $f(2a - x) = f(x)$  .

❖ نقاط التقاطع مع المحورين

✓ مع حامل محور الفواصل ( $xx'$ )

لتعيين نقاط تقاطع ( $C_f$ ) منحني الدالة  $f$  مع حامل محور الفواصل ( $xx'$ ) نقوم بحل المعادلة  $f(x) = 0$  . و تكون حلول المعادلة

$f(x) = 0$  هي فواصل نقط تقاطع ( $C_f$ ) مع محور الفواصل ( $xx'$ ) و التي تراتيبها معدومة .

✓ مع حامل محور الترتيب ( $yy'$ )

$f$  دالة معرفة على مجال يحوي القيمة 0 .

لتعيين نقطة تقاطع ( $C_f$ ) منحني الدالة  $f$  مع حامل محور الترتيب ( $yy'$ ) نقوم بحساب  $f(0)$

# تمارين محلولة

## التمرين -1-

$f$  دالة عددية للمتغير الحقيقي  $x$  مجموعة تعريفها  $D_f$ .

- احسب نهايات الدالة  $f$  عند الأطراف المفتوحة لمجال التعريف في كل حالة من الحالات التالية :

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} \bullet 1$$

|                      |                                        |
|----------------------|----------------------------------------|
| $D_f = R - \{-1\}$   | $f(x) = \frac{2x-3}{x+1} \bullet 2$    |
| $D_f = R - \{-1;1\}$ | $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-1} \bullet 3$  |
| $D_f = R - \{1\}$    | $f(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2} \bullet 4$ |
| $D_f = R - \{1\}$    | $f(x) =  x  + \frac{2}{x-1} \bullet 5$ |

**التمرين -2-**

$x$  متغير حقيقي . احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

|                                                                                |                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + \sqrt{x+2} \right) \bullet 2$     | $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sqrt{x} + 5) \bullet 1$                      |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}) \bullet 4$             | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + \sqrt{x} + 2 \right) \bullet 3$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x) \bullet 6$            | $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x) \bullet 5$                |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-5}{\sqrt{x-3}} \right) \bullet 8$ | $\lim_{x \rightarrow 9} \left( \frac{x-5}{\sqrt{x-3}} \right) \bullet 7$           |

**التمرين -3-**

- $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = x^3 + x^2 + 4x + 1$
1. ادرس نهايات الدالة  $f$ .
  2. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$ .
  3. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على  $\mathbb{R}$ .
  4. تحقق أن  $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ .

**التمرين -4-**

أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية  $f$  و  $k$  عند 1 مفسرا ببياني في كل مرة النتيجة المحصل عليها:

$$k(x) = 2x|x-1|, \quad f(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$$

**التمرين -5-**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$  بـ  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في م متعامد و متجانس  $(O; I, J)$ .

1. أحسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها و استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .
2. أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أكتب معادلة  $(T)$  مماس  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

$$f(x) = x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1}, \quad D_f \text{ من } x$$

4. بين أنه من أجل كل  $x$  من  $D_f$  ،  $f(x) = x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1}$
5. بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + 3$  مستقيم مقارب مائل للمنحني  $(C_f)$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ .
6. أدرس وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ .
7. بين أن  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  حيث :  $-2.6 < \alpha < -2.5$  و  $-1.3 < \beta < -1.4$  و  $0.8 < \gamma < 0.9$ .
8. بين أن النقطة  $\Omega(0;3)$  مركز تناظر للمنحني  $(C_f)$ .
9. أرسم المستقيمات المقاربة و المماس للمنحني  $(C_f)$ .

**التمرين -6-**

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = x^3 + 3x + 4$  و ليكن  $(C_g)$  تمثيلها البياني في معلم.

1. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .
2. أدرس اتجاه تغير  $g$  و شكل جدول تغيراتها .
3. احسب  $g(-1)$  ثم استنتج حسب قيم  $x$  ، إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(I) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعبارة  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; I, J)$ .

1. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
2. بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$  ، استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.
3. عین معادلة لـ  $(T)$  مماس المنحني  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
4. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$  ثم استنتج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلة له .
5. ادرس وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(T)$  .
6. هل توجد مماسات موازية للمستقيم  $(\Delta)$  ؟
7. بين أن  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث :  $1.2 < \alpha < 1.3$
9. ارسم المستقيم  $(\Delta)$  و المنحني  $(C_f)$  .

**التمرين -7-**

- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{2\}$  بـ  $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x-2}$  وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; I, J)$  .
1. اكتب  $f(x)$  بدون رمز القيمة المطلقة.
  2. احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجالات التعريف .
  3. ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند 1 ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
  4. اكتب معادلتی  $(T)$  و  $(T')$  نصفي المماسين للمنحني  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
  5. ادرس تغيرات الدالة  $f$  .
  6. بين أن المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = x - 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$  .
  7. بين أن المستقيم  $(D')$  ذو المعادلة  $y = -x + 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  .
  8. ادرس الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  بالنسبة لكل من  $(D)$  و  $(D')$  .
  9. ارسم  $(T)$  و  $(T')$  و  $(D)$  و  $(D')$  و المنحني  $(C_f)$  .

**التمرين -8-**

- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} - 2$  وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; I, J)$  .
1. احسب نهايات الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$  .
  2. ادرس تغيرات الدالة  $f$  .
  3. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)]$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 3)]$  ، ماذا تستنتج ؟
  4. بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $x = 1$  محور تناظر لـ  $(C_f)$  .
  5. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $2.7 < \alpha < 2.8$  ، استنتج الحل الآخر  $\beta$  .
  6. ارسم المستقيمتين المقاربة و المنحني  $(C_f)$  .
  7. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} - 2$  ،  $g(x)$  تمثيلها البياني  $(C_g)$  ارسم  $(C_g)$  اعتمادا على  $(C_f)$  .
  8. نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $h(x) = \sqrt{x^2 - 2|x| + 2} - 2$  ،  $h(x)$  تمثيلها البياني  $(C_h)$  .
  - بين أن الدالة  $h$  زوجية .
  - ارسم  $(C_h)$  اعتمادا على  $(C_f)$  .

**التمرين -9-****الجزء الأول :**

- $g$  دالة معرفة على المجموعة  $R$  كما يلي :  $g(x) = x^3 - 3x - 3$  .
1. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  .
  2. ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها.
  3. بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في  $R$  ؛ حلا وحيدا  $\alpha$  . تحقق من أن :  $2.1 < \alpha < 2.2$  .

4. استنتج إشارة  $g(x)$  على  $R$ .

5. بين أن  $(C)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

### الجزء الثاني :

$f$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R - \{-1;1\}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم م م  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. احسب نهايات  $f$  عند حدود مجالات تعريفها . استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .

2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R - \{-1;1\}$  ؛ يكون :  $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ .

3. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

4. عين ؛ دون حساب ؛  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  . فسر النتيجة بيانيا .

5. بين أن :  $f(\alpha) = 3\alpha$  . استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$ .

6. أبين أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي  $y = 2x$  معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$ .

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$

7. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\beta$  حيث :  $-1.2 < \beta < -1.1$  . فسر النتيجة هندسيا.

8. أنشئ  $(\Delta)$  المنحنى  $(C_f)$ .

9. نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $R - \{-1;1\}$  بـ  $h(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} + 1$  و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  . - استنتج كيفية

رسم  $(C_h)$  انطلاقا من  $(C_f)$ .

10. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة الآتية حيث  $x$  هو المجهول :  $f(x) = |m|$

### التمرين -10-

#### الجزء الأول :

المنحنى  $(C)$  المقابل هو التمثيل البياني للدالة  $g$  المعرفة على  $R$  كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

- بقراءة بيانية حدد إشارة  $g(-2)$  و  $g(-1)$ .
- برر وجود عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $]-2; -1[$  يحقق أن المعادلة  $g(\alpha) = 0$ .
- تحقق حسابيا أن  $\alpha \in ]-1.48; -1.47[$ .
- استنتج إشارة  $g(x)$  على  $R$ .

#### الجزء الثاني :

$f$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 + 2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. احسب نهايات  $f$  عند حدود مجالات تعريفها .

2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R$  ؛ يكون :  $f(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$ .

3. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

4. أبين أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي  $y = x + 1$  معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$ .

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

5. بين أن  $(C_f)$  يقبل مماسين موازيين لـ  $(\Delta)$  . (لا يطلب تعيين معادلتيهما)

6. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\beta$  حيث :  $1.3 < \beta < 1.4$  . فسر النتيجة هندسيا.

7. أنشئ  $(\Delta)$  المنحنى  $(C_f)$  . (نأخذ  $f(\alpha) = -1.2$ )

## التمرين -11-

## الجزء الأول :

$g$  دالة معرفة على المجموعة  $R$  كما يلي :  $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$  .

1. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  .
2. أدرس تغيرات الدالة  $g$  . و شكل جدول تغيراتها .
3. بين أن احسب  $g(2)$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$  و إشارة  $g(-x)$  على  $R$  .

## الجزء الثاني :

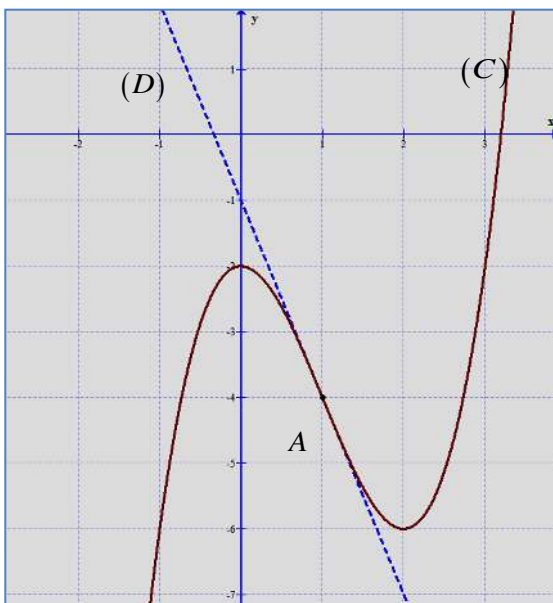
$f$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R - \{-1\}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

1. احسب نهايات  $f$  عند حدود مجالات تعريفها . استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .
2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R - \{1\}$  ؛ يكون :  $f'(x) = \frac{2g(-x)}{(x+1)^3}$  .
3. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .
4. بين أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R - \{1\}$  ؛ يكون :  $f(x) = 2x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2}$  .
5. أ. بين أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي  $y = 2x + 2$  معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$  .  
ب. ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  .
6. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-0.3 < \alpha < -0.2$  ثم فسر النتيجة هندسيا .
7. أنشئ  $(\Delta)$  المنحنى  $(C_f)$  .
8. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة :  $f(x) = 2x + m$  .

