

الرياضيات
السهلة

حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية في البكالوريا

شعبة : علوم تجريبية

✈ إنجاز : خالد بخاخشة

[باك 2009] [م 1]

01

التمرين رقم

(I) h دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها .

(3) أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

(II) تكن f دالة عددية معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ، ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

ب- باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

ج- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

د- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند النقطة التي فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

(4) أرسم (C_f) .

[باك 2010] [م 1]

02

التمرين رقم

(I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) عين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

(4) أ- أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = \ln(x+a) + b$ حيث a, b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

ب- استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم أرسم (C) و (C_f) .

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ : $g(x) = f(x) - x$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = -\infty$.

(2) أدرس إتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ- أحسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ حلا وحيدا α . تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب- أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ في المعلم السابق .

إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(4) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[\alpha; 1]$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[\alpha; 1]$.

[باك 2011] [م1]

03

التمرين رقم

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل) ،
بقراءة بيانية :

أ- شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب- حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$.

ج- عين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

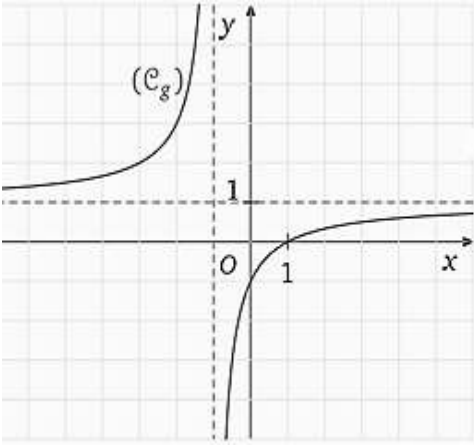
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

ب- أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) باستعمال الجزء (I) السؤال ج ، عين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.



[باك 2012] [م1]

04

التمرين رقم

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ- بين المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.4 < \alpha < -3.5$ و $-1.1 < \beta < -1$.

(5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بين أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- بين أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

(7) الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$.

بين أنه من كل $x \in]-\infty; 0[$: $g'(x) = f(x)$.

[باك 2013] [م2]

05

التمرين رقم

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) إستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm)

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسر النتيجة بيانياً.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ- بين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلاً حلاً وحيداً α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ- أحسب x_0 .

ب- أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

ج- عين بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين.

[باك 2014] [م1]

06

التمرين رقم

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجةين هندسياً.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

ب- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.
(3) أنشئ (T) و (C_f) .

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$.

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج؟

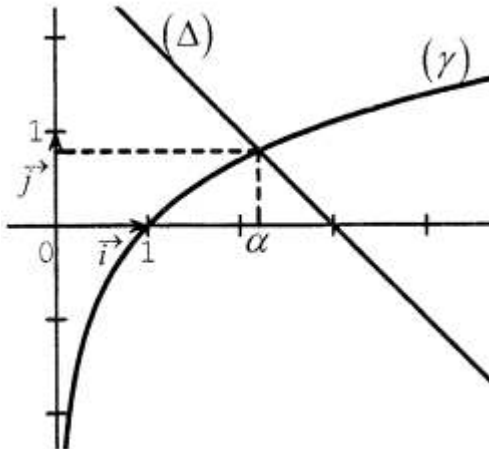
ب- أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) .

جـ- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

[باك 2015] [1م]

07

التمرين رقم



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ للـ (γ) والمستقيم ذو المعادلة $y = -x + 3$ للـ (Δ) هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (γ) .

(1) بقراءة بيانية حدد وضعيت (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0; +\infty[$.

(2) g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(3) تحقق أن: $2, 2 < \alpha < 2, 3$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(4) أدرس وضعيت (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل، ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

[باك 2016] [د1] [1م]

08

التمرين رقم

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

(1) أدرس إتجاه تغير الدالة g .

(2) أحسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

بـ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فصلتها 1 .

(4) بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y = x - 1$ معادلة له .

بـ أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

(5) أرسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C) .

(6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له .

أـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

بـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$.

[باك 2016][د2][م1]

09

التمرين رقم

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,33 < \alpha < -0,34$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1; +\infty[$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ بين أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ و أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسيا .

بـ بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$ ،

جـ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

دـ أرسم المنحنى (C_f) . (نقبل أن : $f(\alpha) = 3,16$)

(2) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1; 1[$ بـ : $k(x) = f(-|x|)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق .

أـ بين أن الدالة k زوجية .

بـ بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه . (دون دراسة تغيرات الدالة k)

جـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $k(x) = m$.

[باك 2017][م1]

10

التمرين رقم

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن الدالة f فردية ثم فسر ذلك بيانيا .

(2) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب .

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$

(5) بين المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = \frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(6) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

[باك 2017] [د إ] [1م]

11

التمرين رقم

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ ثم فسر النتيجةين بيانيا .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ، $f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$ ، ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها ، ثم أنشئ (C_f) .

12

التمرين رقم

[باك 2018] [1م]

(I) g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$

(C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل المقابل :

- أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

(II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

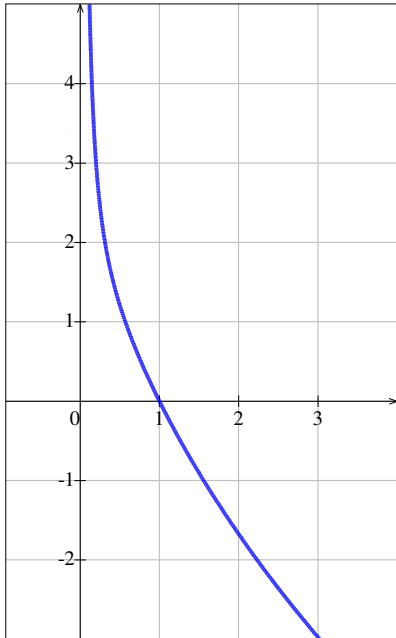
ثم فسر النتيجةين بيانيا .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ ، ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن $y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة

تقاطعها مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

(4) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلين متمايزين .



- f الدالة العددية المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا .
بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) أدرس إتجاه تغير الدالة f على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " في المعلم السابق .
أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .
بـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) .
- (4) أرسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .
- (5) g الدالة المعرفة على $]-1; 0[\cup]-1; -\infty[$ بـ : $g(x) = f(-2x)$. دون حساب عبارة $g(x)$ حدد إتجاه تغير الدالة g .

- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$. الوحدة $2cm$.
- (1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا ثم بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
بـ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
جـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- (2) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$.
أـ بين أن g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.
بـ أحسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.
- (3) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
بـ استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
- (4) بين أن التمثيل البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، يطلب تعيين معادلتها له .
- (5) أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .
- (6) الدالة العددية h معرفة على $]0; +\infty[\cup]-\infty; 0[$ بـ : $h(x) = -|x| + 1 + \frac{\ln|x|}{x^2}$.
أـ بين أن h دالة زوجية .
بـ إشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة إنطلاقا من (C_f) . (لا يطلب إنشاء (C_h))

(I) $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$: كما يلي : $]-1; +\infty[$ المجال

(1) النهايات : $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] = +\infty$

(2) الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)(x+1) + 1}{x+1} = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغيّر الدالة h :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $x+1 > 0$ و $1 + 2(x+1)^2 > 0$ ومنه $h'(x) > 0$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة h :

x	-1	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

حساب $h(0)$ وإستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

$$h(0) = 0^2 + 2 \times 0 + \ln(0+1) = 0$$

• إشارة $h(x)$:

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

(II) $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$: بـ : $]-1; +\infty[$ المجال

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = -\infty \end{cases} \text{ : لأن } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

بـ باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، نبرهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

$$\text{نضع } t = \ln u \text{ فيكون } u = e^t \text{ ومنه : } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^t}{t} \right)} = 0$$

جـ- إستنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 \text{ : لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

د- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0$$

التفسير البياني : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

هـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x-1)$.

$$f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1} \quad \text{وبالتالي إشارة } f(x) - (x-1) \text{ من إشارة } -\ln(x+1) \text{ لأن } x+1 > 0 .$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$		+	0 -
الوضع النسبي		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0; -1)$.	(C_f) تحت (Δ)
		(C_f) فوق (Δ)	

(2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - 1 \times \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = 1 - \left(\frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right) = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

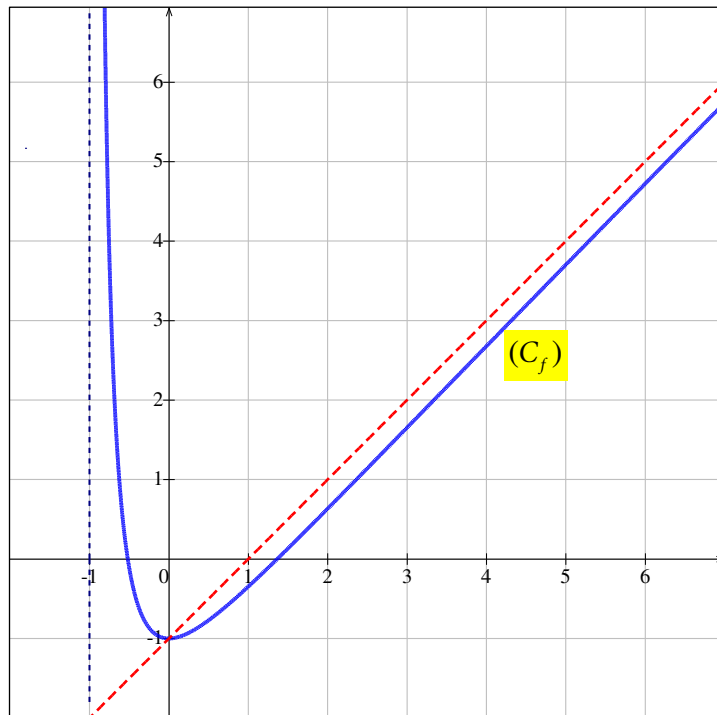
x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

(3) تبين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

$$\text{الدالة } f \text{ مستمرة و متزايدة على المجال } [0; +\infty[\text{ و } [3.3; 3.4] \subset [0; +\infty[\text{ ولدينا } \begin{cases} f(3.3) \approx 1.96 \\ f(3.4) \approx 2.06 \end{cases} \text{ أي } f(3.3) < 2 < f(3.4)$$

وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا في المجال $[3.3; 3.4]$.

(4) الرسم :



(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$.

(1) النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \ln(2x-1)] = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [1 + \ln(2x-1)] = -\infty$ ،

(2) تبين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f قابلة للاشتقاق على I ، و من أجل كل x من I ، $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1 > 0$ أي $f'(x) > 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال I .
جدول تغيرات الدالة f :

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة $f'(x) = 1$ في I .

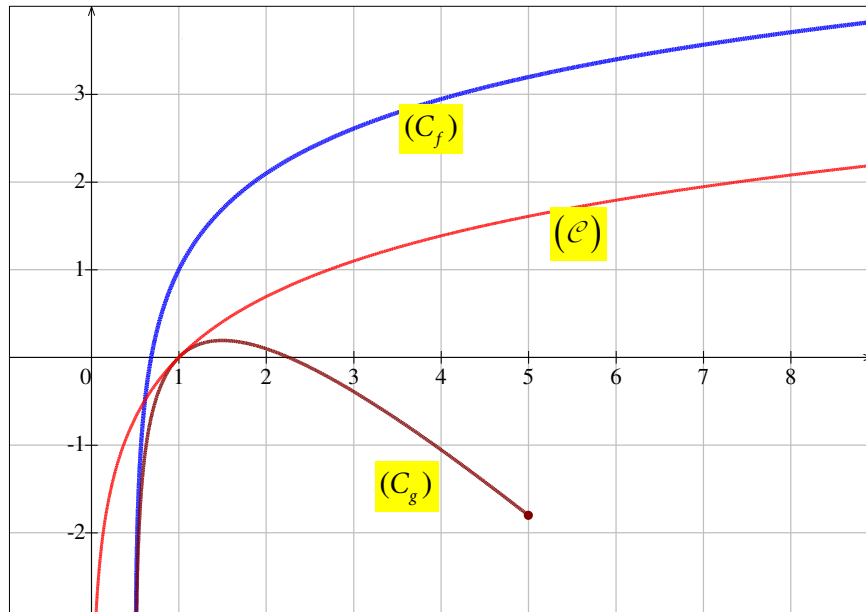
$f'(x) = 1$ تكافئ $\frac{2}{2x-1} = 1$ تكافئ $2 = 2x-1$ أي $x = \frac{3}{2}$.

(4) أ- من أجل كل x من I : $f(x) = 1 + \ln(2x-1) = 1 + \ln\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = 1 + \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ، ومنه : $a = -\frac{1}{2}$ و $b = 1 + \ln 2$.

ب- لدينا : $f(x) = h(x+a) + b$ حيث $h(x) = \ln x$ ومنه (C_f) هو صورة $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 + \ln 2 \end{pmatrix}$.

الرسم :



(II) الدالة العددية المعرفة على المجال I بـ : $g(x) = f(x) - x$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [1 - x + \ln(2x - 1)] = -\infty \quad (1)$$

$$\left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 : \text{تذكر أن} \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) \left[\frac{1 - x}{2x - 1} + \frac{\ln(2x - 1)}{2x - 1} \right] = -\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g على I :

$$g'(x) = -1 + \frac{2}{2x - 1} = \frac{-2x + 3}{2x - 1} \quad \text{و } I, \text{ الدالة } g \text{ قابلة للاشتقاق على } I,$$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x - 1 > 0$ وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x + 3$.
إشارة $g'(x)$:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -

الدالة g متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right]$ ومتناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty \right]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$		$-\frac{1}{2} + \ln 2$	$-\infty$

(3) أـ لدينا : $g(1) = 0$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty \right]$ و $g\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0,19$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty \right]$ حلا وحيدا α .

التحقق أن $2 < \alpha < 3$:

لدينا : $\begin{cases} g(2) \approx 0,09 \\ g(3) \approx -0,39 \end{cases}$ أي : $g(2) \times g(3) < 0$ ومنه $2 < \alpha < 3$.

بـ رسم المنحنى (C_g) : أنظر الشكل السابق .

(4) إشارة $g(x)$:

x	$\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$
$g(x)$		-	0 +	0 -

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لدينا : $f(x) - y = f(x) - x = g(x)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$.

إذن : من أجل $x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right] \cup]\alpha; +\infty[$ ، يكون (C_f) واقعا أسفل (d) .

