

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

التمرين رقم 01 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

(2) نعتبر النقطتين A, B التي لا حقتاهما على الترتيب $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ و

$$z_B = 4\sqrt{3} + 4i$$

(أ) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي.

(ب) أحسب الأطوال OA, OB, AB واستنتج طبيعة المثلث OAB .

(3) لتكن النقطة C التي لاحقتها $z_C = -\sqrt{3} + i$ ، وليكن الدوران r الذي مركزه O

وزاويته $-\frac{\pi}{3}$. عين اللاحقة z_D للنقطة D صورة C بالدوران r .

(4) نسمي G مرجع الجملة المثقلة $\{(O, -1), (D, +1), (B, +1)\}$

(أ) تحقق من وجود G وبين أن لاحقتها $z_G = 4\sqrt{3} + 6i$.

(ب) علّم النقط A, B, C, D, G في شكل .

(ت) بين أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع.

(5) ما هي طبيعة المثلث AGC ؟

حل التمرين رقم 01:

(1) نحل المعادلة $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$ باستعمال المميز نجد

$$\Delta = 64 \times 3 - 64 \times 4 = -64 = 64i^2$$

$$S = \{4\sqrt{3} - 4i ; 4\sqrt{3} + 4i\}$$

(2) (أ) $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ ، $|z_A| = 8$ نستطيع الكتابة $z_A = 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ ، $|z_B| = 8$ نستطيع الكتابة $z_B = 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$

(ب) لدينا $OA = |z_A| = 8$ ، $OB = |z_B| = 8$ ، $AB = |z_B - z_A| = |8i| = 8$

إذن المثلث OAB متقايس الأضلاع.

(3) $z_D = (-\sqrt{3} + i)e^{-i\frac{\pi}{3}} = (-\sqrt{3} + i) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2i$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

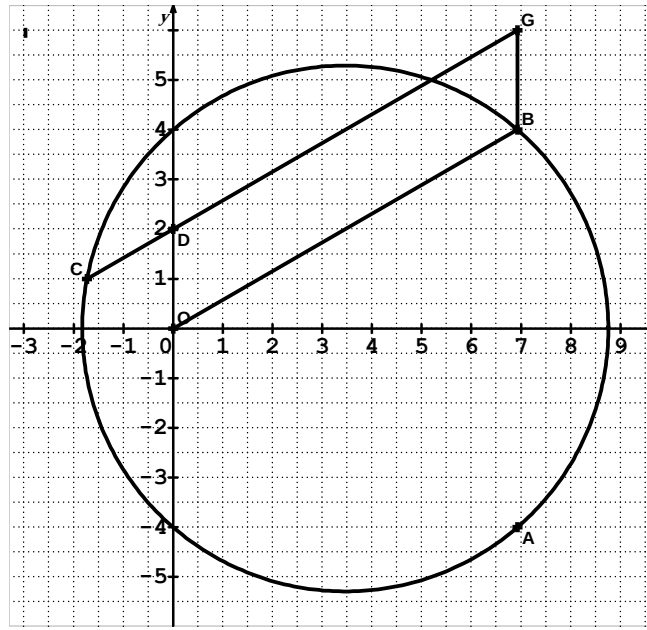
4(أ) مجموع المعاملات يساوي 1 وهو غير معدوم إذن النقطة G موجودة. بالتعريف لدينا :

$$\vec{-GO} + \vec{GD} + \vec{GB} = \vec{0} \quad \text{تكافئ} \quad z_G = \frac{-z_O + z_D + z_B}{-1+1+1} = 4\sqrt{3} + 6i$$

ب) لإنشاء A و B نستعمل الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 8. ولإنشاء C و D نستعمل الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

ت) لدينا $\vec{BG} = \vec{OD}$ ومنه $OBDG$ متوازي أضلاع.

5) نجد بسرعة $GA = CA = CG = 10$ وبالتالي ACG متقايس الأضلاع.



التمرين رقم 02:

معادلة من الدرجة الثالثة — دراسة $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ — المرجح — مجموعة النقط
بحيث $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$

أ) بين أن $P(z)$ يكتب على الشكل $P(z) = (z-8)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$ حيث α, β, γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب) حل في C المعادلة $P(z) = 0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس ، نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها

على الترتيب هي : $z_A = 2 - 2\sqrt{3}i$, $z_B = 2 + 2\sqrt{3}i$, $z_C = 8$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

(أ) أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $z_A = 2 - 2\sqrt{3}i$. عَلمَ النقط A, B, C .