## التمرين -12-

## الجزء الأول :

$g$  دالة معرفة على المجموعة  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية .  
( $C$ ) هو التمثيل البياني للدالة  $g$  في معلم . و ( $D$ ) هو المماس للمنحنى ( $C$ ) في النقطة  $A(1; -4)$  ، ( انظر الشكل )



1. بقراءة بيانية :  
أ. شكل جدول تغيرات  $g$  .  
ب. عين  $g(0)$  ،  $g(2)$  ،  $g'(0)$  ،  $g'(2)$  ،  $g'(1)$  و  $g''(1)$  .  
ج. اكتب معادلة لـ ( $D$ ) .  
د. حل المتراجحة الآتية :  $g'(x) < 0$  .
2. باستعمال ( $C$ ) ، بين أن  $a = 1$  ،  $b = -3$  و  $c = -2$  .
3. بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  محصور بين العددين 3.1 و 3.2 .
4. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  ؛ إشارة  $g(x)$  .
5. بين أن ( $C$ ) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

## الجزء الثاني :

$f$  الدالة المعرفة على  $R - \{1\}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$  .

( $C_f$ ) هو التمثيل البياني للدالة  $f$  في معلم متعامد متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

1. احسب نهاية الدالة  $f$  عند كل حد من حدود مجال تعريفها . و فسر النتائج هندسيا .

2. بين أنه ؛ من أجل كل  $x$  من  $R - \{1\}$  ؛ يكون :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$  . ثم استنتج اتجاه تغير  $f$  و شكل جدول تغيراتها .
3. احسب  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$  ثم استنتج أن  $(C_f)$  يقبل م م مائل  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلته . أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\Delta)$  .
4. بين أن  $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$  ثم استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$  .
5. بين أن:  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  موازيا لـ  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلته.
6. احسب  $f(-1)$  ثم ارسم المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$  .
7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ؛ عدد حلول المعادلة :  $f(x) = m$  و المعادلة  $f(x) = x + m$  .
8.  $h$  الدالة المعرفة على المجال  $R - \{1\}$  كما يلي :  $h(x) = [f(x)]^2$  .
- ↪ أدرس اتجاه تغير  $h$  و شكل جدول تغيراتها . ( عبارة  $h$  غير مطلوبة )
9.  $u$  الدالة المعرفة على المجال  $R - \{1\}$  كما يلي :  $u(x) = |f(x)|$  ،  $(C_u)$  هو التمثيل البياني للدالة  $u$  .
- ↪ أنشئ  $(C_u)$  انطلاقا من  $(C_f)$
10.  $v$  الدالة المعرفة على المجال  $R - \{-1; 1\}$  كما يلي :  $v(x) = f(|x|)$  هو التمثيل البياني للدالة  $v$  .
- ↪ بين أن  $v$  زوجية ثم أنشئ  $(C_v)$  انطلاقا من  $(C_f)$
11.  $k$  الدالة المعرفة على المجال  $R - \{2\}$  كما يلي :  $k(x) = f(x-1) + 2$  هو التمثيل البياني للدالة  $k$  .
- ↪ اشرح كيفية انشاء  $(C_k)$  انطلاقا من  $(C_f)$  .

# حل التمارين

**حل التمرين -1-**

$$D_f = R - \{2\} = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} \bullet 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = \frac{5}{0^-} = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = \frac{5}{0^+} = +\infty.$$

$$D_f = R - \{-1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[ \quad \boxed{f(x) = \frac{2x-3}{x+1} \bullet 2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-5}{0^-} = +\infty. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$D_f = R - \{-1; 1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[ \quad \boxed{f(x) = \frac{2x-3}{x^2-1} \bullet 3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{-5}{0^+} = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[ \quad \boxed{f(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2} \bullet 4}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\boxed{f(x) = |x| + \frac{2}{x-1} \bullet 5} \quad D_f = R - \{1\} = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

أولا نكتب  $f(x)$  بدون رمز القيمة المطلقة :

$$f(x) = |x| + \frac{2}{x-1} = \begin{cases} -x + \frac{2}{x-1}, & x \in ]-\infty; 0] \\ x + \frac{2}{x-1}, & x \in [0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x + \frac{2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( x + \frac{2}{x-1} \right) = \left( 1 + \frac{2}{0^+} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( x + \frac{2}{x-1} \right) = \left( 1 + \frac{2}{0^-} \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sqrt{x+2}}_{+\infty} \right) = +\infty \bullet 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \sqrt{x+2} \right) = \frac{1}{0^+} + 2 = +\infty \bullet 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sqrt{x} + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty \bullet 1$$

$$\bullet 4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\sqrt{x+1}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{x-2}}_{-\infty} \right) \text{ هي ح.ع.ت من الشكل } +\infty - \infty \text{ (نزيليها باستعمال المرافق).}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - (x-2)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x) = +\infty \bullet 5$$

$$\bullet 6 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}_{+\infty} - \underbrace{2x}_{-\infty} \right) \text{ هي ح.ع.ت من الشكل } +\infty - \infty \text{ (نزيليها باستعمال المرافق)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-1) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} \left( \frac{x-5}{\sqrt{x}-3} \right) = \frac{4}{0^+} = +\infty \bullet 7$$

$$\bullet 8 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-5}{\sqrt{x}-3} \right) \text{ هي ح.ع.ت من الشكل } \frac{\infty}{\infty} \text{ ونزيليها باستخراج } \sqrt{x} \text{ كعامل مشترك ثم الاختزال.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-5}{\sqrt{x}-3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(1 - \frac{3}{\sqrt{x}})} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{(\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt{x}})}{(1 - \frac{3}{\sqrt{x}})} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$$

### حل التمرين -3-

#### 1. دراسة نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2 + 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2 + 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

#### 2. دراسة تغيرات الدالة $f$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 4, \quad \text{المعادلة } f'(x) = 0 \text{ لا تقبل حلول وإشارة } f'(x) \text{ موجبة تماما.}$$

إذن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

#### 3. تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

$$\text{ولدينا } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \text{ و } 0 \in ]-\infty; +\infty[. \text{ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا على } \mathbb{R}$$

#### 4. التحقق أن $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ .

$$\text{لدينا } 0 < f(-\frac{1}{2}) = -0.875 \text{ و } f(0) = 1 > 0 \text{ إذن } -\frac{1}{2} < \alpha < 0.$$

### حل التمرين -4-

$$f(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$$

$$\text{ومنه } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{[(1+h)^2 - 2(1+h) + 3]^2 - 4}{h} = \frac{h^2(h^2 + 4)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h(h^2 + 4) = 0. \text{ إذن الدالة } f \text{ تقبل الاشتقاق عند } 1 \text{ ولدينا } f'(1) = 0.$$

المنحني  $(C_f)$  يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه 0 و هو موازي لمحور الفواصل.

$$k(x) = 2x|x-1|$$

$$\frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \frac{2(h+1)|h|}{h} = 2(h+1), h > 0$$

$$\frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \frac{2(h+1)|h|}{h} = -2(h+1), h < 0$$

نلاحظ أن هذه النسبة تقبل نهاية من اليمين عند 0 مساوية لـ 2 و نهاية من اليسار عند 0 مساوية لـ -2 .  
نقول أن  $k$  تقبل الاشتقاق عند 1 من اليمين و من اليسار و أن عددها المشتق من اليمين عند 1 هو 2 و عددها المشتق من اليسار عند 1 هو -2 و  
بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1

المنحني  $(C_k)$  يقبل عند النقطة  $A(1;0)$  نصفي مماسين معاملا توجيههما 2 و -2 .

## حل التمرين -5-

### 1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

### استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \text{ إذن المستقيم ذو المعادلة } x = -1 \text{ م.م عمودي لـ } (C_f).$$

$$\text{ولدينا : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \text{ إذن المستقيم ذو المعادلة } x = 1 \text{ م.م عمودي لـ } (C_f).$$

### 2. دراسة اتجاه تغير $f$ و تشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 3x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}, \text{ لدينا } D_f \text{ من } x \text{ كل أجل كل } x$$

إشارة  $f'(x)$  من  $x^2 - 3 = 0$  ، المعادلة تقبل حلين هما  $x = \sqrt{3}$  و  $x = -\sqrt{3}$  و عليه إشارة  $f'(x)$  :

| $x$     | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|------|-----|------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +           | 0    | -   | -          | +         |

$f$  متزايدة تماما على المجالين  $]-\infty; -\sqrt{3}]$  و  $[\sqrt{3}; +\infty[$  و متناقصة تماما على المجالات  $]-\sqrt{3}; -1[$  و  $]1; \sqrt{3}[$  و  $]-1; 1[$

### جدول تغيراتها:

| $x$    | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$      | $1$       | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-------------|-----------|-----------|------------|-----------|
| $f(x)$ |           |             |           |           |            |           |
|        |           | ↗ 0.4 ↘     |           |           | ↘ 5.6 ↗    |           |
|        | $-\infty$ | $-\infty$   | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$  | $+\infty$ |

### 3. كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة  $(T)$  هي:  $y = f'(0)(x-0) + f(0)$  لدينا  $f(0) = 3$  و  $f'(0) = 0$  و بالتالي معادلة للمماس  $(T)$  هي :  $y = 3$  .

### 4. تبين أنه من أجل كل $x$ من $D_f$ ، $f(x) = x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1}$ :

$$x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{(x+3)(x^2 - 1) + x}{x^2 - 1} = \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} = f(x), \text{ من } D_f \text{ كل } x$$

### 5. تبين أن $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x + 3$ مستقيم مقارب مائل:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[ x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1} - (x + 3) \right] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + 3$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$  .

