



Rahmani Imed



دراسة دالة عددية

مع حل مقترح

السنة الثانية ثانوي

رياضيات | تقني رياضي | علوم تجريبية

من إعداد الأستاذ: رحمانى عماد

www.dzexams.com

التمرين

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين الأعداد الحقيقية بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

(2) احسب النهايات عند أطراف مجال التعريف و فسر النتائج بيانيا.

(3) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1; +\infty[$ فإن $f(x) > 0$.

(5) بين أن المسقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

(6) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

(7) اكتب معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة (-1) .

(8) بين وجود مماسين لـ (C_f) موازيين لمحور الفواصل يطلب تعيين معدلتيهما.

(9) بين أنه لا يوجد نقط تقاطع لـ (C_f) مع محور الفواصل.

(10) عين نقطة تقاطع (C_f) مع محور الترتيب.

(11) بين أنه من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $f(1-x) + f(1+x) = -2$. ماذا تستنتج؟

(12) أنشئ كل من (Δ) و (T) و (C_f) .

(13) ناقش بياناً حسب قيم العدد الحقيقي m حلول المعادلة $x^2 - x(3+m) + 3+m = 0$

(14) نعتبر الدالة g المعرفة بـ:

$$g(x) = f(|x|)$$

-بين أن الدالة g زوجية ثم أنشئ (C_g) انطلاقاً من (C_f) .

(1) تعيين لأعداد الحقيقية:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{ax(x-1) + b(x-1) + c}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + x(-a+b) - b + c}{x-1}$$

بالمطابقة نجد:

$$a = 1$$

$$-a + b = -3 \quad b = -2$$

$$-b + c = 3 \quad c = 1$$

إذن:

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1}$$

(2) النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = -\infty$$

• التفسير البياني:

$x = 1$ مستقيم مقارب موازي لمحور الترتيب بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

(3) دراسة إتجاه التغير:

• المشتقة:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

• إشارة المشتقة:

إشارة المشتقة من إشارة البسط

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

• جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	
$f(x)$	$-\infty$	-3	$-\infty$	1	$+\infty$

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ و $[2; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]0; 1[$ و $]1; 2]$.

(4) إثبات أن $f(x) > 0$:

من جدول التغيرات نلاحظ أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1; +\infty[$ فإن $f(x) \geq 1$ أي $f(x) > 0$.

(5) المستقيم المقارب المائل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - 2 + \frac{1}{x-1} - (x-2) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

(6) الوضع النسبي :

إشارة الفرق:

$$f(x) - y = \frac{1}{x-1}$$

إشارة الفرق من إشارة المقام.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	○	+
$f(x) - y$	-	○	+
الوضع النسبي	المنحنى تحت المستقيم		المنحنى فوق المستقيم

(7) معادلة المماس:

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

$$(T): y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

(8) برهان وجود مماسين موازين لمُحور الفواصل:

مماس موازي لمُحور الفواصل يعني أن معامل توجيهه معدوم أي أن:

$$f'(x_0) = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

إذن يوجد مماسين موازين لمُحور الفواصل عند النقطتين ذات الفاصلتين $x_1 = 0$ $x_2 = 2$ معدلتاهما:

$$y_2 = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$y_2 = 1$$

$$y_1 = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y_1 = -3$$

(9) نقط التقاطع مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = 0$$

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (3) = -3$$

لا يوجد حلول إذن لا توجد نقط تقاطع لـ (C_f) مع محور الفواصل.

(10) نقطة التقاطع مع محور الترتيب:

$$f(0) = -3$$

إذن نقطة تقاطع (C_f) مع محور الترتيب هي $(0; -3)$

(11) مركز التناظر:

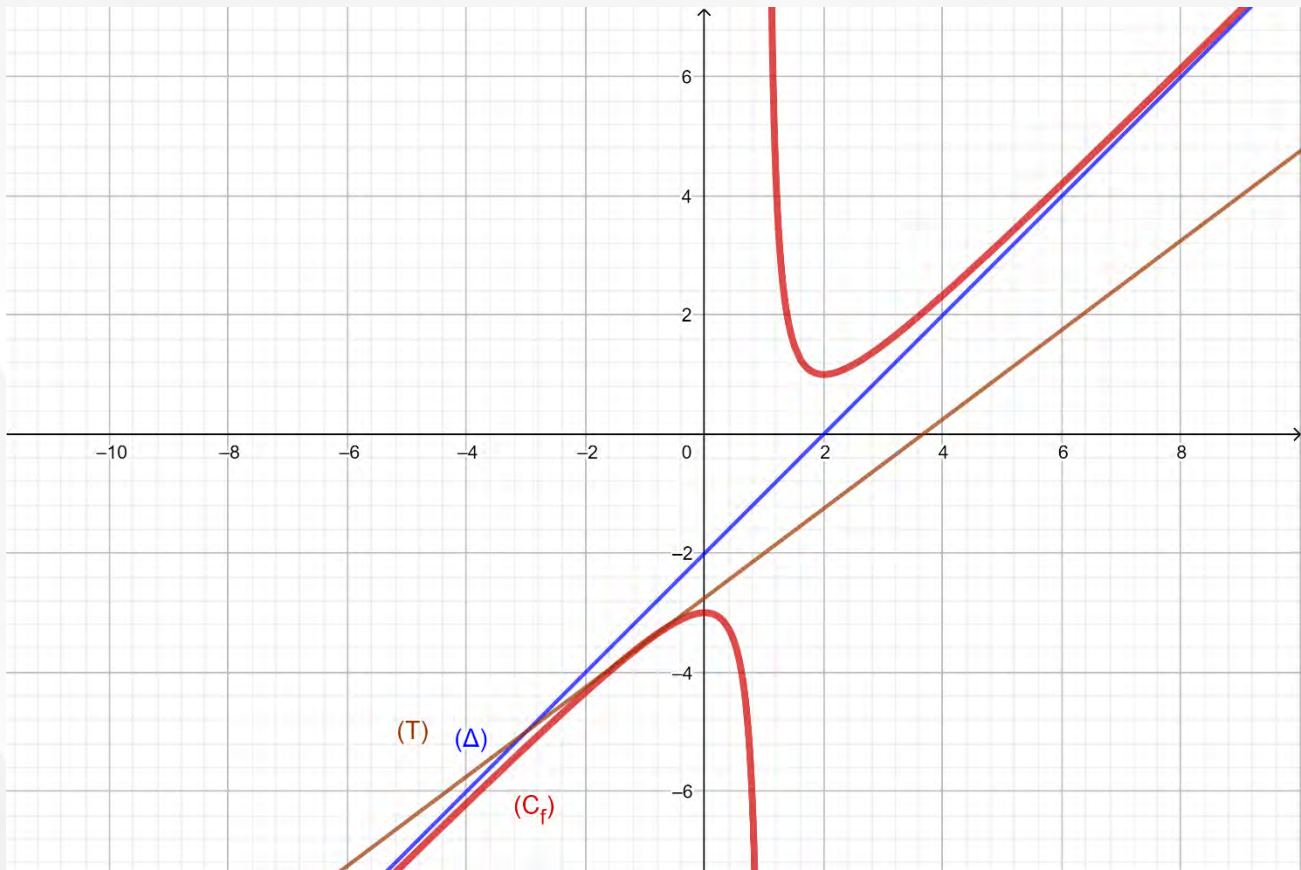
$$f(1-x) + f(1+x) = \frac{(1-x)^2 - 3(1-x) + 3}{(1-x) - 1} + \frac{(1+x)^2 - 3(1+x) + 3}{(1+x) - 1}$$

$$f(1-x) + f(1+x) = \frac{1+x^2 - 2x - 3 + 3x + 3}{-x} + \frac{1+x^2 + 2x - 3 - 3x + 3}{x}$$

$$f(1-x) + f(1+x) = \frac{-1 - x^2 + 2x + 3 - 3x - 3}{x} + \frac{1 + x^2 + 2x - 3 - 3x + 3}{x}$$

$$f(1-x) + f(1+x) = \frac{4x - 6x}{x} = \frac{-2x}{x} = -2$$

• الاستنتاج: النقطة $(1; -1)$ مركز تناظر لـ (C_f) .



$$x^2 - x(3+m) + 3 + m = 0$$

$$x^2 - 3x - xm + 3 + m = 0$$

$$x^2 - 3x + 3 - m(x - 1) = 0$$

$$x^2 - 3x + 3 = m(x - 1)$$

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = m$$

$$f(x) = m$$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y = m$:

• $m \in]-\infty; -3[$: يوجد حلين مختلفين في الإشارة.

• $m = -3$: يوجد حل وحيد معدوم.

• $m \in]-3; 1[$: لا يوجد حلول.