من أجل $x \in]1; \alpha[$ ، يكون (C_f) واقعا أعلى من (d) .

(C_f) يقطع (d) في النقطتين $A(1;1)$ و $B(\alpha; \alpha)$.

(5) الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$ ومنه : من أجل كل $x \in]1; \alpha[$: $f(x) \in]f(1); f(\alpha)[$.

ولدينا : $f(1) = 1$ و $f(\alpha) = g(\alpha) + \alpha = \alpha$ ، إذن : من أجل كل $x \in]1; \alpha[$: $f(x) \in]1; \alpha[$.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

أ- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	1	$+\infty$	1

ب- حل المتراجحة $g(x) > 0$ بيانيا :

$g(x) > 0$ تكافئ $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. $x \in$

ج- تعيين قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$:

$0 < g(x) < 1$ تكافئ $]1; +\infty[$. $x \in$

(II) الدالة f معرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = 1$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

(2) أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1 \times (x+1) - 1 \times (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{(x+1)^2} \left(\frac{2x}{x-1} \right) = \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	1

(3) باستعمال الجزء (I) السؤال ج ، تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.

لدينا حسب الجزء (I) السؤال ج : من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ ، فإن $0 < \frac{x-1}{x+1} < 1$ ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$.

04

حل مقترح للتمرين

f الدالة المعرفة على المجال $]0; -\infty[$ ب : $f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

$$(1) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محاور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

$$\text{بـ} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = 0 \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty$$

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; -\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; -\infty[$:

$$f'(x) = 1 + 6 \left(\frac{-1}{\frac{x}{x-1}} \right) = 1 - \frac{6}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{6}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)-6}{x(x-1)} = \frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; -\infty[$ ، $\frac{x}{x-1} > 0$ ومنه $x(x-1) > 0$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; -\infty[$ ، $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ ، ومنه :

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$		$+$	$-$
$f'(x)$		$+$	$-$

الدالة f متزايدة على المجال $]-2; -\infty[$ ومتناقصة على المجال $]0; -2[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$3 + 6\ln\frac{2}{3}$	$-\infty$

(3) أـ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته له : $y = x + 5$ هو مستقيم

مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - y = f(x) - (x+5) = 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; -\infty[$ ، $x > x-1$ ومنه $\frac{x}{x-1} < 1$ وبالتالي $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) < 0$.

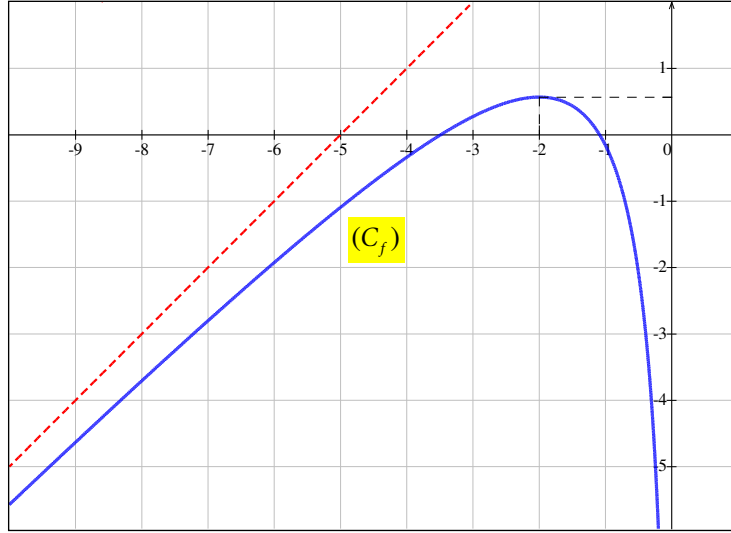
إذن نستنتج أن (C_f) يقع تحت (Δ) .

(4) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$ و $-1.1 < \beta < -1$.

• الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; -2[$ و $]-\infty; -2[\subset]-3.5; -3.4[$ و $\begin{cases} f(-3.4) \approx 0,05 \\ f(-3.5) \approx -0,01 \end{cases}$ أي $f(-3,4) \times f(-3,5) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$ و يحقق $f(\alpha) = 0$.

• الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-2; 0[$ و $]-2; 0[\subset]-1,1; -1[$ و $\begin{cases} f(-1.1) \approx 0,02 \\ f(-1) \approx -0,16 \end{cases}$ أي $f(-1,1) \times f(-1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي β حيث $-1.1 < \beta < -1$ و يحقق $f(\beta) = 0$.

(5) الرسم :



(6) أـ لدينا : $A\left(-1; 3 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

تبين أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين A و B تحقق المعادلة المعطاة.

$$y_B = \frac{1}{2}x_B + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4} = \frac{5}{2} + 6\ln\frac{3}{4}, \quad y_A = \frac{1}{2}x_A + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4} = 3 + 6\ln\frac{3}{4}$$

(أويمكن كتابة معادلة للمستقيم (AB) والحصول على المعادلة المعطاة)

بـ تبين أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

لدينا : معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ وبالتالي نحل في المجال $]-\infty; 0[$ المعادلة $f'(x) = \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)} = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } x^2 - x - 12 = 0.$$

$$\text{المعادلة } f'(x) = \frac{1}{2} \text{ تقبل في المجال }]-\infty; 0[\text{ حل وهو } x_0 = -3.$$

إذن : المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0; y_0)$ مع $y_0 = f(-3) = 2 + 6\ln\frac{3}{4}$.

(7) الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 0[$ ومن أجل كل $x \in]-\infty; 0[$:

$$g'(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6x}{x(x-1)} - \frac{6}{1-x} = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-1} = f(x)$$

(I) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} \right) = +\infty \end{cases} \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} - 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

$$\text{الدالة } g \text{ قابلة للاشتقاق على المجال }]-1; +\infty[\text{ ، و } g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ، لأنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ فإن $x+1 > 0$ و $x+2 > 0$.

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

الدالة g متناقصة على المجال $]-1; 0[$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

(2) من جدول التغيرات : من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) \geq 4$ وبالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} \right) [x(x+1) - 1 + 2\ln(x+1)] = -\infty \text{ (1)}$$

التفسير البياني : المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty \text{ بـ.}$$

(2) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{-2}{x+1}(x+1) - 1 \times (1-2\ln(x+1))}{(x+1)^2} = 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$:

لدينا : من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ وبالتالي $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

جـ- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$:

$$\text{الدالة } f \text{ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال }]-\infty; 1[\text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة}$$

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-1; +\infty[$ حلا وحيدا α .

التحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

لدينا : $]-1; +\infty[\subset]0; 0,5[$ و $f(0) = -1$ أي $f(0) \times f(0,5) < 0$ ومنه $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

لدينا : $f(x) - x = \frac{-1 + 2 \ln(x+1)}{x+1}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-1 + 2 \ln(x+1)$.

