



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (04,5 نقاط) :

1/ (U_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $U_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 4 \left(-\frac{1}{U_n} + 1 \right)$

أ) احسب الحدود : U_1, U_2, U_3 .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : U_n > 2$

ج) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) على $\mathbb{N}$. ثم برر تقاربها ، عين نهايتها ؟

2/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$

أ) بين أن المتتالية (V_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول .

ب) عبر عن V_n ثم U_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3/ احسب بدلالة n عن المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{2}{U_0 - 2} + \frac{2}{U_1 - 2} + \dots + \frac{2}{U_n - 2}$

4/ احسب الجداء P حيث : $P = e^{2v_0} \times e^{2v_1} \times \dots \times e^{2v_{2024}}$

التمرين الثاني (04 نقاط) :

ما هي الإجابات الصحيحة من بين الإجابات المقترحة التالية ؟ برر

الرقم	السؤال	الجواب (أ)	الجواب (ب)	الجواب (ج)
01	$I_n = \int_1^{e^n} x^2 \ln x dx, n \in \mathbb{N}$ التكامل يساوي	$\frac{1}{9}(e^{3n})$	$\frac{1}{3}((3n-1)e^{3n})$	$\frac{1}{9}((3n-1)e^{3n} + 1)$
02	العدد 2023 يكتب	513 في النظام ذي الأساس 20	1207 في النظام ذي الأساس 12	1000010101000 في النظام الثنائي
03	أحد حلول المعادلة التفاضلية $2y' + 6y = 0$ هو f حيث	$f(x) = -2xe^{-3x}$	$f(x) = 2 \cdot e^{-3x}$	$f(x) = e^{-3(x+1)} - 2$
04	إذا كان $Arg(z) = \theta$ و $z' = -5$ و $\theta \in \mathbb{R}$	$Arg(\bar{z} \cdot z') = \pi - \theta$	$Arg(\bar{z} \cdot z') = \theta$	$Arg(\bar{z} \cdot z') = -\pi + \theta$
05	n عدد طبيعي نضع $b = 13n - 1$ و $a = 11n + 3$ القيم الممكنة لـ $PGCD(a; b)$ هي	$\{0; 5; 10; 15; 100\}$	$\{-1; 2; 5; 15\}$	$\{1; 2; 5; 10; 25; 50\}$

التمرين الثالث (04.5 نقاط):

المستوي المركب منسوب للمعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$: .

2- B, A نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A = 2\sqrt{3} + 2i$, $z_B = \overline{z_A}$, علم النقط B, A

3- أكتب كلا من Z_B, Z_A على الشكل الأسّي . برهن أن : $\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

4- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي سالب

5- عين لاحقة النقطة G مرجح النقط O, B, A المرفقة بالمعاملات $1, 1, 2$ على الترتيب .

6- عين ثم أنشئ المجموعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $\left|\frac{Z - 2\sqrt{3} - 2i}{Z - 2\sqrt{3} + 2i}\right| = 1$

- هل G نقطة من المجموعة (E) ؟ .

التمرين الرابع (07 نقاط) :

(*) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كم يلي : $g(x) = 3x - 2 - e^{-x}$

1/ أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2/ أحسب $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

3/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0,81; 0,82[$ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ؟

(**) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 - x^2 + (x+1)e^{-x}$

(C_f) المنحني البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1/ أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2/ أحسب $f'(x)$ ثم بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = xg(x)$

3/ استنتج اتجاه تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4/ بين أن : $f(\alpha) = \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha - 2$ ثم عين قيمة مقربة $f(\alpha)$

5/ ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) والمنحني (Γ) ذو المعادلة $y = x^3 - x^2$.

6/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y]$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

7/ أنشئ بدقة المنحني (C_f) والمنحني (Γ) (في الوثيقة المرفقة).

(***) نعتبر التكامل التالي : $A(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} (f(x) - y) dx$

1/ أحسب $A(\alpha)$

ب/ بين أن : $A(\alpha) = -3\alpha^2 - 4\alpha + 4 + e$.