**6. دراسة وضعية المنحني بالنسبة للمستقيم المقارب ( $\Delta$ ):**

ندرس إشارة  $f(x) - y$  أي إشارة  $\frac{x}{x^2-1}$  ، نلخص إشارة  $y - f(x)$  و الوضع النسبي في الجدول أدناه:

| $x$          | $-\infty$              | $-1$ | $0$                    | $1$                    | $+\infty$              |  |   |
|--------------|------------------------|------|------------------------|------------------------|------------------------|--|---|
| $x$          | -                      |      | 0                      | +                      |                        |  |   |
| $x^2-1$      | +                      |      | 0                      | -                      |                        |  |   |
| $f(x)-y$     | +                      |      | 0                      | +                      |                        |  |   |
| $f(x)-y$     | -                      |      | +                      | 0                      | -                      |  | + |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |      | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |  |   |

**7. تبين أن  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها:  $-2.6 < \alpha < -2.5$  و  $-1.4 < \beta < -1.3$  و  $0.8 < \gamma < 0.9$ :**  
من جدول تغيرات الدالة  $f$  لدينا :

- $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; -\sqrt{3}]$  و من ثم على المجال  $[-2.6; -2.5]$  :  
و لدينا :  $f(-2.6) = -0.05 < 0$  و  $f(-2.6) = 0.02 > 0$  .  
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]-2.6; -2.5]$  حلا وحيدا  $\alpha$  .
- $f$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $[-\sqrt{3}; -1]$  و من ثم على المجال  $[-1.4; -1.3]$  :  
و لدينا :  $f(-1.3) = -0.18 < 0$  و  $f(-1.4) = 0.14 > 0$  .  
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]-1.4; -1.3]$  حلا وحيدا  $\beta$  .
- $f$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $]-1; 1]$  و من ثم على المجال  $[0.8; 0.9]$  :  
و لدينا :  $f(0.8) = 1.57 > 0$  و  $f(0.9) = -0.83 < 0$  .  
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0.8; 0.9]$  حلا وحيدا  $\gamma$  .

إذن  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  حيث :

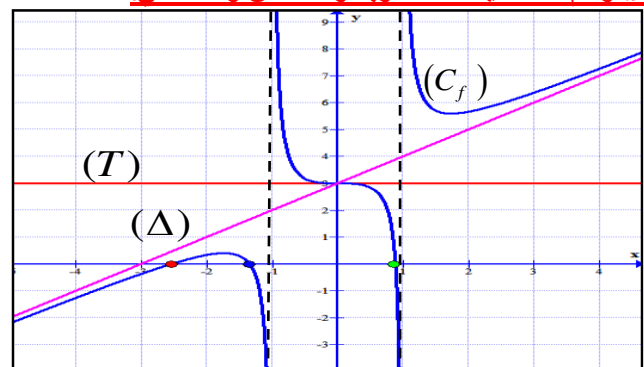
$$-2.6 < \alpha < -2.5 \text{ و } -1.4 < \beta < -1.3 \text{ و } 0.8 < \gamma < 0.9$$

**8. تبين أن النقطة  $\Omega(0;3)$  مركز تناظر للمنحني :**

من أجل  $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$  ،  $(-x) \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$  و منه  $(-x) \in D_f$  و :

$$f(-x) + f(x) = -x + 3 + \frac{-x}{x^2-1} + x + 3 + \frac{x}{x^2-1} = 6 = 2(3)$$

إذن النقطة  $\Omega(0;3)$  هي مركز تناظر لـ  $(C_f)$  .

**9. رسم المستقيمات المقاربة و المماس للمنحني.****حل التمرين -6-**

I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = x^3 + 3x + 4$  .

**1. حساب النهايات:**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

**3. دراسة تغيرات الدالة  $g$ :**

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $g'(x) = 3x^2 + 3$  ،  $g'(x) > 0$  . إذن  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  .

**4. حساب  $g(-1)$  و استنتاج إشارة  $g(x)$  :**

$g(-1) = 0$  .  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  و تتعدم من أجل  $x = -1$  . إذن إشارتها كالتالي :

| $x$    | $-1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|--------|------|-----------|-----------|
| $g(x)$ | -    | 0         | +         |

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$

### 1. حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

### 2. تبين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ ، $\therefore$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3 + 3x + 4)}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}, \mathbb{R} \text{ من } x \text{ كل}$$

### 3. استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ و جدول تغيراتها:

إشارة  $f'(x)$  من إشارة البسط. نلخص الإشارة في الجدول التالي :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |   |
|---------|-----------|------|-----|-----------|---|
| $g(x)$  | -         | 0    | +   | +         |   |
| $x$     | -         | -    | 0   | +         |   |
| $f'(x)$ | +         | 0    | -   | 0         | + |

$f$  متزايدة تماماً على المجالين  $]-\infty; -1]$  و  $[0; +\infty[$  ومتناقصة تماماً على  $]-1; 0]$ .

### جدول التغيرات :

| $x$    | $-\infty$ | $-1$           | $0$  | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------------|------|-----------|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $-2$ | $+\infty$ |

### 4. تعيين معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة  $(T)$  هي:  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ . لدينا  $f(0) = -2$  و  $f'(0) = 0$  وبالتالي معادلة للمماس  $(T)$  هي :  $y = -2$ .

### 5. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

### الاستنتاج:

المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مستقيم مقارب مائل لـ  $y = x$  بجوار  $+\infty$  و  $-\infty$ .

### 6. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ :

، إشارة  $[f(x) - x]$  من إشارة البسط. نلخص إشارة  $[f(x) - x]$  و الوضع النسبي في الجدول التالي:

| $x$          | $-\infty$              | $-2$                                   | $+\infty$              |
|--------------|------------------------|----------------------------------------|------------------------|
| $f(x) - y$   | +                      | 0                                      | -                      |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في $A(-2; -2)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

### 7. هل توجد مماسات موازية للمستقيم $(\Delta)$ ؟:

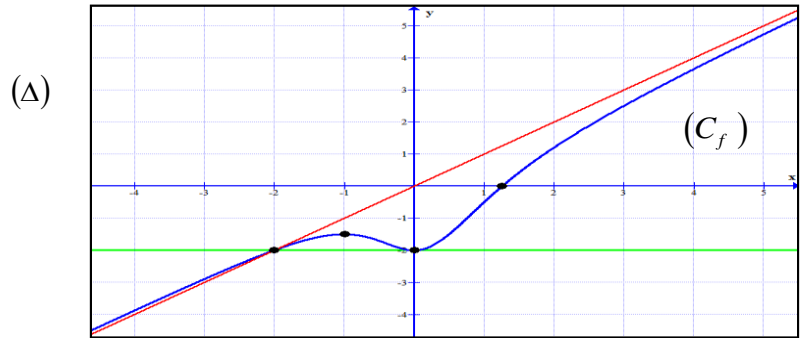
معامل توجيه المستقيم  $(\Delta)$  هو 1. المعادلة  $f'(x) = 1$  تكافئ  $\frac{x^4 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2} = 1$  ومنه  $x^4 + 3x^2 + 4x = (x^2 + 1)^2$

ومنه  $x^2 + 2 = 0$ . المعادلة لا تقبل حلول إذن لا توجد مماسات موازية لـ  $(\Delta)$ .

### 8. تبين أن $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث:

لا توجد حلول للمعادلة  $f(x) = 0$  في المجالين  $]-\infty; -1]$  و  $[-1; 0]$ .  
 $f$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $[0; +\infty[$  و من ثم على  $[1.2; 1.3]$  ولدينا  $f(1.2) \times f(1.3) < 0$ .  
 حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $[1.2; 1.3]$  حلا وحيدا  $\alpha$ .  
 إذن  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث:  $1.2 < \alpha < 1.3$ .

### 9. رسم المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$ :



### حل التمرين -7-

#### 1. كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = |x-1| + \frac{2}{x-2} = \begin{cases} g(x) = -x+1 + \frac{2}{x-2}; x \in ]-\infty; 1] \\ k(x) = x-1 + \frac{2}{x-2}; x \in [1; 2[ \cup ]2; +\infty[ \end{cases}$$

#### 2. حساب النهايات عند أطراف مجالات التعريف :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ -x+1 + \frac{2}{x-2} \right] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x-1 + \frac{2}{x-2} \right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ x-1 + \frac{2}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ 1 + \frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ x-1 + \frac{2}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ 1 + \frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

• المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته  $x = 2$ .

#### 3. دراسة قابلية اشتقاق الدالة عند 1 و تفسير النتيجة هندسيا :

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h+1) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-1+1 + \frac{2}{h+1-2} + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + \frac{2}{h-1} + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + h + 2 + 2h - 2}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 3h}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-3}{h-1} = -3$$

نستنتج أن  $f$  تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار و عددها المشتق من اليسار هو  $g'(1) = -3$ .

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h+1) - k(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-1+1 + \frac{2}{h+1-2} + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \frac{2}{h-1} + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h + 2 + 2h - 2}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + h}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h+1}{h-1} = -1$$

• نستنتج أن  $f$  تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين و عددها المشتق من اليمين هو  $k'(1) = -1$ .

لكن العدد المشتق من اليمين و اليسار غير متساويان أي:  $g'(1) \neq k'(1)$ ، إذن  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند 0.

#### التفسير الهندسي للنتائج :

منحنى الدالة  $f$  يقبل نصفي مماسين عند النقطة معاملا توجيههما -3 و -1.

#### 4. كتابة معادلتى نصفي المماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$\text{معادلة المماس } (T): y = g'(1)(x-1) + g(1) = -3(x-1) - 2 = -3x + 1$$

$$\text{معادلة المماس } (T'): y = k'(1)(x-1) + k(1) = -1(x-1) - 2 = -x - 1$$

#### 5. دراسة تغيرات الدالة $f$ :

$$\text{لما } f(x) = g(x) = -x+1 + \frac{2}{x-2}; x \in ]-\infty; 1]$$

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } ]-\infty; 1] : f'(x) = g'(x) = -1 - \frac{2}{(x-2)^2} < 0 \text{، الدالة } f \text{ متناقصة تماما على } ]-\infty; 1].$$

$$f(x) = k(x) = x - 1 + \frac{2}{x-2} : x \in [1; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

$$f'(x) = k'(x) = 1 - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2} : [1; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

من أجل كل  $x$  من  $[1; 2[ \cup ]2; +\infty[$  ، إشارة  $f'(x)$  من إشارة البسط .

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \Delta = 8 \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \text{تقبل حلين هما } x = 2 - \sqrt{2} \text{ و } x = 2 + \sqrt{2} \text{ و بالتالي إشارة } f'(x) \text{ كالتالي :}$$

| $x$     | 1 | 2 | $2 + \sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---------|---|---|----------------|-----------|
| $f'(x)$ | - |   | 0              | +         |

إذن  $f$  متناقصة تماما على  $[1; 2[$  و  $]2; 2 + \sqrt{2}]$  و  $f$  متزايدة تماما على  $[2 + \sqrt{2}; +\infty[$ .