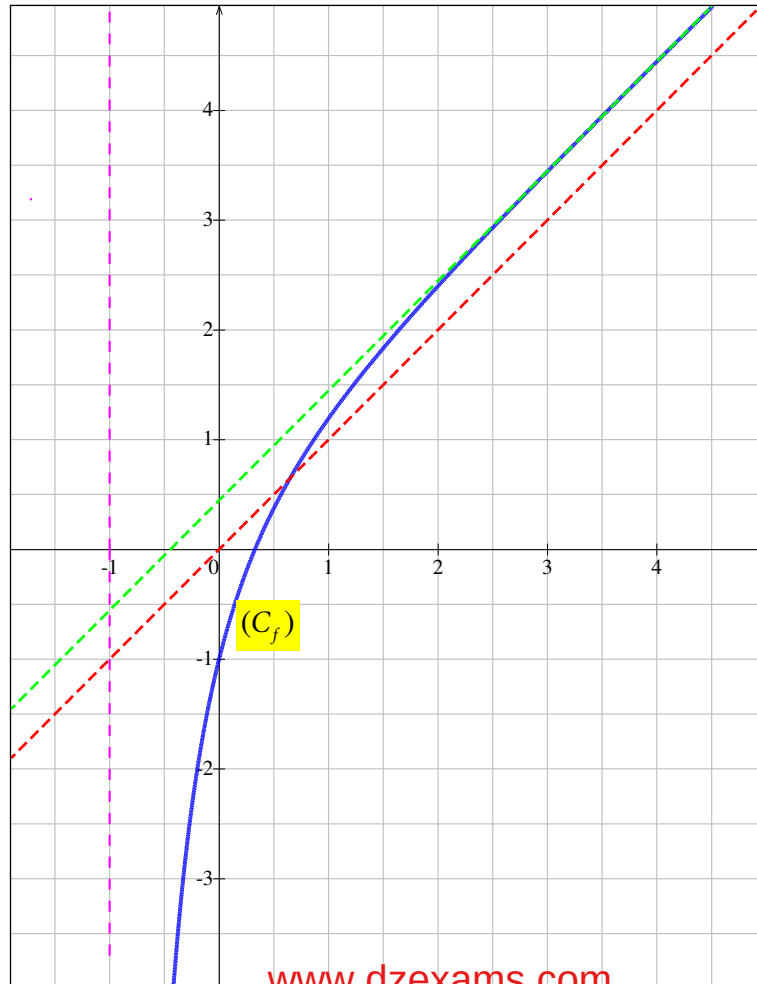
x	-1	$-1 + \sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x) - y$		0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ) (C_f) يقطع (Δ) في $A(-1 + \sqrt{e}; -1 + \sqrt{e})$ (C_f) فوق (Δ)		

(4) المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ- حساب x_0 :

لدينا : $f'(x_0) = 1$ تكافئ $\frac{g(x_0)}{(x_0 + 1)^2} = 1$ تكافئ $g(x_0) = (x_0 + 1)^2$ تكافئ $2 \ln(x_0 + 1) = 3$ تكافئ $x_0 = -1 + \sqrt{e^3}$.

ب- الرسم :



جـ- بيانيا ، حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$.

اذن : تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين إذا وفقط إذا كان $0 < m < \frac{2}{\sqrt{e^3}}$.

06

حل مقترح للتمرين

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2 \ln x}{x} \right) = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad , \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2 \ln x}{x} \right) = 1$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ، ومن أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 1 \times 2 \ln x}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1 - \ln x$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

الدالة f متزايدة على المجال $]0; e]$ ومتناقصة على المجال $[e; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	$1 + 2e^{-1}$	$+\infty$

(2) أـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 1$.

لدينا : $f(x) - y = 1 + \frac{2 \ln x}{x} - 1 = \frac{2 \ln x}{x}$ ، ولأن $\ln x$ إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ ، لأن $\frac{2}{x} > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$		-	0 +
الوضع النسبي		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; 1)$	(C_f) فوق (Δ)
	(C_f) تحت (Δ)		

بـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا : $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ و منه $(T) : y = 2x - 1$.

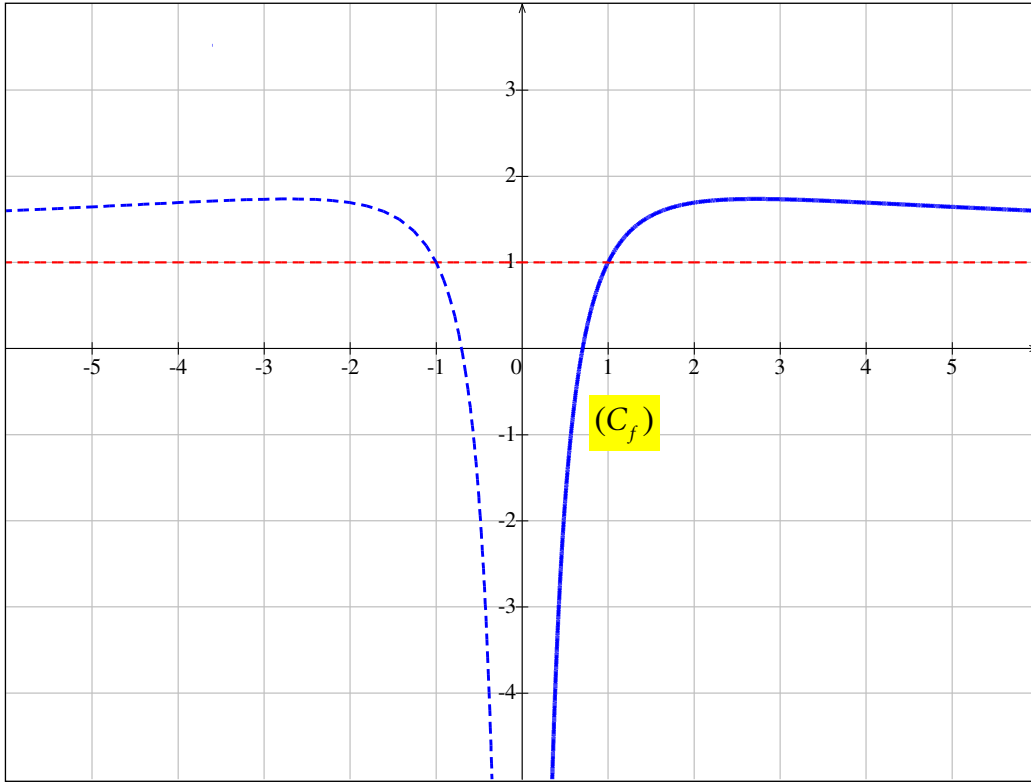
جـ- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ و $]e^{-0.4}; e^{-0.3}[\subset]0; 1[$ و $f(e^{-0.4}) \approx -0,2$ و $f(e^{-0.3}) \approx 0,2$

أي $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا

وحيدا α بحيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

(3) الرسم :



(4) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي : $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$.

أ- من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$h(x) - h(-x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|} - 1 - \frac{2 \ln |-x|}{|-x|} = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|} - 1 - \frac{2 \ln |x|}{|x|} = 0$$

نستنتج أن الدالة h زوجية وتمثيلها البياني (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب .

ب- كيفية إنشاء المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) :

من أجل $x \in]0; +\infty[$ ، يكون $h(x) = f(x)$ وبالتالي (C_h) منطبق على (C_f) .

من أجل $x \in]-\infty; 0[$ ، (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الترتيب لكون الدالة h زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

ج- المناقشة البيانية :

$$h(x) = m \text{ أي } 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|} = m \text{ تكافئ } 2 \ln |x| = (m-1)|x| \text{ تكافئ } \ln x^2 = (m-1)|x|$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_h) والمستقيم ذي المعادلة $y = m$.

لما $m \in]-\infty; 0]$ المعادلة تقبل حلين .

