

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (نقاط 4,5)

نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة ب : $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1} - 1; \alpha \in]-1; 1[\setminus \{0\}$$

نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$$

- (1) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α .
- (2) هل المتتالية (V_n) متقاربة ؟
- (3) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n ، حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
- (4) عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$.
- استنتج عندئذ U_n بدلالة n ثم بين أن (U_n) متقاربة.
- (5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

أ - بين أن : $p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب - عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $p_n \leq 3^{-44}$.

التمرين الثاني (4, 5 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $7x - 3y = 6$

- (1) أ - أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 5[7]$
- ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

- (2) حل في $\mathbb{Z}^2$ الجملة : $\begin{cases} 7x - 3y = 6 \\ PGCD(x, y) = 3 \end{cases}$

أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 11 .

ب - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $5^{2n} - 3^n \equiv 0[11]$.

- ج- حل في N^2 الجملة : $\begin{cases} 7x - 3y = 6 \\ 2(2018)^{2x} + (2016)^{5y} \equiv 0[11] \end{cases}$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

- (1) أوجد العددين z_1 و z_2 الجذران التربيعيان للعدد المركب $L = 2 - 2i\sqrt{3}$ ثم أكتبهما على الشكل الأسّي .

(2) نعتبر النقط C, B, A ذات اللوح $z_C = \sqrt{3} - i, z_B = \sqrt{3} + i, z_A = 2i$
 أ- بين أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ و عين قيما للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{AC})$
 ب- استنتج طبيعة الرباعي $OABC$.

(3) أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A إلى O و يحول C إلى B محددا عناصره المميزة.

ب - تحقق أن SoS تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}$ و أحد أقياسه زاويته π .

ج- نضع $T = \underbrace{SoSo \dots SoS}_{n \text{ مرة}}$

4- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون T تحاكيا نسبته سالبة.

التمرين الرابع: (6 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(0) = 1$ و من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 2 cm)

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ- أدرس قابلية الاشتقاق ل f عند 0 .

ب- أثبت أن f قابلية للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ج- استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$, تحقق أن: $4,6 < \alpha < 4,7$

(4) أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

(5) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أ- أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' , استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g , استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

ج- أحسب $f(6)$ ثم أنشئ (C_f) و (T)

(6) عدد طبيعي غير معدوم باستعمال التكامل بالتجزئة

أ- أحسب $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x \, dx$ بدلالة n .

ب- استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ ب cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المماس (T) و

المستقيمين ذا المعادلتين $x = 1$ و $x = \frac{1}{n}$ ثم

- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 4 كرات تحمل رقم a و 5 كرات تحمل الرقم $(a-1)$ ، $a \in \mathbb{R}$.
 لسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الصندوق .

(1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A : سحب 3 كرات تحمل نفس العدد.

B : سحب 3 كرات منها كرتين بالضبط تحملان نفس العدد.

(2) ليكن X المتغير العشوائي المرتبط بمجموع الأعداد المسجلة على الكرات المسحوبة لكل سحب.

أ- حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

ب- حدد قانون الاحتمال X .

ج- احسب الأمل الرياضي بدلالة a و حدد a من أجل $E(x)=0$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(1) أوجد D_{119} مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 119 .

ب) عين الثنائيات $(a;b)$ من $(\mathbb{N}^*)^2$ حيث :

$$\begin{cases} PGCD(a;b) = 17 \\ PPCM(a;b) = 2023 \end{cases}$$

(2) لتكن في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 289x - 34y = 2023 \dots$

أ) أوجد $PGCD(289;34)$ ثم استنتج ان المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) بين انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فان y مضاعف للعدد 17 . ثم استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E)

ج) أوجد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y \leq 52$.

4) n عدد طبيعي فردي ، باقي قسمته على 17 هو 16 فما هو باقي قسمته على 34 .

التمرين الثالث: (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب

$$Z_C = -4 + i, \quad Z_A = -i, \quad Z_B = 2 + 3i$$

(1) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$

ب) عين طول و عمدة العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) نعتبر التحويل النقطي (T) في ' سنوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث:

$$Z' = iZ - 1 - i$$

- (أ) عين طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.
 (ب) ماهي صورة النقطة B بالتحويل T .
 (3) لتكن D النقطة ذات اللاحقة $Z_D = -6 + 2i$.
 (أ) بين أن النقط A, B, C على استقامة.
 (ب) عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C الى النقطة D .
 (ج) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B الى D .
التمرين الرابع: (7 نقاط)

لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $g(x) = 1 + x + e^x$

- (1) ادرس تغيرات الدالة g
 (2) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α . تحقق أن α من المجال $[-1.3; -1.2]$
 (3) حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.
 (II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي (Γ) المنحنى البياني لها
 (1) (أ) اكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة f . (ب) برهن أن $f(\alpha) = 1 + \alpha$.
 (ج) برهن أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x$.
 (د) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O مبدأ المعلم، ثم ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة للمماس (T) .

- (هـ) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى (Γ) و (Δ) (تؤخذ $2cm$ كوحدة).
 (H2) نقطة فاصلتها x (حيث $x > 0$) وترتيبها معدوم، المستقيم الموازي للمحور (y') والمار من H يقطع (Γ) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N ، نضع $\varphi(x) = MN$.
 (أ) بين أن $\varphi(x) = \frac{x}{1+e^x}$.

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\varphi'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cdot g(-x)$.

- واستنتج أن MN يكون أكبر ما يمكن عندما $x = -\alpha$.
 (ج) برهن أن $f(-\alpha) = 1$.
 (د) برهن أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ) . اكتب معادلته ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

(3) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $me^x + m + x = 0$

(4) (أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ لدينا: $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$.

(ب) استنتج باستعمال المتباينة السابقة حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$x = -\alpha \text{ و } x = 1, y = 0$$

انتهى الموضوع الثاني