**6. تبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = x - 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$  :**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2}{x-2} \right] = 0$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = x - 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

**7. تبين أن المستقيم (D') ذو المعادلة  $y = -x + 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  :**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (-x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2}{x-2} \right] = 0$$

و منه المستقيم (D') ذو المعادلة  $y = -x + 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

**9. دراسة الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  بالنسبة لكل من (D) :**

ندرس إشارة  $[f(x) - (x-1)]$  أي إشارة  $\frac{2}{x-2}$  على المجال  $[1; 2[ \cup ]2; +\infty[$  ، نلخص إشارة و الوضع النسبي في الجدول التالي:

| $x$              | 1               | 2 | $+\infty$       |
|------------------|-----------------|---|-----------------|
| $[f(x) - (x-1)]$ | -               |   | +               |
| الوضع النسبي     | (D) تحت $(C_f)$ |   | (D) فوق $(C_f)$ |

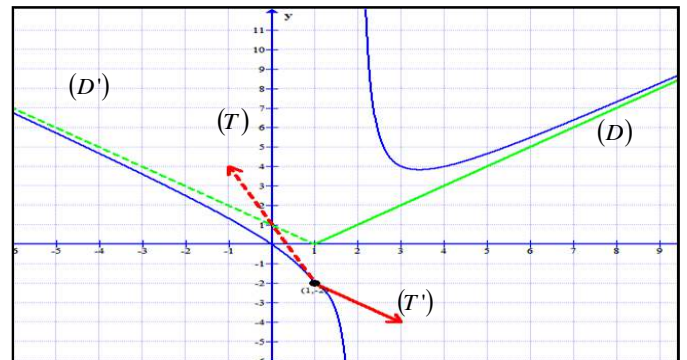
**دراسة الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  بالنسبة لكل من (D') :**

ندرس إشارة  $[f(x) - (-x+1)]$  أي إشارة  $\frac{2}{x-2}$  على المجال  $]-\infty; 1]$  . من أجل  $x$  كل من  $]-\infty; 1]$  ،  $\frac{2}{x-2} < 0$  . إذن من أجل  $x$

كل من  $]-\infty; 1]$  ،  $(C_f)$  تحت (D') .

**9. رسم المستقيمت و المماسات و المنحنى :  $f(0) = 0$**

(C<sub>f</sub>)



**حل التمرين -8-**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} - 2$

**1. حساب نهايات الدالة :**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 2] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 2] = +\infty$$

**2. دراسة تغيرات الدالة :**

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ،  $f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$  ، إشارة  $f'(x)$  من إشارة البسط  $(x-1)$  .

| $x$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0 | +         |

إذن  $f$  متناقصة تماما على  $]-\infty; 1]$  و متزايدة تماما على  $[1; +\infty[$ .

**3. حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x-1)]$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-3)]$  والاستنتاج :**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x-1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 2 - (-x-1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (1-x))$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (1-x)) \times (\sqrt{x^2 - 2x + 2} + (1-x))}{(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + (1-x))} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - 1 - x^2 + 2x}{[\sqrt{x^2 - 2x + 2} + (1-x)]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{[\sqrt{x^2 - 2x + 2} + (1-x)]} = 0$$

إذن المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = -x - 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 2 - (x-3)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x-1))$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x-1)) \times (\sqrt{x^2 - 2x + 2} + (x-1))}{(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + (x-1))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - 1}{[\sqrt{x^2 - 2x + 2} + (x-1)]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{[\sqrt{x^2 - 2x + 2} + (x-1)]} = 0$$

إذن المستقيم  $(D')$  ذو المعادلة  $y = x - 3$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

**4. تبين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $x=1$  محور تناظر للمنحنى :**

$$f(2-x) = \sqrt{(2-x)^2 - 2(2-x) + 2} - 2 = \sqrt{4 + x^2 - 4x - 4 + 2x + 2} - 2 = \sqrt{x^2 - 2x + 2} - 2 = f(x) \text{ و } (2-x) \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $x=1$  محور تناظر لـ  $(C_f)$ .

**5. تبين أن المعادلة  $f(x)=0$  تقبل حلا وحيدا :**

$f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[1; +\infty[$  ومن ثم على  $[2.7; 2.8]$  و لدينا  $f(2.7) \times f(2.8) < 0$ .

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $[2.7; 2.8]$  حلا وحيدا  $\alpha$ .

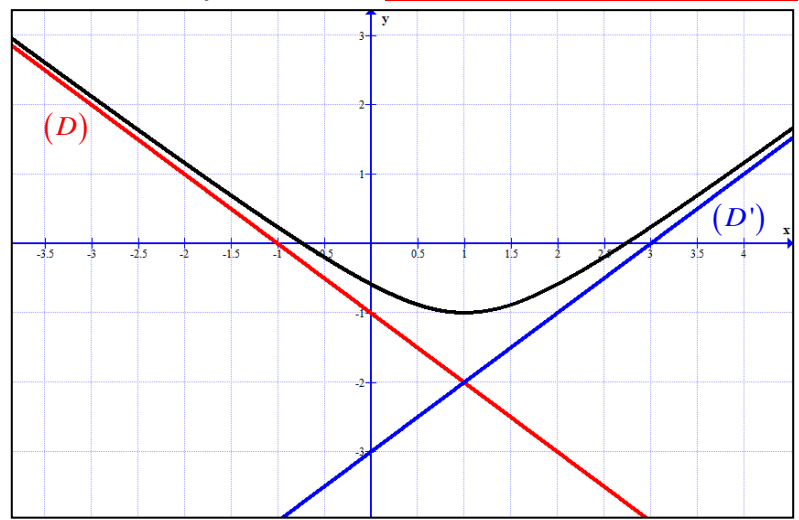
**استنتاج الحل الآخر :**

$$f(2-x) = f(x) \text{ (لأن } f(2-x) = f(x) \text{). } x = 2 - \alpha \text{ و منه } 2 - x = \alpha$$

الحل الآخر للمعادلة  $f(x) = 0$  هو  $\beta$  حيث  $\beta = 2 - \alpha$  و لدينا  $2.7 < \alpha < 2.8$  و منه  $-0.8 < -\alpha < -0.7$  أي  $-0.8 < \beta < -0.7$ .

**تفسير النتيجة هندسيا :**

$\alpha$  و  $\beta$  هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل.

**6. رسم المستقيمت المقاربة و المنحنى:  $f(0) = \sqrt{2} - 2$** **7. رسم  $(C_g)$  اعتمادا على  $(C_f)$  :**

يكون  $(C_g)$  منطبقا على  $(C_f)$  في المجالات التي يكون فيه  $(C_f)$  فوق محور الفواصل أي في المجالين  $]-\infty; \beta]$  و  $[\alpha; +\infty[$ .

يكون  $(C_g)$  منظر لـ  $(C_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل التي يكون فيه  $(C_f)$  تحت محور الفواصل أي في المجال  $[\alpha; \beta]$ .

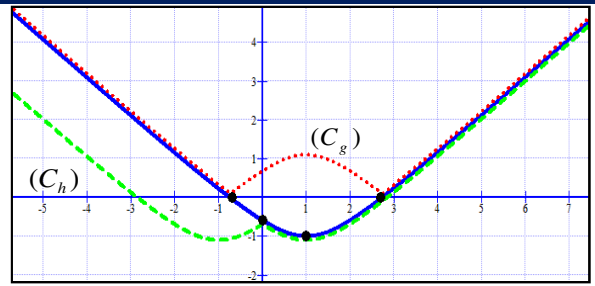
$$8. \text{ نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } h(x) = \sqrt{x^2 - 2|x| + 2} - 2$$

**• تبين أن الدالة  $h$  زوجية :**

من أجل  $x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}$  و:  $h(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2|-x| + 2} - 2 = \sqrt{x^2 - 2|x| + 2} - 2 = h(x)$ . إذن الدالة  $h$  زوجية.

**• رسم  $(C_h)$  اعتمادا على  $(C_f)$  :**

يكون  $(C_h)$  منطبقا على  $(C_f)$  في المجال  $[0; +\infty[$ ، و بما أن الدالة زوجية يكون الجزء من  $]-\infty; 0]$  منظر للجزء الأول بالنسبة إلى محور الترتيب.

**حل التمرين -9-****الجزء الأول :**

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = x^3 - 3x - 3$ .

**1. حساب النهايات:**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x - 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x - 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

**2. دراسة تغيرات الدالة  $g$ :**

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $g'(x) = 3x^2 - 3$ .

المعادلة  $g'(x) = 0$  تقبل حلين هما  $x = 1$  و  $x = -1$ . و إشارة  $g'(x)$  كما هو موضح في الجدول ادناه :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |   |
|---------|-----------|------|-----|-----------|---|
| $g'(x)$ | +         | 0    | -   | 0         | + |

الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]-\infty; -1]$  و  $[1; +\infty[$ ، و متناقصة تماما على  $[-1; 1]$ .

**جدول التغيرات :**

| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $1$  | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|------|-----------|
| $g(x)$ | $-\infty$ | $-1$ | $-5$ | $+\infty$ |

**3. بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في  $R$  حلا وحيدا :**

لا توجد حلول للمعادلة  $g(x) = 0$  في المجال  $]-\infty; 1]$ .

$f$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $[1; +\infty[$  و لدينا  $g(1) = -5$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  نلاحظ أن  $0 \in [-5; +\infty[$ ، حسب مبرهنة القيم

المتوسطة فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في  $\mathbb{R}$  حلا وحيدا  $\alpha$ .

**التحقق من أن :  $2.1 < \alpha < 2.2$  :**

$g(2.1) = -0.039$  و  $g(2.2) = 1.048$  و منه  $g(2.1) \times g(2.2) < 0$  إذن  $2.1 < \alpha < 2.2$ .

**4. استنتاج إشارة  $g(x)$ :**

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

**5. تبين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'''(x) = 6x$ .

"  $f$  تنعدم عند 0 مغيرة إشارتها أي  $f'''(x) > 0$  من أجل  $x < 0$  و  $f'''(x) < 0$  من أجل  $x > 0$  و  $f(1) = -3$  و  $A(0; -3)$  هي نقطة انعطاف للمنحني (C).

**الجزء الثاني :**

$f$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R - \{-1; 1\}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$

**1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty, \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^+} = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 3}{x^2 - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty.$$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  م.م عمودي لـ  $(C_f)$  والمستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  م.م عمودي لـ  $(C_f)$ .

2. التحقق أن:  $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(6x^2)(x^2-1) - 2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4 - 6x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^3 - 3x - 3)}{(x^2-1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

3. استنتاج اتجاه تغيرات  $f$  و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $xg(x)$ . نلخص إشارة  $f'(x)$  في الجدول أدناه :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $g(x)$  |           | -    | -   | -   | +         |
| $x$     | -         | -    | 0   | +   | +         |
| $f'(x)$ | +         | +    | 0   | -   | +         |

$f$  متزايدة تماما على المجالات  $]-\infty; -1]$  و  $[0; 1]$  و  $[\alpha; +\infty[$  ومتناقصة تماما على المجالين  $]1; \alpha]$  و  $[0; 1[$

جدول تغيراتها:

| $x$    | $-\infty$ | $-1$      | $0$  | $1$       | $\alpha$  | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-3$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

4. تعيين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ 

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{2\alpha \times g(\alpha)}{(\alpha^2 - 1)^2} = 0 \text{ ومنه } \alpha \text{ قابلة للاشتقاق عند } \alpha$$

تفسير النتيجة بيانيا

منحنى الدالة  $f$  يقبل عند النقطة ذات  $\alpha$  الفاصلة مماسا أفقيا .