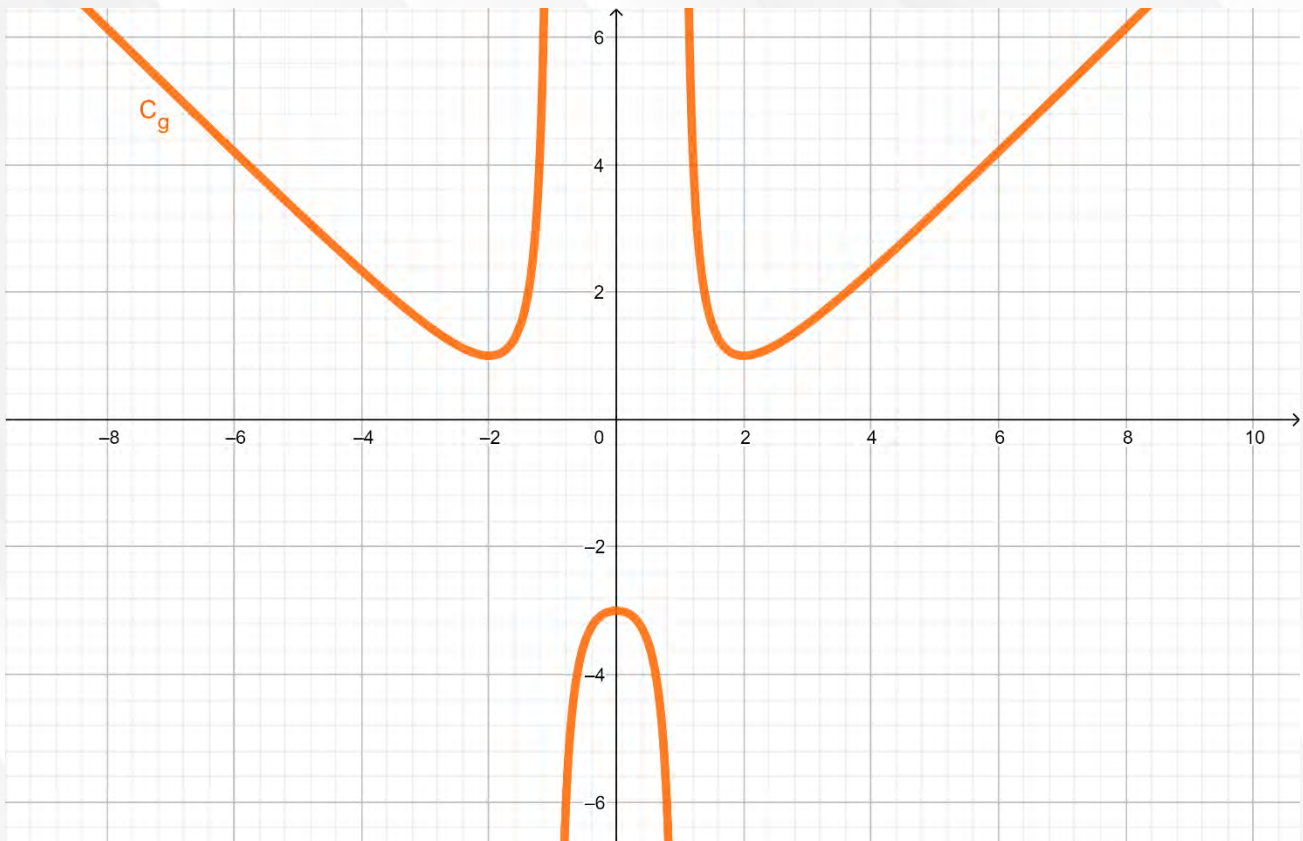
• $m = 1$: يوجد حل وحيد موجب.

• $m \in]1; +\infty[$: يوجد حلين موجبين.

(14) نبين أن الدالة زوجية:

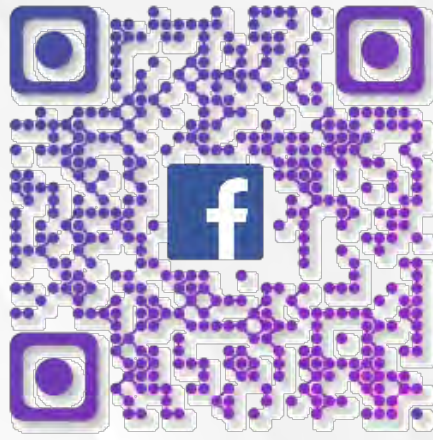
$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

إذن الدالة g زوجية و تمثيلها البياني:



♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

لمزيد من الدروس و التمارين امسح QR code



أو اضغط على الشعار