(ب) أحسب $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ثم عين الطويلة وعمدة لـ Z ، واستنتج طبيعة المثلث ABC

(ت) عين إحداثيي النقطة D مرجح الجملة $\{(A, |z_A|), (B, |z_B|), (C, |z_C|)\}$ ثم علم النقطة D .

(ج) عين مجموعة النقط E للنقط M من المستوي بحيث :

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$$

حل التمرين رقم 02:

(1) أ) بما أن $P(8) = 0$ فإن 8 هو جذر لكثير الحدود P فهو إذن يُحلَّل على الشكل التالي :

$$P(z) = (z - 8)(\alpha z^2 + \beta z + \lambda)$$

بعد النشر والتبسيط نجد : $\alpha = 1, \beta = -4, \gamma = 16$ وبالتالي

$$P(z) = (z - 8)(z^2 - 4z + 16)$$

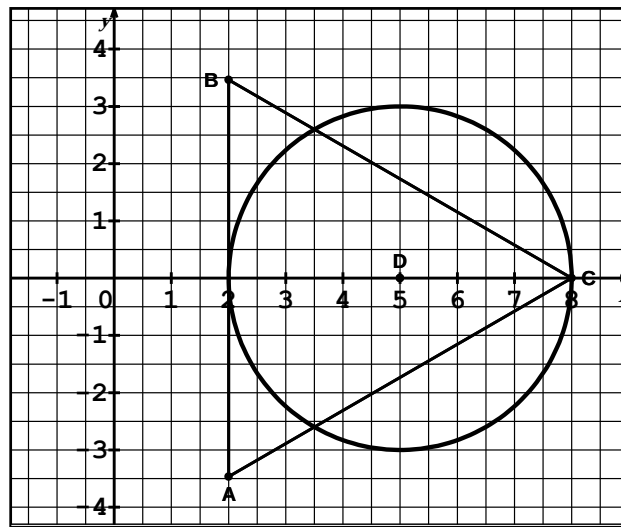
(ب) $P(z) = 0$ يكافئ $z = 8$ أو $z^2 - 4z + 16 = 0$.

حلا المعادلة $z^2 - 4z + 16 = 0$ هما : $z_1 = 2 - 2i\sqrt{2}$ ، $z_2 = 2 + 2i\sqrt{2}$.

مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي $\{8, 2 - 2i\sqrt{2}, 2 + 2i\sqrt{2}\}$.

$$z_A = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) , \quad |z_A| = |2 - 2i\sqrt{2}| = 4 \quad (أ) \quad (2)$$

ونستنتج أن $-\frac{\pi}{3}$ هي عمدة للعدد المركب $z_A = 2 - 2i\sqrt{2}$.



الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

$$Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{2 - 2i\sqrt{3} - 8}{2 + 2i\sqrt{3} - 8} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (ب)}$$

ومنه $|Z|=1$ و $\frac{\pi}{3}$ عمدة للعدد المركب Z ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع .

(ت) لدينا : $|z_A|=4$, $|z_B|=4$, $|z_C|=8$, D مرجح الجملة $\{(A,4), (B,4), (C,8)\}$ أو كذلك D مرجح الجملة $\{(A,1), (B,1), (C,2)\}$.

ويكون لدينا : $z_D = \frac{z_A + z_B + 2z_C}{4} = 5$ ومنه $D(5, 0)$.

(ج) بما أن D مرجح الجملة $\{(A,1), (B,1), (C,2)\}$ فإن $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = 4\vec{MD}$ ومن أجل كل نقطة M لدينا :

$$\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{MC} + \vec{CA} + \vec{MC} + \vec{CB} - 2\vec{MC} = \vec{CA} + \vec{CB}$$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$$

$$\|\vec{MD}\| = \frac{1}{4}\|\vec{CA} + \vec{CB}\| \text{ أو } \|4\vec{MD}\| = \|\vec{CA} + \vec{CB}\| \text{ يكافئ}$$

ولكن $\frac{1}{4}\|\vec{CA} + \vec{CB}\| = 3$ ومنه مجموعة النقط E هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها 3.

التمرين رقم 03 :

P كثير حدود معرف في مجموعة الأعداد المركبة C كما يلي : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. بين أنه يوجد ثلاث أعداد $a; b; c$ يطلب تعيينها بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$$

2. حل في C المعادلة $P(z) = 0$.

3. المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أنشئ النقط A, B, C, D التي لواحقتها على الترتيب :

$$z_A = i\sqrt{3}, z_B = -i\sqrt{3}, z_C = 3 + 2i\sqrt{3}, z_D = \overline{z_C}$$

بين أن هذه النقط الأربعة تنتهي إلى نفس الدائرة يُطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

4. لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى O . ما هي طبيعة المثلث BEC ؟

حل التمرين رقم 03 :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

$$(1) \quad (z^2 + 3)(az^2 + bz + c) = az^4 + bz^3 + (3a + c)z^2 + 3bz + 3c \text{ بالمطابقة نجد :}$$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

$$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) \text{ ومنه } a=1; b=-6; c=21$$

$$(2) \quad P(z)=0 \text{ يكافئ : } (z^2 + 3)=0 \text{ أو } (z^2 - 6z + 21)=0$$

$$\bullet \text{ حلا المعادلة } (z^2 + 3)=0 \text{ هما } i\sqrt{3} \text{ و } -i\sqrt{3}$$

$$\bullet \text{ حلا المعادلة } (z^2 - 6z + 21)=0 \text{ هما } 3+2i\sqrt{3} \text{ و } 3-2i\sqrt{3}$$

وأخيرا حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $i\sqrt{3}$ ، $-i\sqrt{3}$ ، $3+2i\sqrt{3}$ و $3-2i\sqrt{3}$.

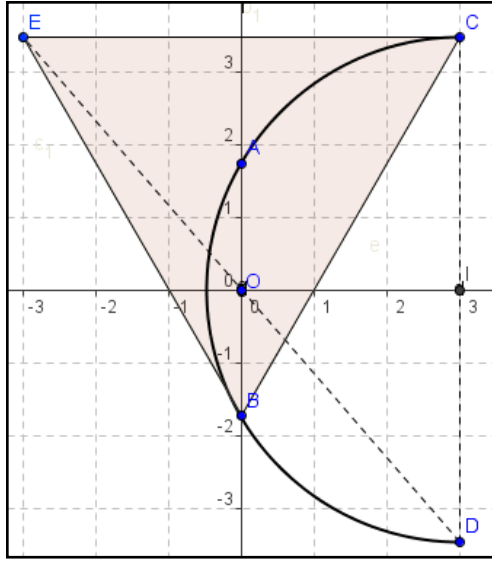
(3) نبين أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $I(3,0)$

$$BI^2 = |3 + i\sqrt{3}|^2 = 9 + 3 = 12 \quad . \quad AI^2 = |3 - i\sqrt{3}|^2 = 9 + 3 = 12$$

$$DI^2 = |-2i\sqrt{3}|^2 = 12 \quad , \quad CI^2 = |2i\sqrt{3}|^2 = 12$$

$$\text{نستنتج أن: } AI = BI = CI = DI = 2\sqrt{3}$$

وهذا يعني أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $I(3,0)$



ونصف قطرها $2\sqrt{3}$.

(4) بما أن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى O فإن :

$$z_E = -z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$$

نحسب أطوال القطع المستقيمة : BE ; EC ; BC

$$BE = |z_E - z_B| = |-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}| = |-3 + 3i\sqrt{3}| = \sqrt{36} = 6$$

$$EC = |z_C - z_E| = |3 + 2i\sqrt{3} + 3 - 2i\sqrt{3}| = |6| = 6$$

$$BC = |z_C - z_B| = |3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}| = |3 + 3i\sqrt{3}| = \sqrt{36} = 6$$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

وبالتالي $BE = EC = BC$ ومنه المثلث BEC متقايس الأضلاع.

التمرين رقم 04 :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أنشئ النقط A, B, I التي لواحقتها على الترتيب :

$$z_I = 1 - 2i, z_B = -3, z_A = 3 + 2i$$

(1) علم النقط السابقة في المعلم ثم نكم.

ل في $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$ ما هي طبيعة المثلث IAB ؟

(2) أكتب علم الشكل الجبري العدد المركب z_C للنقطة C ، صورة النقطة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2.

(4) لتكن النقطة D مرجح الجملة $A, 1; B, -1; C, 1$ أحسب اللاحقة z_D للنقطة D .

(5) بين أن $ABCD$ مربع.

(6) عين وانشئ Γ_1 مجموعة النقط M من المستوي بحيث :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MA} + \vec{MC}\|$$

(7) لتكن Γ_2 مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$

• بين أن النقطة B تنتمي إلى Γ_2 .