5. تبين أن  $f(a) = 3a$ 

لدينا  $g(\alpha) = 0$  ومنه  $\alpha^3 - 3\alpha - 3 = 0$  ومنه  $\alpha^3 - 3\alpha = 3$ .

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + \alpha^3 - 3\alpha}{\alpha^2 - 1} = \frac{3\alpha^3 - 3\alpha}{\alpha^2 - 1} = \frac{3\alpha(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 - 1} = 3\alpha \text{ ينتج : } f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + 3}{\alpha^2 - 1} \text{ بتعويض } 3 \text{ بـ } \alpha^3 - 3\alpha$$

استنتاج حصرا للعدد  $f(a)$ :

لدينا  $2.1 < \alpha < 2.2$  ومنه  $6.3 < 3\alpha < 6.6$  أي  $6.3 < f(\alpha) < 6.6$ .

6. أ. تبين أن  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x$  مستقيم مقارب مائل :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} - 2x \right] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3 - 2x^3 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ .

ب. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب  $(\Delta)$  :

ندرس إشارة  $f(x) - y$  أي إشارة  $\frac{2x+3}{x^2-1}$ . نلخص إشارة  $f(x) - y$  والوضع النسبي في الجدول أدناه:

| $x$      | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|----------------|------|-----|-----------|
| $2x+3$   | -         | 0              | +    | +   | +         |
| $x^2-1$  | +         | +              | 0    | -   | 0         |
| $f(x)-y$ | -         | 0              | +    | -   | +         |

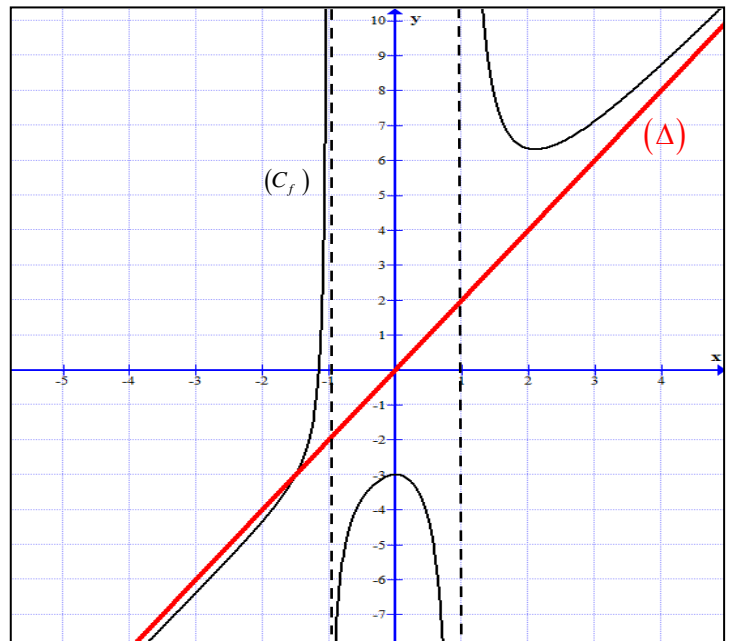
|                   |                   |                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| (C <sub>f</sub> ) | (C <sub>f</sub> ) | (C <sub>f</sub> ) | (C <sub>f</sub> ) | (C <sub>f</sub> ) | (C <sub>f</sub> ) |
| فوق               | تحت               | فوق               | فوق               | تحت               | فوق               |
| (Δ)               | (Δ)               | (Δ)               | (Δ)               | (Δ)               | (Δ)               |

**7. تبين أن المعادلة  $f(x)=0$  تقبل حلا وحيدا :**

- $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; -1]$  و من ثم على المجال  $[-1.2; -1.1]$  :  
ولدينا :  $f(-1.2) = -1.03 < 0$  و  $f(-1.1) = 1.609 > 0$  .  
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $[-1.2; -1.1]$  حلا وحيدا  $\beta$  .

**تفسير النتيجة هندسيا :**

$\beta$  هي فاصلة نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل .

**8. انشاء  $(\Delta)$  و المنحنى  $f(0) = -3$** **9. شرح كيفية رسم  $(Ch)$  انطلاقا من  $(Cf)$** 

لدينا  $h(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} + 1 = f(x) + 1$  .  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بانسحاب شعاعه  $\vec{j}$  .

**10. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة  $f(x) = Im$** 

- إذا كان  $|m| \in [0; f(\alpha)]$  أي أن  $m \in [-f(\alpha); f(\alpha)]$  فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان  $|m| = f(\alpha)$  أي أن  $m = f(\alpha)$  أو  $m = -f(\alpha)$  فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا و حلا سالبا .
- إذا كان  $|m| \in ]f(\alpha); +\infty[$  أي أن  $m \in ]f(\alpha); +\infty[ \cup ]-\infty; -f(\alpha)[$  فإن المعادلة تقبل حلين موجبين و حلا سالبا .

**حل التمرين -10-****الجزء الأول :****1. تحديد  $g(-2)$  و إشارة  $g(-1)$  :**

$$g(-2) < 0 \quad \text{و} \quad g(-1) > 0$$

**2. تعليل وجود عدد حقيقي  $a$  من المجال  $]-2; -1[$  :  $g(a) = 0$  :**

من التمثيل البياني :  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  و من ثم على  $[-2; -1]$  . ولدينا  $g(-2) \times g(-1) < 0$  . ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي  $a$  وحيد من المجال  $]-2; -1[$  يحقق :  $g(a) = 0$  .

**3. التحقق حسابيا أن :  $-1.48 < a < -1.47$  :**

$$g(-1.48) = -0.12 \quad \text{و} \quad g(-1.47) = 0.0035 . \text{ نلاحظ أن } 0 \text{ محصور بين } -0.12 \text{ و } 0.0035 .$$

$$\text{إذن : } a \in ]-1.48; -1.47[ .$$

**4. استنتاج إشارة  $g(x)$  :**

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

## الجزء الثاني :

الف الدالة المعرفة على المجموعة  $R$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 + 2}$  . معلمي  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

## 1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

2. التحقق أن  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$ 

من أجل كل  $x$  من  $R$  لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 + 2) - 2x(x^3 + x^2 - 4)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{3x^4 + 6x^2 + 2x^3 + 4x - 2x^4 - 2x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 + 12x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$  و جدول تغيراتها:

إشارة  $f'(x)$  من إشارة البسط  $xg(x)$  . نلخص الإشارة في الجدول التالي :

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------|---|-----------|
| $g(x)$  | -         | 0        | + | +         |
| $x$     | -         | -        | 0 | +         |
| $f'(x)$ | +         | 0        | - | +         |

$f$  متزايدة تماما على المجالين  $]-\infty; \alpha]$  و  $]\alpha; +\infty[$  ومتناقصة تماما على  $[\alpha; 0]$  .

## جدول التغيرات :

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$    | 0 | $+\infty$ |
|--------|-----------|-------------|---|-----------|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $f(\alpha)$ | 2 | $+\infty$ |

4. تبين أن  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$  :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 + 2} - (x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 4 - x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x - 6}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 + 2} - (x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 4 - x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 6}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $y = x + 1$  و  $-\infty$  .

ب دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  :

ندرس إشارة  $[f(x) - x]$  أي إشارة  $\frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$  ، إشارة  $\frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$  من إشارة البسط . نلخص إشارة  $[f(x) - x]$  و الوضع النسبي في الجدول التالي :

| $x$          | $-\infty$              | -3                                     | $+\infty$              |
|--------------|------------------------|----------------------------------------|------------------------|
| $f(x) - y$   | +                      | 0                                      | -                      |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في $A(-3; -2)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

5. تبين أن المنحنى يقبل مماسين موازيين لـ  $(\Delta)$  :

$$\text{المعادلة } f'(x) = 1 \text{ تكافئ } \frac{x^4 + 6x^2 + 12x}{(x^2 + 2)^2} = 1 \text{ ومنه } x^4 + 6x^2 + 12x = (x^2 + 2)^2 \text{ ومنه } x^4 + 6x^2 + 12x = x^4 + 4x^2 + 4 \text{ ومنه } x^4 + 6x^2 + 12x = x^4 + 4x^2 + 4$$

$$x^2 + 6x - 2 = 0 . \Delta = 44 > 0 \text{ ومنه فالمعادلة } f'(x) = 1 \text{ تقبل حلين متمايزين إذن يوجد مماسين موازيين لـ } (\Delta) .$$

6. تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا :

$f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$  و من ثم على المجال  $[1.3; 1.4]$  :

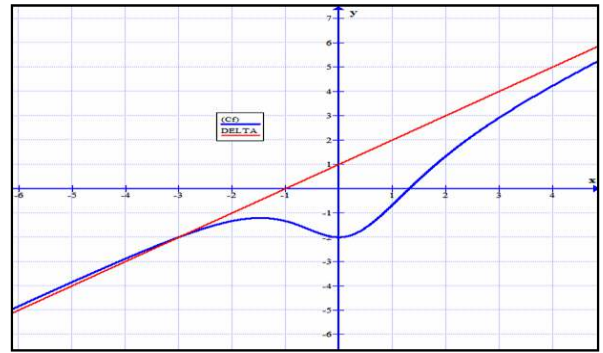
ولدينا :  $f(1.4) = 0.17 > 0$  و  $f(1.3) = -0.03 < 0$  .

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $[1.3; 1.4]$  حلا وحيدا  $\beta$  .

تفسير النتيجة هندسيا :

$\beta$  هي فاصلة نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل .

**7. إنشاء  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$**   $f(0) = -2$   $f(\alpha) = -1.2$

**حل التمرين -11-****الجزء الأول :**

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ .

**1. حساب النهايات:**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^3 + 3x^2 - 3x + 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x^3 + 3x^2 - 3x + 2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$$

**2. دراسة تغيرات الدالة  $g$ :**

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $g'(x) = -3x^2 + 6x - 3$ ،  $-3x^2 + 6x - 3 = 0$ ،  $\Delta = 0$ ،  $x = 1$ .  
ومنه  $g'(x) \leq 0$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ . الدالة  $g$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

**جدول التغيرات :**

| $x$    | $-\infty$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----------|
| $g(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**3. حساب  $g(-2)$  و استنتاج إشارة  $g(x)$ :**  $g(2) = 0$ 

$g$  مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  و تنعدم من أجل  $x = 2$ . وعليه إشارة  $g(x)$  كالتالي:

| $x$    | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $g(x)$ | $+$       | $0$ | $-$       |

**إشارة  $g(-x)$ :**

$g(-x) < 0$  إذا كان  $-x > 2$  و منه  $x < -2$  و  $g(-x) > 0$  إذا كان  $-x < 2$  و منه  $x > -2$  و  $g(-x) = 0$  إذا كان  $-x = 2$  و منه  $x = -2$ .

| $x$    | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|-----------|
| $g(x)$ | $-$       | $0$  | $+$       |

**الجزء الثاني :**

$f$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R - \{-1\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2}$

**1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{15}{0^+} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{15}{0^+} = +\infty$$

**استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :**

المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  م.م عمودي لـ  $(C_f)$ .

$$\text{2. التحقق أن } f'(x) = \frac{2g(-x)}{(x+1)^3}$$

من أجل كل  $x$  من  $R - \{-1\}$  لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(6x^2 + 14x + 8)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^3 + 7x^2 + 8x + 2 + 3)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) \left[ (6x^2 + 14x + 8)(x+1) - 2(2x^3 + 7x^2 + 8x + 2 + 3) \right]}{(x+1)(x+1)^3}$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 4}{(x+1)^3} = \frac{2((-x)^3 + 3(-x)^2 + 3(-x) + 2)}{(x+1)^3} = \frac{2g(-x)}{(x+1)^3}$$

**3. استنتاج اتجاه تغيرات  $f$  وتشكيل جدول تغيراتها:**إشارة  $f'(x)$  من إشارة البسط والمقام. نلخص إشارة  $f'(x)$  في الجدول أدناه :

| $x$       | $-\infty$ | $-2$ | $-1$  | $+\infty$ |
|-----------|-----------|------|-------|-----------|
| $g(-x)$   | -         | 0    | +     | +         |
| $(x+1)^3$ | -         |      | - 0 + | +         |
| $f'(x)$   | +         | 0    | -     | +         |

 $f$  متزايدة تماما على المجالين  $]-\infty; -2]$  و  $]-1; +\infty[$  ومتناقصة تماما على  $[-2; -1]$ **جدول التغيرات :**

| $x$    | $-\infty$ | $-2$ | $-1$      | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|-----------|-----------|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $-3$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**4. تبين أن  $f(x) = 2x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2}$  :**

$$2x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(2x+2)(x^2+2x+1) - 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2} = f(x)$$

**5. تبين أن  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x + 2$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$  :**

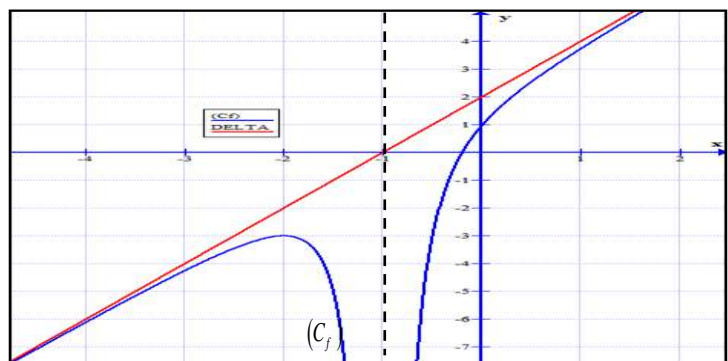
$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[ 2x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2} - (2x + 2) \right] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} -\frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x + 2$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ .**ب. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب  $(\Delta)$  :**ندرس إشارة  $f(x) - y$  أي إشارة  $-\frac{1}{(x+1)^2}$ . لدينا من أجل كل  $x$  من  $R - \{-1\}$ 

$$-\frac{1}{(x+1)^2} < 0, \text{ إذن } (C_f) \text{ تحت } (\Delta) \text{ في المجالين } ]-\infty; -1[ \text{ و } ]-1; +\infty[.$$

**6. تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا a :**

•  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $]-1; +\infty[$  و من ثم على المجال  $[-0.3; -0.2]$  :  
ولدينا :  $f(-0.3) = -0.64 < 0$  و  $f(-0.2) = 0.0375 > 0$ .

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]-0.3; -0.2[$  حلا وحيدا  $\alpha$ .**تفسير النتيجة هندسيا :** $\alpha$  هي فاصلة نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل.**7. إنشاء  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  :  $f(0) = 1, f(\alpha) = 0$**  $(\Delta)$ **8. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة  $f(x) = 2x + m$  :**حلول المعادلة  $f(x) = 2x + m$  هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = 2x + m$  (مناقشة ماثلة)

- إذا كان  $m \in ]-\infty; 1[$  فإن المعادلة تقبل حلين سالبين .
- إذا كان  $m = 1$  فإن المعادلة تقبل حلا معدوما و حلا سالبا .
- إذا كان  $m \in ]1; 2[$  فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .
- إذا كان  $m \in [2; +\infty[$  المعادلة لا تقبل حولا .

**حل التمرين -12-**

**الجزء الأول:**  $g$  دالة معرفة على المجموعة  $\square$  كما يلي:  $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية .

**1. بقراءة بيانية:** أ. شكل جدول تغيرات  $g$ :

| $x$    | $-\infty$ | 0    | 2    | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|------|-----------|
| $g(x)$ | $-\infty$ | $-2$ | $-6$ | $+\infty$ |

**ب. عين:**  $g(0), g(2), g'(0), g'(2), g'(1), g''(1)$

$$g(0) = -2, g(2) = -6, g'(0) = 0, g'(2) = 0$$

$$g'(1) = \frac{-1 - (-4)}{0 - 1} = -3 \quad (D) \text{ هو معامل توجيه المماس}$$

$g''(1) = 0$ : نلاحظ أن المماس  $(D)$  يخترق المماس في  $A(1; -4)$ ، إذن  $A$  نقطة انعطاف و بالتالي:  $g''(1) = 0$

**ج. اكتب معادلة  $(D)$ :**

معادلة  $(D)$  هي:  $y = g'(1)(x-1) + g(1)$  ولدينا  $g(1) = -4$  و  $g'(1) = -3$

ومنه  $y = -3(x-1) - 4$  و بالتالي معادلة المماس  $(D)$  هي:  $y = -3x - 1$

**د. حل المتراجحة الآتية:**  $g'(x) < 0$  :  $x \in ]0; 2[$

**2. باستعمال  $(C)$ ، بين أن  $a = 1$ ،  $b = -3$  و  $c = -2$ :**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$  و  $g'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$$\begin{cases} c = -2 \\ -a - b = 2 \dots (1) \\ 3a + b = 0 \dots (2) \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} c = -2 \\ a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} c = -2 \\ a + b - 2 = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} g(0) = -2 \\ g(1) = -4 \\ g'(2) = 0 \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:  $2a = 2$  ومنه  $a = 1$

نعوض قيمة  $a$  في (1) نجد  $1 + b = -2$  ومنه  $b = -3$

إذن  $a = 1$ ،  $b = -3$  و  $c = -2$ : من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

**3. بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  محصور بين العددين 3.1 و 3.2:**

$g$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[3.1; 3.2]$  ولدينا:  $\begin{cases} g(3.1) < 0 \\ g(3.2) > 0 \end{cases}$  أي  $g(3.1) \times g(3.2) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل في  $\mathbb{R}$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $3.1 < \alpha < 3.2$ .

**4. استنتج: حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ ؛ إشارة  $g(x)$ :**

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

**5. بين أن  $(C)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها:**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g(x) = 3x^2 - 6x$  و  $g''(x) = 6x - 6$

$g''(x) > 0$  من أجل  $x < 1$  و  $g''(x) < 0$  من أجل  $x > 1$  و  $g(1) = -4$

$g''$  تتعدم عند 1 مغيرة إشارتها إذن  $A(1; -4)$  هي نقطة انعطاف للمنحنى  $(C)$ .

**الجزء الثاني:**

$f$  الدالة المعرفة على  $R - \{1\}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$ .

**1. احسب نهاية الدالة  $f$  عند كل حد من حدود مجال تعريفها. وفسر النتائج هندسياً.**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

↔ المستقيم ذو المعادلة  $x=1$  م.م عمودي لـ  $(C_f)$ .

**2. بين أنه ؛ من أجل كل  $x$  من  $R - \{1\}$  يكون :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$ .**

من أجل كل  $x$  من  $R - \{1\}$  لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)]}{(x-1)(x-1)^3} = \frac{(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3 - 2}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 - 2}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

**استنتج اتجاه تغير  $f$  :**

| $x$       | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|-----------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$    | -         | - 0 +    | +         |
| $(x-1)^3$ | -         | +        | +         |
| $f'(x)$   | +         | - 0 +    | +         |

$f$  متزايدة تماماً على  $]-\infty; 1[$  و  $[\alpha; +\infty[$  ومتناقصة تماماً على المجال  $]1; \alpha]$ .

**و شكل جدول تغيراتها .**

| $x$    | $-\infty$ | 1         | $\alpha$  | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

**حساب  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$  :**

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

**استنتاج أن  $(C_f)$  يقبل م مائل  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلته :**

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x+2) = 0 \quad \text{معناه} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x - 2 = 0 \quad \text{معناه} \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x = 2$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x + 2$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ .

**أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\Delta)$  :**

$$f(x) - (x+2) = \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^2} - 2 = \frac{2x^2 - x + 1 - 2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - x + 1 - 2x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2} = \frac{3x - 1}{(x-1)^2}$$

| $x$          | $-\infty$                    | $\frac{1}{3}$                                                    | $+\infty$                    | 1                            |
|--------------|------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $f(x) - y$   | -                            | 0                                                                | +                            | +                            |
| الوضع النسبي | $(C_f)$<br>تحت<br>$(\Delta)$ | $(\Delta)$ يقطع<br>$B\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$ يقطع | $(C_f)$<br>فوق<br>$(\Delta)$ | $(C_f)$<br>فوق<br>$(\Delta)$ |

4. بيان أن  $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$  :

لدينا  $g(\alpha) = 0$  ومنه  $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2 = 0$  ومنه  $\alpha^3 = 3\alpha^2 + 2$ .