لما $m \in]0; 1 + \frac{2}{e}[$ المعادلة تقبل أربعة حلول .

لما $m = 1 + \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) .

لما $m \in]1 + \frac{2}{e}; +\infty[$ المعادلة ليس لها حلول .

(I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .
(1) بقراءة بيانية :

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]0; +\infty[$:

من أجل $x \in]0; \alpha[$ ، (γ) يقع تحت (Δ) .

من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

(2) إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		- 0 +	

(3) التحقق أن : $2, 2 < \alpha < 2, 3$.

لدينا : $\begin{cases} g(2, 2) \approx -0,011 \\ g(2, 3) \approx 0,13 \end{cases}$ ومنه $g(2, 2) \times g(2, 3) < 0$ أي $2, 2 < \alpha < 2, 3$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$.

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 2) = -\infty \end{cases} \text{ : لأن ، } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) \right] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2) = +\infty \end{cases} \text{ : لأن ، } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) \right] = +\infty$$

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{-3 + x + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) تبيان أن : $f(\alpha) = \frac{-(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.

لدينا : $g(\alpha) = 0$ أي $\ln \alpha = -\alpha + 3$ وبالتالي : $f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln \alpha - 2) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)(-\alpha + 1) = \frac{-(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

$$\frac{(1, 2)^2}{2, 3} < \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} < \frac{(1, 3)^2}{2, 2} \text{ ومنه } \begin{cases} \frac{1}{2, 3} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2, 2} \\ 1, 2 < \alpha - 1 < 1, 3 \\ (1, 2)^2 < (\alpha - 1)^2 < (1, 3)^2 \end{cases} \text{ لدينا : } 2, 2 < \alpha < 2, 3 \text{ يكافئ :}$$

ومنه : $-\frac{(1,3)^2}{2,2} < f(\alpha) < -\frac{(1,2)^2}{2,3}$ أي : $-0,76 < f(\alpha) < -0,62$.

(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .

لندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

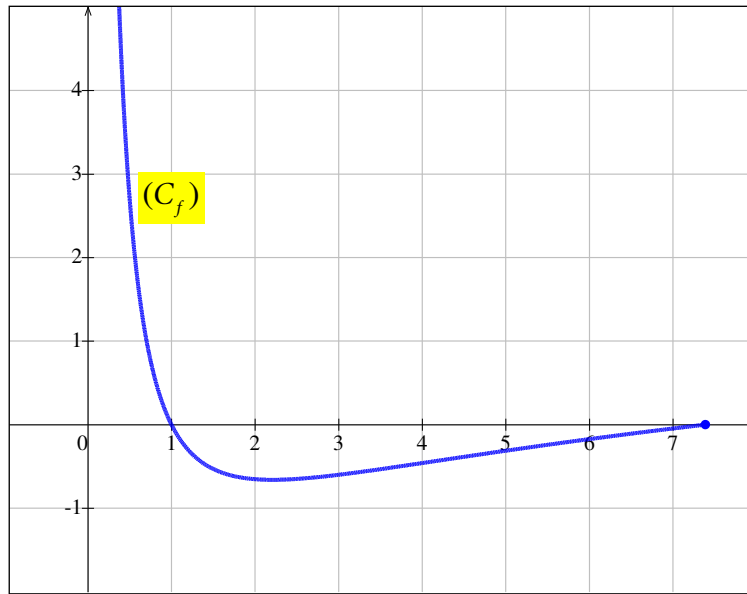
لدينا : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = \frac{1}{x}(x-1)(-2 + \ln x)$ ومنه إشارة $f(x)$ من إشارة $(x-1)(-2 + \ln x)$.

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f(x)$		+	0	-

ومنه (C_f) فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين $]e^2; +\infty[$ و $]0; 1[$ وتحت على المجال $]1; e^2[$ ، ويتقاطعان في

النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

الرسم :



08

حل مقترح للتمرين

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2 - 1$:

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0

الدالة g متناقصة على المجال $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}[$ ومتزايدة على المجال $]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$.

(2) $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0; +\infty[$ هي $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ وبالتالي من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) الدالة المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$.

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + x - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + x - 1 \right) = +\infty$$

(2) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ ،

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$ ، إذن من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 :

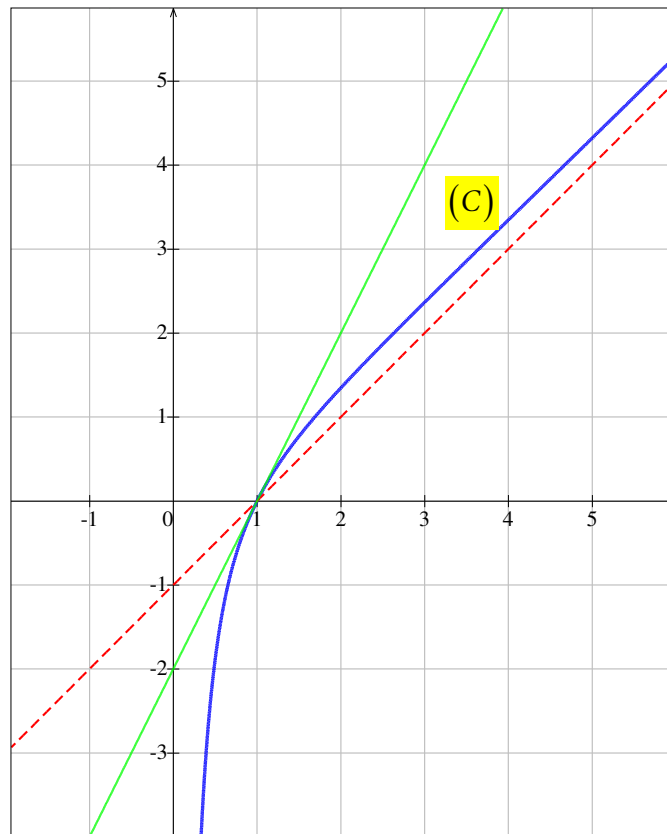
لدينا : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه $(T) : y = 2x - 2$.

(4) أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ومنه للمنحنى (C) مستقيم مقارب (Δ) حيث : $y = x - 1$ معادلة له .

ب- دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) : لدينا $f(x) - y = \frac{\ln x}{x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$:

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$		0	+
الوضع النسبي	(C) تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; 0)$	(C) فوق (Δ)

(5) الرسم :



(6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له .

أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

لدينا $y_A = mx_A - m$ أي $0 = m - m$ وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي m ، $A \in (\Delta_m)$ ،
ب- المناقشة البيانية :

لدينا : (Δ_m) معامل توجيهه m ويشمل النقطة $A(1;0)$.

إذا كان $m \in]-\infty; 1]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

إذا كان $m \in]1; 2]$ فإن المعادلة تقبل حلين .

إذا كان $m = 2$ فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) وهو 1.

إذا كان $m \in]2; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

09

حل مقترح للتمرين

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)] = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)] = +\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبين أنه للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1; +\infty[$ و $\begin{cases} g(-0,34) \approx -0,03 \\ g(-0,33) \approx 0,02 \end{cases}$ أي $g(-0,34) \times g(-0,33) < 0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0,34 < \alpha < -0,33$.