ج/ استنتج S المساحة المقربة للحيز المحدد بالمستقيمات $x = \alpha, x = -1$ و المنحني (Γ)

الموضوع الثاني : (20 نقطة)

التمرين الأول (05 نقاط):

1/ نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $I_n = \int_0^n (1-x \ln 3) e^{-x \ln 3} dx$

أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $I_n = \frac{n}{3^n}$

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3^n > n^2$ ثم استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

2/ نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) U_n \end{cases}$$

أ/ احسب الحدود : U_2 و U_3

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

ج/ بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ ماذا تستنتج ؟

3/ نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $V_n = \frac{U_n}{n}$

أ/ بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسه وحدها الأول.

ب/ عبر عن V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n ، وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ج/ أحسب المجموع S حيث : $S = 3 + \frac{2}{U_2} + \dots + \frac{2023}{U_{2023}}$

التمرين الثاني (05 نقاط):

1/ يحتوي كيس على 12 كرة منها : 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 , 1 , 2 ,

4 حمراء تحمل الأرقام 1 , 2 , 2 ,

5 خضراء تحمل الأرقام 1 , 2 , 2 , 2 , 0 ,

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس .

نعتبر الحادثتين : A " سحب كرتين من نفس اللون "

B " سحب كرة خضراء على الأقل "

أ/ أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث : A , B , $A \cap B$ هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة العدد $\frac{(-2)^{(a+b+c)}}{4}$ حيث a , b و c هي الأرقام المسجلة في كل سحبة

أ/ أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .

أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

ج - أحسب $P(2e^{2x} - e^x - 3 \geq 0)$

3/ نسحب عشوائيا على التوالي و بالإرجاع n كرة من الكيس

بين أن احتمال الحصول على كرة حمراء على الأقل هو : $P(n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n)$ فسر النتيجة

ما هو أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $P(n) \geq 0,999$

التمرين الثالث (04 نقاط) :

أ/ أدرس حسب قيم العدد n عدد طبيعي بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 11 .

ب/ عين قيم n بحيث : $\begin{cases} n \equiv 6[10] \\ 7^n - n^2 \equiv 0[11] \end{cases}$ و $n < 200$

2/ a عدد طبيعي يكتب في النظام العشري : $a = q r_{n-1} r_{n-2} \dots r_1 r_0$ وبالتالي ينشر :

$\alpha \in \{0;1;2;\dots;n-1\}$ مع $0 \leq r_\alpha < x$ و $0 < q < x$ ، $a = q 10^n + r_{n-1} 10^{n-1} + r_{n-2} 10^{n-2} + \dots + r_2 10^2 + r_1 10 + r_0$

أ/ " باستعمل $10 \equiv -1[11]$ و $10^n \equiv (-1)^n[11]$ بين أن : a يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا قبل العدد الناتج من الفرق بين مجموع الأرقام ذات الرتب الزوجية مع مجموع الأرقام ذات الرتب الفردية القسمة على 11

ب/ هل العدد : $a = 202314442973196219541880$ يقبل القسمة على 11 برر باستعمال السؤال السابق؟

ج/ هل العدد a يقبل القسم على 110 (لاحظ : $110 = 11 \times 10$) برّر ؟

التمرين الرابع (06 نقاط):

I g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 + x - x \ln x$

أ/ احسب $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير g ثم شكل جدول تغيراتها

ب/ بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0, +\infty[$ ثم تحقق أن : $3,58 < \alpha < 3,6$

استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$

II نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

(C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{I}, \vec{J})$ (الوحدة هي $2cm$).

1) احسب النهايات عند أطراف مجالات مجموعة التعريف فسر النتائج هذ سيا ؟

2) بين أن f تقبل الاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ و أن $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

أ/ استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول التغيرات

ب/ تحقق أن : $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{2\alpha}$

ب/ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1

ج/ أنشئ بدقة (T) و (C) .

3) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

5) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي : $h(x) = -2(1+x)f(\sqrt{x})$

أ/ عين الدالة H الدالة الأصلية للدالة h التي تحقق : $H(1) = 0$.

ب/ بين مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_h) ومنحنى الدالة h والمستقيمات $x = \alpha$ ، $x = \frac{1}{e}$ و $y = 0$ هي $(8\alpha + 4) cm^2$

انتهى الموضوع الثاني