من جهة أخرى:  $f(\alpha) = \frac{\alpha^3 + 1}{(\alpha-1)^2}$  ومنه  $f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 2 + 1}{(\alpha-1)^2}$  ومنه  $f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 3}{(\alpha-1)^2}$  ومنه  $f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 3 + 6\alpha}{(\alpha-1)^2}$  ومنه

$f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$  ومنه  $f(\alpha) = \frac{3(\alpha-1)^2 + 6\alpha}{(\alpha-1)^2}$  ومنه  $f(\alpha) = \frac{3(\alpha^2 - 2\alpha + 1) + 6\alpha}{(\alpha-1)^2}$

استنتاج حصرا للعدد  $f(\alpha)$  :

لدينا  $3.1 < \alpha < 3.2$  ومنه  $2.1 < \alpha - 1 < 2.2$  ومنه  $4.41 < (\alpha-1)^2 < 4.84$  ومنه  $0.2 < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < 0.22$  ومنه  $1.2 < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < 1.32$

ومنه  $1.2 \times 3.1 < \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 1.32 \times 3.2$  ومنه  $3 + 3.72 < 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 3 + 4.22$  إذن  $6.72 < f(\alpha) < 7.22$

5. تبيين أن:  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  موازيا لـ  $(\Delta)$  :

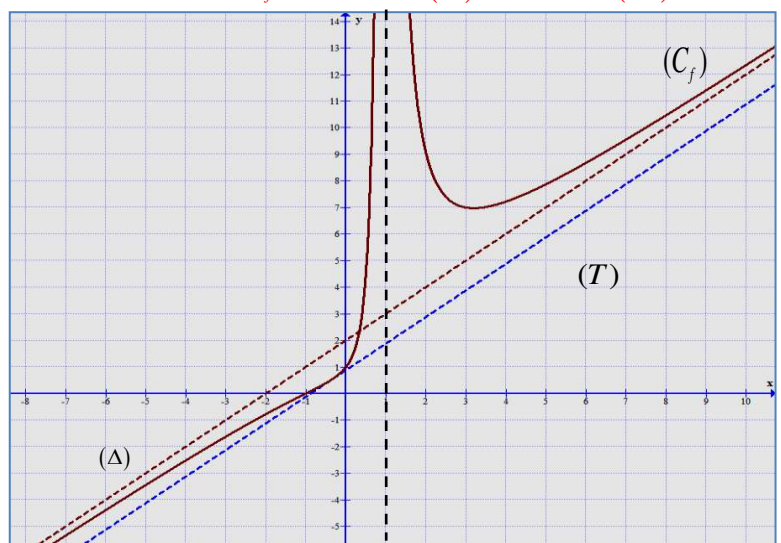
$f'(x) = 1$  ومنه  $\frac{x^3 - 3x^2 - 2}{(x-1)^3} = 1$  ومنه  $x^3 - 3x^2 - 2 = (x-1)^3$  ومنه  $x = \frac{-1}{3}$

$(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  موازيا لـ  $(\Delta)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x = \frac{-1}{3}$ .

معادلته:

معادلة  $(T)$  هي:  $y = f'\left(\frac{-1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{-1}{3}\right)$  ومنه  $y = 1\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{13}{24}$  و بالتالي معادلة المماس  $(D)$  هي:  $y = x + \frac{7}{8}$

6. حساب  $f(-1)$  ثم انشاء  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$  :



7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ؛ عدد حلول المعادلة:  $f(x) = m$  (المناقشة أفقية)

$\Leftrightarrow$  إذا كان  $m \in ]-\infty; f(\alpha)[$  المعادلة تقبل حلا وحيدا .  $\Leftrightarrow$  إذا كان  $m = f(\alpha)$  المعادلة تقبل حلان .

$\Leftrightarrow$  إذا كان  $m \in ]f(\alpha); +\infty[$  المعادلة تقبل 3 حلول.

و المعادلة  $f(x) = x + m$  :

⇐ إذا كان  $m \in \left] -\infty; \frac{7}{8} \right[$  لا توجد حلول . ⇐ إذا كان  $m = \frac{7}{8}$  المعادلة تقبل حلا مضاعفا .

⇐ إذا كان  $m \in \left] \frac{7}{8}; 2 \right[$  المعادلة تقبل حلان . ⇐ إذا كان  $m = 2$  المعادلة تقبل حلا وحيدا .

⇐ إذا كان  $m \in [2; +\infty[$  المعادلة تقبل حلان .

8. الدالة المعرفة على المجال  $R - \{1\}$  كما يلي :  $h(x) = [f(x)]^2$

⇐ أدرس اتجاه تغير  $h$  وشكل جدول تغيراتها . (عبارة  $h$  غير مطلوبة) :

من أجل كل  $x$  من  $R - \{1\}$  لدينا ،  $h'(x) = 2 \times [f'(x)] \times [f(x)]$

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|----------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | +    |     | - 0 +    |           |
| $f(x)$  | - 0 +     |      |     | +        | +         |
| $h'(x)$ | - 0 +     |      |     | - 0 +    |           |

$f$  متزايدة تماما على كل من المجالين  $[-1; 1[$  و  $[\alpha; +\infty[$  ومتناقصة تماما على كل من المجالين  $]-\infty; -1]$  و  $]1; \alpha]$  .

| $x$     | $-\infty$           | $-1$      | $1$ | $\alpha$                          | $+\infty$      |
|---------|---------------------|-----------|-----|-----------------------------------|----------------|
| $h'(x)$ | - 0 +               |           |     | - 0 +                             |                |
| $h(x)$  | $+\infty$<br>↘<br>0 | $+\infty$ |     | $+\infty$<br>↘<br>$[f(\alpha)]^2$ | $+\infty$<br>↗ |

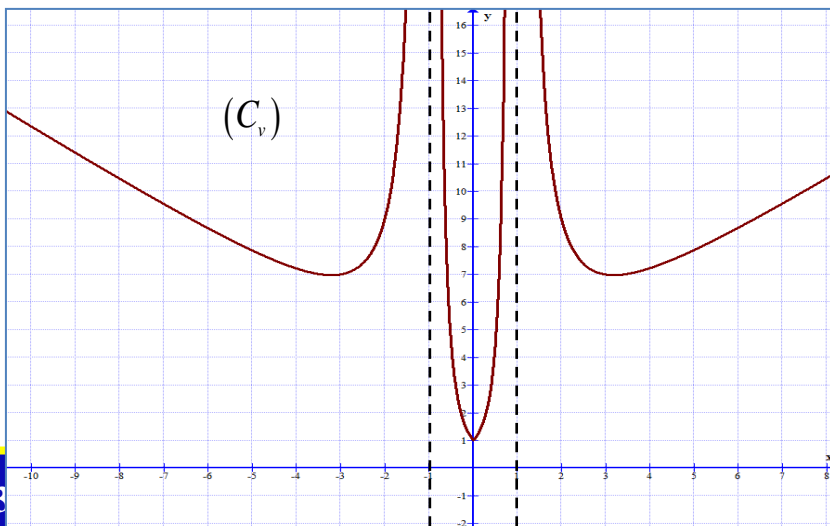
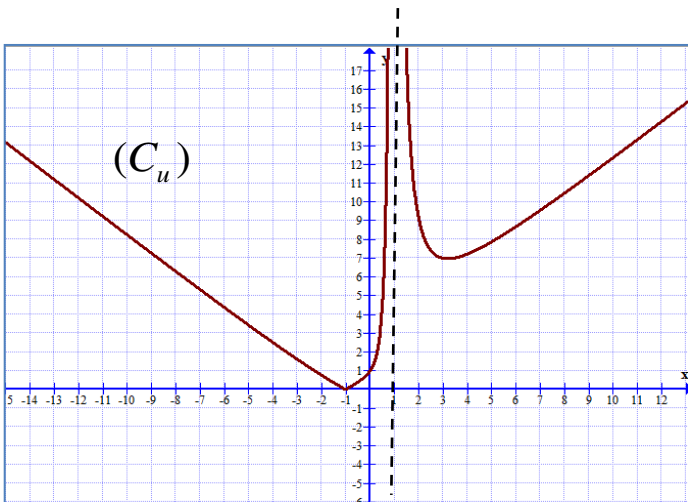
9. الدالة المعرفة على المجال  $R - \{1\}$  كما يلي :

$u(x) = |f(x)|$   $(C_u)$  هو التمثيل البياني للدالة  $u$  .

⇐ انشاء  $(C_u)$  انطلاقا من  $(C_f)$  :

يكون  $(C_u)$  منطبقا على  $(C_f)$  في المجالات التي يكون فيه  $(C_f)$  فوق محور الفواصل .

يكون  $(C_u)$  منظر لـ  $(C_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي يكون فيه  $(C_f)$  تحت محور الفواصل .



10. الدالة المعرفة على المجال  $R - \{-1; 1\}$  كما يلي :

$v(x) = f(|x|)$   $(C_v)$  هو التمثيل البياني للدالة  $v$  .

⇐ بين أن  $v$  زوجية

من أجل  $x \in D_u$  ،  $-x \in D_u$  و :

$v(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = v(x)$  . إذن الدالة

$u$  زوجية .

⇐ انشاء  $(C_v)$  انطلاقا من  $(C_f)$  :

يكون  $(C_v)$  منطبقا على  $(C_f)$  في المجال

$[0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  ، وبما أن الدالة  $u$  زوجية فإن

منحنيا منظر بالنسبة إلى محور الترتيب .

11. الدالة المعرفة على المجال  $R - \{2\}$  كما يلي :  $k(x) = f(x-1) + 2$   $(C_k)$  هو التمثيل البياني للدالة  $k$ .

→ اشرح كيفية انشاء  $(C_k)$  انطلاقا من  $(C_f)$ .

من الشكل  $k(x) = f(x+a) + b$  مع  $a = -1$  و  $b = 2$ .

إذن  $(C_k)$  هو صورة  $(C_f)$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}(1; -2)$ .

تمارين

## التمرين -1-

$f \bullet I$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R^*$  كما يلي:  $f(x) = x^2 + 1 + \frac{2}{x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. أ- احسب نهايات  $f$  عند حدود مجالات تعريفها.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها.

ج- ادرس إشارة  $f(x)$  على  $R^*$ . (تحقق أولا أن  $f(-1) = 0$ )

2.  $(P)$  قطع مكافئ معادلته:  $y = x^2 + 1$

أ- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x^2 + 1)]$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x^2 + 1)]$  ماذا تستنتج؟

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(P)$ .

3. أنشئ  $(C_f)$  و  $(P)$  في نفس المعلم.

4. ناقش؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة  $x^2 + 2 + \frac{2}{x} = m$

5.  $k$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R^*$  كما يلي:  $k(x) = x^2 + 1 + \frac{2}{|x|}$  و  $(C_k)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

أ- أكتب  $k(x)$  بدون رمز القيمة المطلقة.

ب- بين أن  $k$  دالة زوجية.

ج- استنتج  $(C_k)$  بالاستعانة بـ  $(C_f)$ .

II • الدالة المعرفة على المجموعة  $R^*$  كما يلي :  $h(x) = [f(x)]^2$  .