(3) إشارة $g(x)$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(1) أ- تبين أن $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{e}{x+1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{(x+1)^2} \times \ln(x+1) \right] = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المسقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right) \left[e + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{e}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1)^2 - 2(x+1) \ln(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-e(x+1) + 1 - 2 \ln(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

جـ دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$:

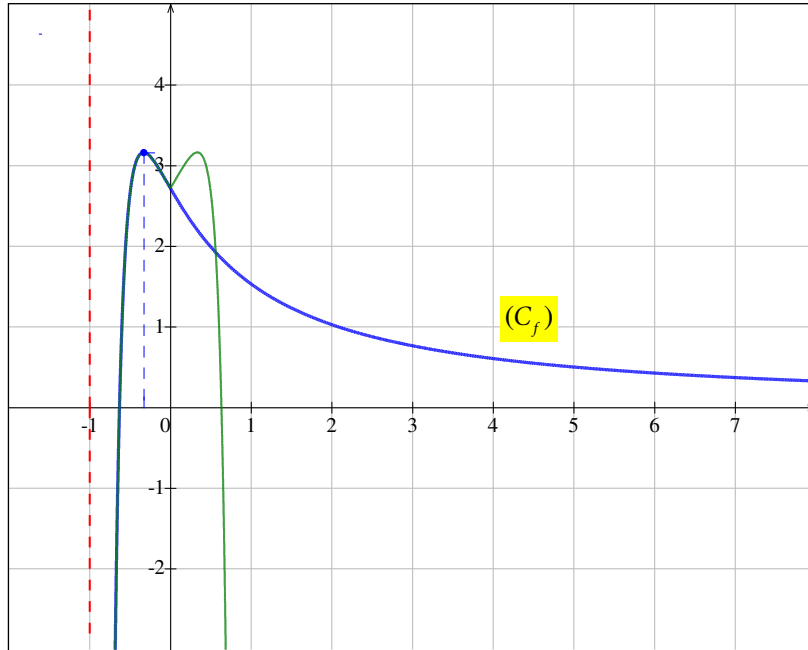
x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha; +\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1; \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(\alpha)$	0

دـ الرسم :



(2) k الدالة العددية المعرفة على $]-1; 1[$ بـ : $k(x) = f(-|x|)$

أـ تبين أن الدالة k زوجية :

المجال $]-1; 1[$ متناظر بالنسبة للصفر و من أجل كل $x \in]-1; 1[$: $k(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = k(x)$

وبالتالي الدالة k زوجية.

بـ شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) انطلاقاً من المنحنى (C_f) :

$$k(x) = f(-|x|) = \begin{cases} f(x); x \in]-1; 0] \\ f(-x); x \in [0; 1[\end{cases}$$

لدينا :

إذن : من أجل $x \in]-1; 0]$ ، (C_k) ينطبق على (C_f) و نتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لمحور الترتيب لكون k زوجية.

الرسم : أنظر الشكل.

جـ المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $k(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_k) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$.

إذا كان $m > f(\alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل حلولاً.

إذا كان $m = f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة .
 إذا كان $e < m < f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان وحلان موجبان .
 إذا كان $m = e$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب وآخر موجب والثالث معدوم .
 إذا كان $m < e$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

10

حل مقترح للتمرين

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) : D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\text{ حيث } D \text{ معرفة على } D$$

(1) تبين أن الدالة f فردية :

المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر (من أجل كل $x \in D$ ، $-x \in D$)

$$f(-x) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{3}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x), \quad x \in D$$

التفسير البياني : مبدأ المعلم O مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب معادلتيهما : $x = -1$ و $x = 1$.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

(3) الدالة f قابلة للإشتقاق على D ، من أجل كل $x \in D$:

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)} = \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)} = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$$

إتجاه تغير الدالة f :

لدينا : من أجل كل $x \in D$ ، $x^2 - 1 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على D .

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

(4) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$:

$$\begin{cases} f(1,9) \approx 0,10 \\ f(1,8) \approx -0,05 \end{cases} \text{ و }]1,8; 1,9[\subset]1; +\infty[\text{ و }]1; +\infty[\text{ المجال } f \text{ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال}$$

أي $f(1,8) \times f(1,9) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1; +\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.

$$(5) \text{ لدينا : } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{2}{3}x \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

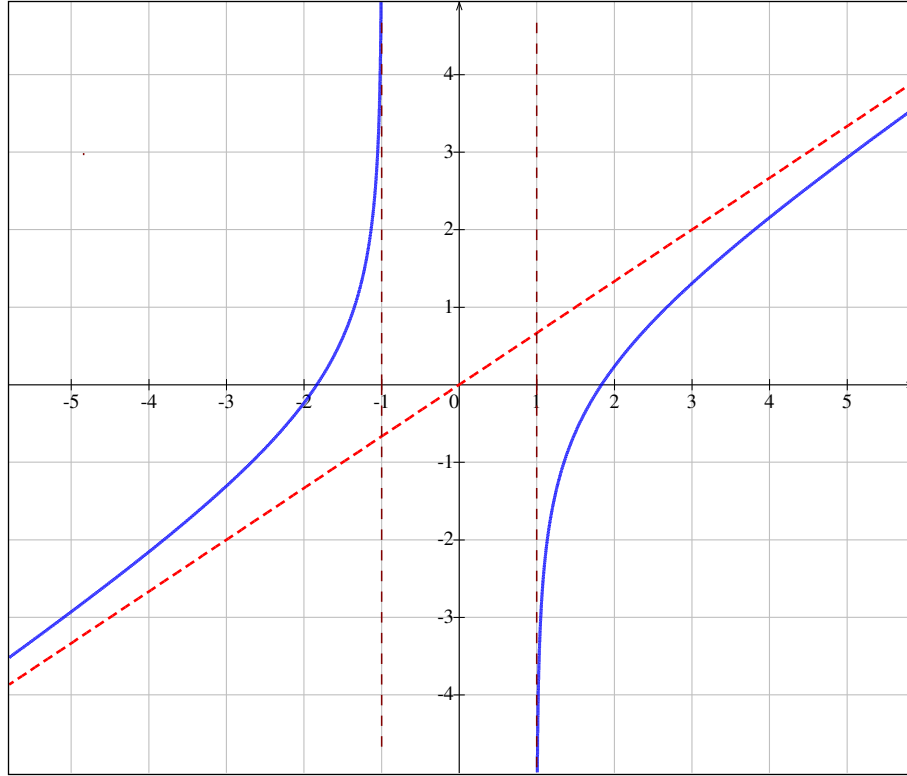
ومن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = \frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $f(x) - y = f(x) - \frac{2}{3}x = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+			-
الوضع النسبي	(C _f) فوق (Δ)			(C _f) تحت (Δ)

(6) الرسم :



(7) المناقشة البيانية :

$$\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = |m|x \text{ تكافئ } 2x - 3|m|x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \text{ تكافئ } (2 - 3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

أي $f(x) = |m|x$ ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = |m|x$.
(مناقشة دورانية)

إذا كان $|m| \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$ أي $m \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$ فإن المعادلة تقبل حلين متميزين.

إذا كان $|m| \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$ أي $m \in \left[-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.