1. احسب نهايات  $h$  عند حدود مجالات تعريفها . ( نهاية دالة مركبة )
2. ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها . (دون حساب عبارة  $h$ )

III • الدالة المعرفة على المجموعة  $D$  كما يلي :  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  .

1. أ- عين  $D$  مجموعة تعريف الدالة  $g$  .  
ب- احسب نهايات  $g$  عند حدود مجالات تعريفها . ( نهاية دالة مركبة )

ج- ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  و شكل جدول تغيراتها . (دون حساب عبارة  $g$ )

$$2. \text{ بين أنه من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } ]-\infty; -1[ \text{ ؛ } \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = -\sqrt{\frac{x^2 - x + 2}{x(x+1)}}$$

- ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $g$  عند 1- و فسر النتيجة هندسيا .

$$3. \text{ أ- بين أنه من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } ]-\infty; -1[ \text{ ؛ } g(x) - x = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{f(x)} + x}$$

ب- استنتج أن  $(C_g)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلة له .

4. أنشئ  $(C_g)$  .

5. اشرح كيفية رسم  $(C_u)$  منحنى الدالة  $u$  المعرفة على  $D$  كما يلي :  $u(x) = 2 + \sqrt{f(x)}$  .

## التمرين -2-

I • دالة معرفة على المجموعة  $R$  كما يلي  $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  . ثم شكل جدول تغيراتها .
2. بين أن  $g(x) = 0$  تقبل في  $[-2; +\infty[$  ؛ حلا وحيدا  $\alpha$  . تحقق من أن :  $-2 < \alpha < -1$
3. جد حصر لـ  $\alpha$  سعته  $10^{-1}$  .
4. استنتج إشارة  $g(x)$  على  $R$  .

II • الدالة المعرفة على المجموعة  $R$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها في معلم م . م  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. احسب نهايات  $f$  عند حدود مجالات تعريفها .
2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R$  ؛  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$  .
3. ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

$$4. \text{ عين دون حساب } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

5. بين أن  $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$  ، ثم استنتج حصر للعدد  $f(\alpha)$  .

6. أبين أن  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  معادلته  $y = x$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$  .

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$

7. أنشئ  $(\Delta)$  المنحنى  $(C_f)$  .

8. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة :  $x^3 - m(2 + x^2 + 6m^{-1}) = 0$

9.  $h$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R$  كما يلي :  $h(x) = [f(x)]^2$  .

❖ ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيراتها. (دون حساب عبارة  $h$ )

10.  $g$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R$  كما يلي :  $g(x) = |f(x)|$  .  $(C_g)$  تمثيلها في معلم م . م  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

❖ أكتب  $g(x)$  دون رمز القيمة المطلقة ثم أنشئ  $(C_g)$  بالاستعانة بـ  $(C_f)$  .

11.  $g$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R$  كما يلي :  $k(x) = f(-|x|)$  .  $(C_k)$  تمثيلها في معلم م . م  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

أ- أكتب  $k(x)$  بدون رمز القيمة المطلقة .

ب- بين أن  $k$  دالة زوجية .

ج- استنتج  $(C_k)$  بالاستعانة بـ  $(C_f)$  .

### التمرين -3-

$I \bullet g$  دالة معرفة على المجموعة  $R$  كما يلي  $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1. ادرس تغيرات الدالة  $g$  . ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن  $g(x) = 0$  تقبل في  $R$  ؛ حلا وحيدا  $\alpha$  . تحقق من أن :  $-1 < \alpha < 0$  .

3. جد حصر لـ  $\alpha$  سعتة  $10^{-1}$  .

4. استنتج إشارة  $g(x)$  على  $R$  .

$II \bullet f$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

1. احسب نهايات  $f$  عند حدود مجالات تعريفها .

2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R$  ؛  $f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$  .

3. ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

4. عين الثوابت الحقيقية  $a$  ،  $b$  ،  $c$  بحيث يكون ؛ من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

5. أبين أن  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلة له .

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ 

تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R$  ؛  $f''(x) = \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3}$  . ثم بين أن  $(C_f)$  يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6. أنشئ  $(\Delta)$  المنحني  $(C_f)$  . ( يعطى  $f(\alpha) = -2.13$  )

ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة :  $f(x) = m^2$

7.  $h$  الدالة المعرفة على المجموعة  $D$  كما يلي :  $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$  . و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .

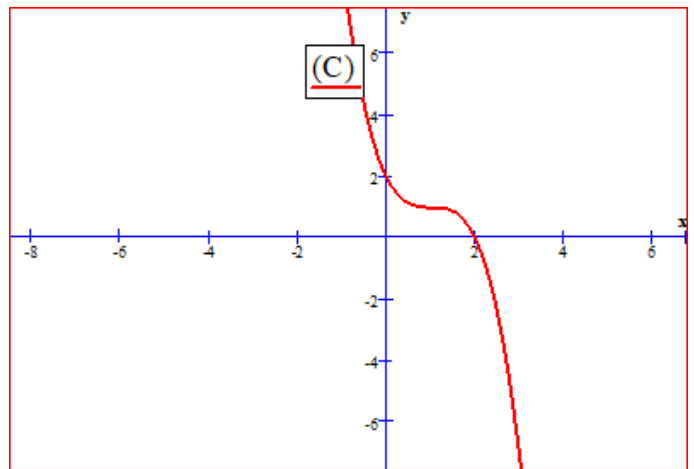
أ- عين  $D$  مجموعة تعريف الدالة  $h$  .

ب-تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $h(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} + 1$  ،

ج- بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يسمح لنا بالانتقال من  $(C_f)$  إلى  $(C_h)$  .

#### التمرين -4-

$g$  دالة معرفة على  $R$  بتمثيلها البياني  $(C)$  كما هو موضح في الشكل :



1. عين العبارة المناسبة للدالة  $g$  .

$$g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1, \quad g(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 2, \quad g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

2. احسب نهايات  $g$  عند حدود مجالات تعريفها .

3. أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  . و شكل جدول تغيراتها .

4. احسب  $g(2)$  ثم استنتج إشارة كل من  $g(x)$  و  $g(-x)$  على  $R$  .

II • الدالة المعرفة على المجموعة  $R - \{-1\}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في

معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

9. احسب نهايات  $f$  . استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .

10. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R - \{1\}$  ؛ يكون :  $f'(x) = \frac{2g(-x)}{(x^2 + 1)^3}$  .

11. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

12. بين أنه ؛ من أجل كل  $x$  من  $R - \{-1\}$  ؛  $f(x) = 2x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2}$  .

13. أ- بين أن  $(\Delta)$  الذي  $y = 2x + 2$  معادلة له مستقيم مقارب  $(C_f)$  .

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  .

14. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-0.3 < \alpha < -0.2$  . فسر النتيجة هندسيا .

15. أنشئ  $(\Delta)$  المنحنى  $(C_f)$  .

ناقش ؛ حسب قيم  $m$  ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة :  $f(x) = 2x + m$

### التمرين -5-

I • دالة معرفة على  $R$  بـ  $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 3$  ،  $(C)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  كما هو موضح في الشكل :  $(T)$  هو مماس المنحنى  $(C)$  عند النقطة  $A(1; -2)$  و  $(D)$  هو مماس المنحنى  $(C)$  عند النقطة  $B(2; -1)$  .

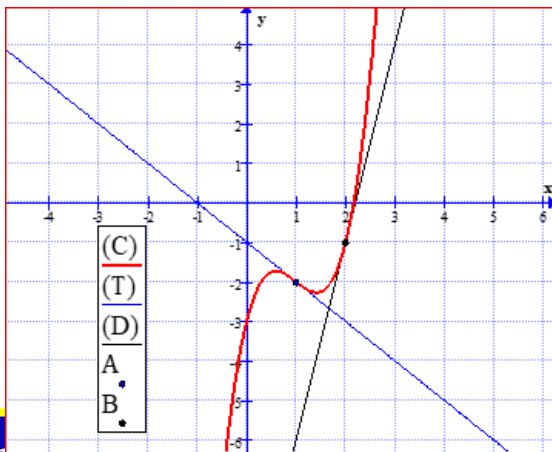
1. خمن وجود نقطة انعطاف للمنحنى  $(C)$  ثم اثبت صحة تخمينك حسابيا .

2. عين بيانيا  $g'(2)$  و  $g'(1)$  و معادلة لكل من  $(T)$  و  $(D)$  .

3. بين أن  $g(x) = 0$  تقبل في  $R$  حلا وحيدا  $\alpha$  (بيانيا) .

4. تحقق حسابيا أن :  $2 < \alpha < 2.3$  .

5. استنتج إشارة  $g(x)$  على  $R$  .



(II) •  $f$  الدالة المعرفة على  $R - \{1\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. احسب نهايات  $f$  عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها ثم استنتج المستقيم المقارب العمودي لـ  $(C_f)$ .

2. تحقق أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $R - \{1\}$  ؛ يكون:  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$ .

3. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها.

4. بين أنه ؛ من أجل كل  $x$  من  $R - \{1\}$  ؛  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$ .

5. أ- بين أن  $(\Delta)$  الذي  $y = 2x + 1$  معادلة له مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$ .

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

6. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\beta$  حيث:  $0 < \beta < 0.5$  و فسر النتيجة هندسيا.

7. أنشئ  $(\Delta)$  المنحنى  $(C_f)$ .

8. عين قيم الوسيط الحقيقي  $m$  التي من أجلها تكون المعادلة  $f(x) = 2x + m$  تقبل حلين.

(III) •  $h$  الدالة المعرفة على  $R - \{1\}$  كما يلي:  $h(x) = \frac{2x^2 - x}{x-1}$  و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و م  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. بين أنه ؛ من أجل كل  $x$  من  $R - \{1\}$  ؛  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}$ .

2. أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)]$  ماذا تستنتج بالنسبة لـ  $(C_f)$  و  $(C_g)$ .

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(C_g)$ .

(IV) •  $k$  الدالة المعرفة على  $R - \{1\}$  بـ  $k(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 - x + 2}{(x-1)^2}$  و  $(C_k)$  تمثيلها البياني في معلم م و م

1. عين قيمة العدد الحقيقي  $a$  بحيث من أجل كل  $x$  من  $R - \{1\}$  ، يكون  $k(x) = f(x) + a$ .

2. بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يسمح لنا بالانتقال من  $(C_f)$  إلى  $(C_k)$ .

(V) •  $u$  الدالة المعرفة على المجموعة  $R - \{1\}$  بـ:  $u(x) = [f(x)]^2$ .

❖ ادرس تغيرات الدالة  $u$  و شكل جدول تغيراتها. (دون حساب عبارة  $u$ )

وفقكم الله