11

حل مقترح للتمرين

$$(I) \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال } \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right] \text{ كما يلي : } f(x) = \frac{1 + 2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[\frac{1 + 2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{(2x+1)^2} \right) [1 + 2\ln(2x+1)] \right] = -\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(2x+1)^2} + 2 \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = 0$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$(2) \text{ أ- الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ ومن أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[:$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4}{2x+1} \times (2x+1)^2 - 4(2x+1)[1+2\ln(2x+1)]}{(2x+1)^4} = \frac{(2x+1)[-8\ln(2x+1)]}{(2x+1)^4} = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$\text{إشارة } f'(x) \text{ من إشارة } -8\ln(2x+1) : \text{ لأن } (2x+1)^3 > 0 \text{ من أجل } x \text{ من } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[:$$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

$$\text{الدالة } f \text{ متزايدة على المجال } \left] -\frac{1}{2}; 0 \right[\text{ ومتناقصة على المجال } [0; +\infty[.$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$-\infty$	0

$$(3) \text{ حل في المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ المعادلة } f(x)=0 :$$

$$f(x)=0 \text{ تكافئ } 1+2\ln(2x+1)=0 \text{ تكافئ } \ln(2x+1)=-\frac{1}{2} \text{ تكافئ } 2x+1=e^{-\frac{1}{2}} \text{ أي } x=\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{1}{2}$$

إشارة $f(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)$	$+\infty$
$f(x)$		-	+

(4) تبين المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها :

$$\text{الدالة } f' \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ ومن أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[:$$

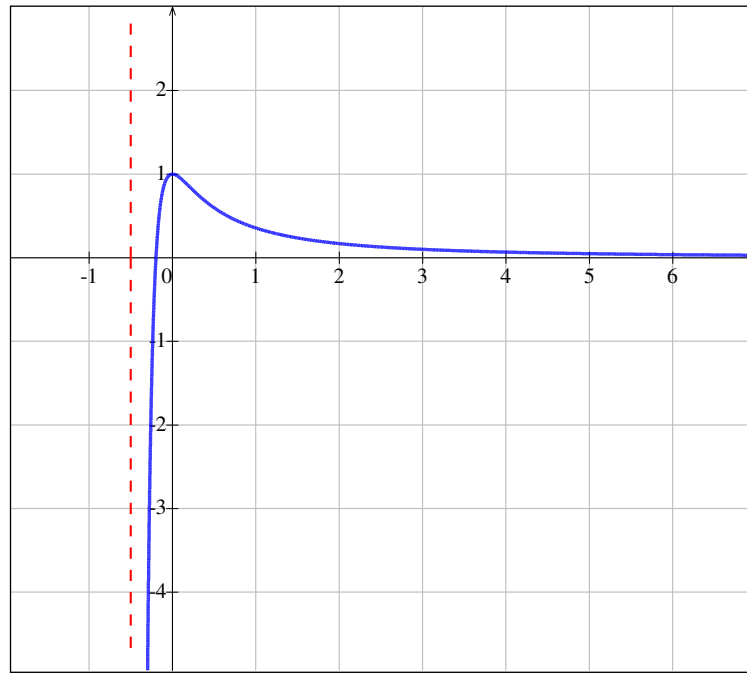
$$f''(x) = \frac{\frac{-8 \times 2}{2x+1} \times (2x+1)^3 - 3 \times 2(2x+1)^2 \times [-8\ln(2x+1)]}{(2x+1)^6} = \frac{16(-1+3\ln(2x+1))}{(2x+1)^4}$$

$$f''(x)=0 \text{ تكافئ } -1+3\ln(2x+1)=0 \text{ تكافئ } \ln(2x+1)=\frac{1}{3} \text{ تكافئ } 2x+1=e^{\frac{1}{3}} \text{ أي } x=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$$

إشارة $f''(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

$$\text{إذن المنحنى } (C_f) \text{ يقبل نقطة إنعطاف } \omega \text{ إحداثيها : } \left(\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2}; \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}} \right).$$



12

حل مقترح للتمرين

(I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$.

• حساب $g(1)$: $g(1) = 1 - (\ln 1)^2 - \ln 1 - 1 = 0$

• إشارة $g(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		+	0 -

(II) f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 : \text{تذكر أن} \right) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x \ln x) = 1 \end{cases} \text{ : لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) = -\infty \quad (1)$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

• تبيان أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$:

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 : \text{تذكر أن} \right) , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} + \ln x} \right) = 0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(2) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + x \ln x) - (1 + \ln x)(1 + \ln x)}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (1 + \ln x)^2}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$$

ب- اتجاه تغير الدالة f :

إشارة من إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

الدالة f متزايدة على المجال $]0; 1]$ و متناقصة على المجال $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

(3) تبين أن $y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل:

أولاً: تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

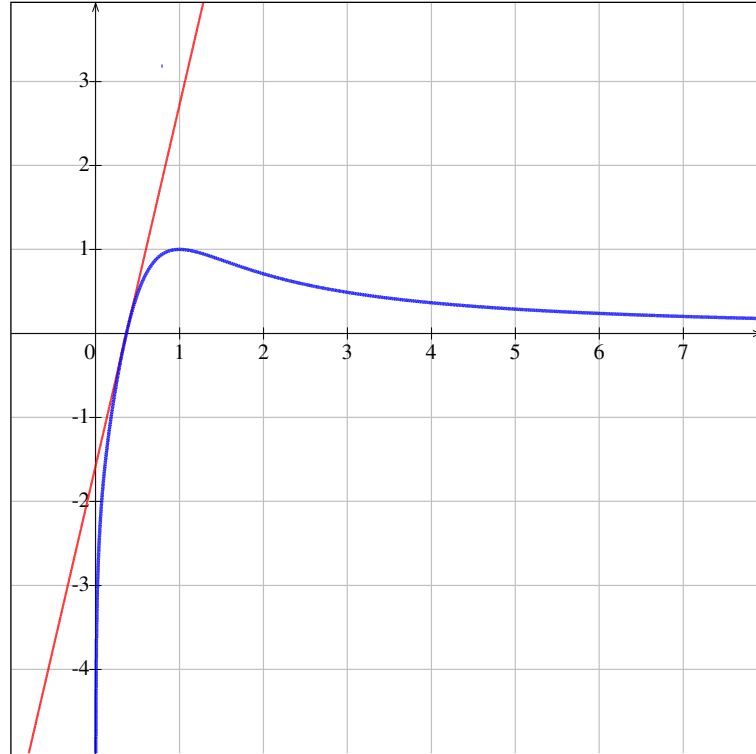
نحل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} = 0 \text{ تكافئ } 1 + \ln x = 0 \text{ تكافئ } \ln x = -1 \text{ أي } x = \frac{1}{e}.$$

معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$:

$$\text{لدينا: } (T): y = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + f\left(\frac{1}{e}\right) \text{ و منه } (T): y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}.$$

الرسم:



(4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلين متميزين.

$$(e-1)f(x) = e^2x - me \text{ تكافئ } f(x) = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}m$$

حلل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (T_m) ذي المعادلة $y = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}m$.

من البيان: المعادلة تقبل حلين متميزين لما $\frac{e}{e-1}m < \frac{e}{e-1}$ أي $m > 1$.

f الدالة العددية المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$.

(1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل الترتيب) مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\text{ب-} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = +\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0; 2[$ و $]2; +\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]0; 2[\cup]2; +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - 5x + 4$ لكون $x(x-2)^2 > 0$ من أجل كل x من $]0; 2[\cup]2; +\infty[$.

• إشارة $f'(x)$:

x	0	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

ومنه : الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]4; +\infty[$ و $]0; 1[$ ومتناقصة على كل من المجالين $]1; 2[$ و $]2; 4[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{2} + \ln 4$	$+\infty$

$$(3) \text{ أ-} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

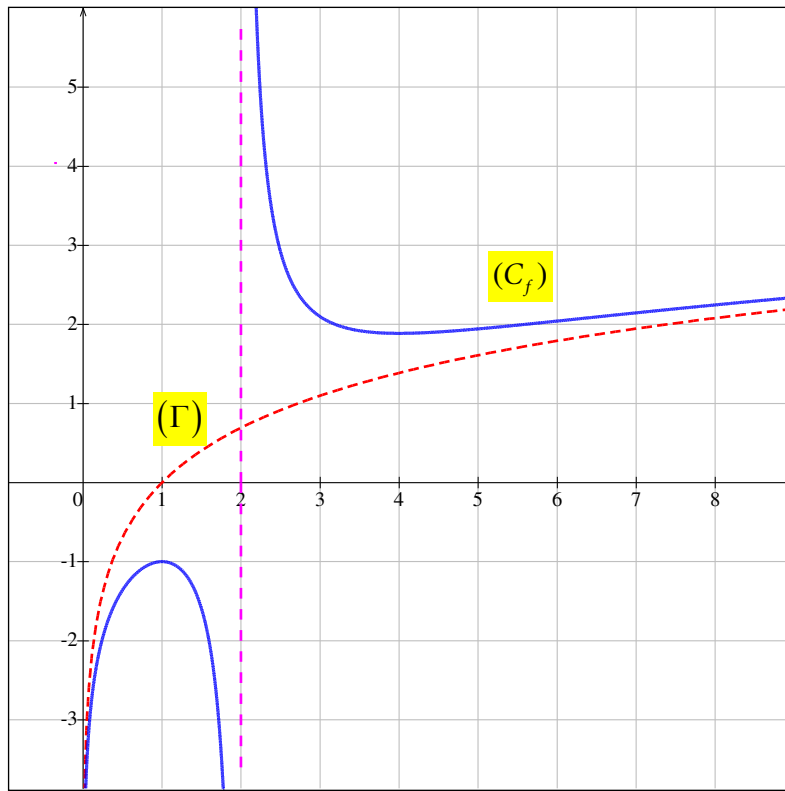
التفسير : المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) :

لدينا : $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-2}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x-2$.

على المجال $]0; 2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) .

على المجال $]2; +\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ) .



(5) الدالة المعرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$ بـ : $g(x) = f(-2x)$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; -1[$ و $]-1; 0[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق، و $g'(x) = -2f'(-2x)$.
إتجاه تغير الدالة g :

$$\begin{cases} g'(x) > 0 & \text{تكافئ} & f'(-2x) < 0 & \text{تكافئ} & \begin{cases} 1 < -2x < 2 \\ 2 < -2x < 4 \end{cases} \\ -1 < x < \frac{1}{2} & \text{أو} & -2 < x < -1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} :$$

ومنه الدالة g متزايدة على كل من المجالين $]-2; -1[$ و $]-1; -\frac{1}{2}[$ ومتناقصة على كل من المجالين $]-\infty; -2[$ و $]-\frac{1}{2}; 0[$.

14

حل مقترح للتمرين

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

(1) أ- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى (C_f) .

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} \right] = +\infty$ لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x^2} \right] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ج- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

لدينا : $f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln x}{x^2}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-\ln x$.

- المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) في المجال $]0; 1[$.
- المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) في المجال $]1; +\infty[$.
- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في المجال $A(1; 0)$.

(2) الدالة العديّة g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$.

أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$.

ولدينا : من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g'(x) > 0$ وبالتالي g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

بـ $g(1) = 0$ ،

إشارة $g(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		-	0 +

(3) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) = 1 - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$.

بـ إتجاه تغيير الدالة f :

الدالة f متناقصة على المجال $]0; 1[$ ومتزايدة على المجال $]1; +\infty[$.

جدول تغييرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

(4) تبيان أن التمثيل البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) :

نحل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة : $f'(x) = 1$.

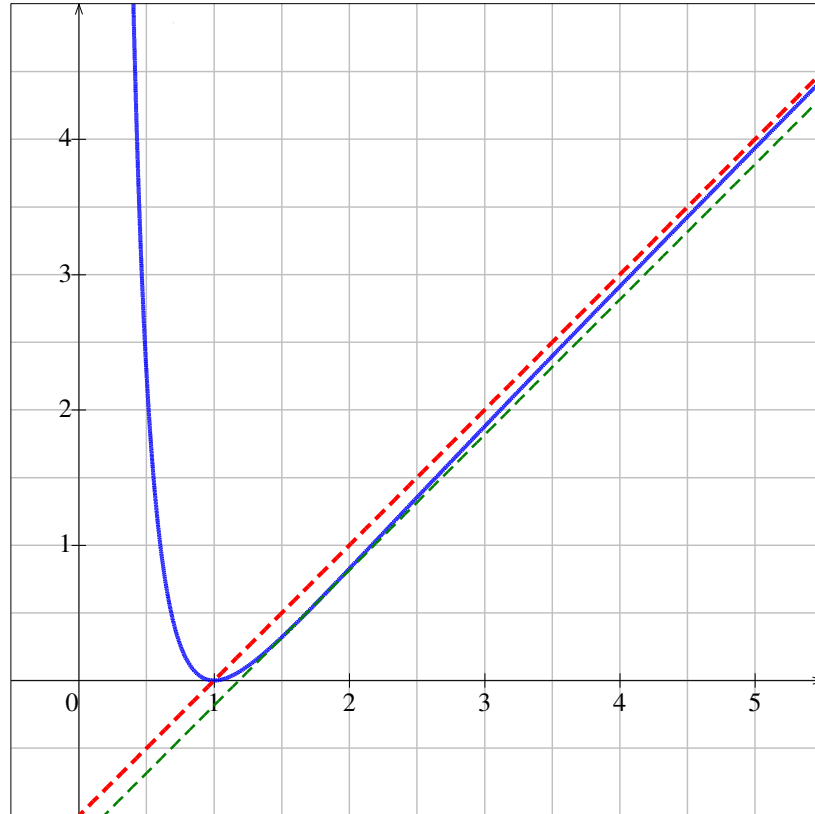
$f'(x) = 1$ تكافئ $\frac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = 1$ تكافئ $-1 + 2 \ln x = 0$ تكافئ $\ln x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

وبالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$ يوازي المستقيم (Δ) .

كتابة معادلة (T) :

لدينا $(T) : y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$ ومنه $(T) : y = x - 1 - \frac{1}{2e}$.

(5) الرسم :



(6) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = -|x| + 1 + \frac{\ln|x|}{x^2} = -f(|x|)$.

أ- تبين أن h دالة زوجية :

المجموعة $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة للصفر، ومن أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(-x) = -f(|-x|) = -f(|x|) = h(x)$.
وبالتالي الدالة h زوجية .

ب- شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة إنطلاقاً من (C_f) :

لدينا : $h(x) = \begin{cases} -f(x) & ; x > 0 \\ -f(-x) & ; x < 0 \end{cases}$ ومنه : على المجال $]0; +\infty[$ يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

و نحصل على (C_h) على المجال $]-\infty; 0[$ بالتناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب .

بالتوفيق للجميع