• عين وانشئ Γ_2 .

حل التمرين رقم 04 :

$$Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = \frac{(1 - 2i) - (3 + 2i)}{(1 - 2i) - (-3)} = \frac{-2 - 4i}{4 - 2i} = -i \quad (2)$$

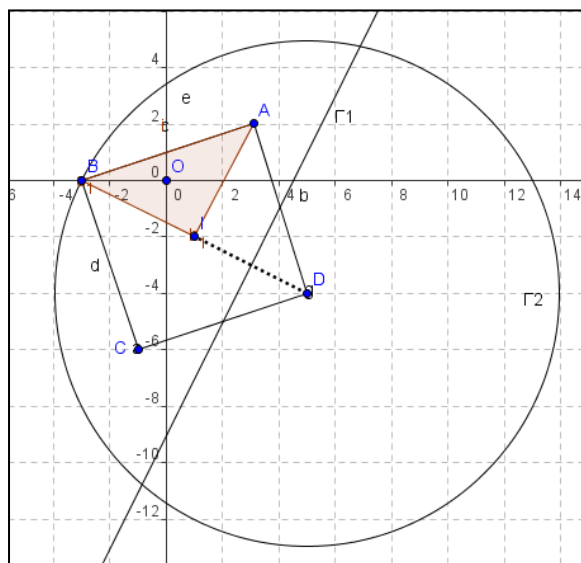
لدينا من جهة : $\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = -i$ وبالتالي : $\left| \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} \right| = \frac{AI}{BI} = |-i| = 1$ أي $AI = BI$

ولدينا من جهة أخرى : $\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = -i$ وبالتالي : $\arg \left(\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} \right) = \arg -i = -\frac{\pi}{2}$

$$\vec{IA} \perp \vec{IB}$$

إذن المثلث IAB قائم في I ومتساوي الساقين .

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة



(3) لاحقة النقطة C

C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 معناه $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ أي

$$z_C - z_A = 2(z_I - z_A)$$

ومنه $z_C = z_A + 2(z_I - z_A)$ أي $z_C = 3 + 2i + 2(1 - 2i - 3 - 2i) = -1 - 6i$

(4) النقطة D مرجح الجملة $A(1); B(-1); C(1)$ معناه $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ أي

وبالتالي $-z_D + z_A - z_B + z_C = 0$ ومنه: $(z_A - z_D) - (z_B - z_D) + (z_C - z_D) = 0$

$$z_D = z_A - z_B + z_C = 3 + 2i - (-1) + (-1 - 6i) = 5 - 4i$$

(5) طبيعة ABCD

لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A = -1 - 3 + 2i = -4 + 2i$

لاحقة $\overrightarrow{DC}$ هي $z_C - z_D = -1 - 6i - (5 - 4i) = -6 - 2i$ ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ إذن

ABCD متوازي الأضلاع. بالإضافة إلى ذلك :

لاحقة $\overrightarrow{AD}$ هي $z_D - z_A = 5 - 4i - (3 + 2i) = 2 - 6i$

بما أن $i^2 = -1$ يمكن كتابة $z_D - z_A = 2 - 6i$ على الشكل

$$z_D - z_A = i(-6 - 2i) = i(z_B - z_A)$$

أي $z_D - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$ وهذا يعني أن النقطة D هي صورة النقطة B بالدوران الذي

مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$. وأخيرا ABCD متوازي الأضلاع فيه ضلعان متتاليان متقايسان ومتعامدان

فهو إذن مربع.

(6) Γ_1 مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$

لدينا : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ لأن $A(1); B(-1); C(1)$ مرجح الجملة

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

وكذلك $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$ حيث J هو منتصف القطعة المستقيمة AC إذن :

$$\|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MJ}\| \text{ أي } \|\overrightarrow{MD}\| = \frac{1}{2}\|2\overrightarrow{MJ}\| \text{ تكافئ } \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$$

ولدينا لاحقة J هي : $z_J = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3 + 2i - 1 - 6i}{2} = 1 - 2i = z_I$ إذن I هي منتصف

AC

$\|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|$ تكافئ إذن $MD = MI$ وأخيرا مجموعة النقط Γ_1 هي محور القطعة المستقيمة

ID

(7) B تنتمي إلى Γ_2 مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$
نعوض M بالنقطة B فنجد في الطرف الأول : $\|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BD}\|$

لأن $ABCD$ مربع فهو متوازي أضلاع. ولكن

$$\|\overrightarrow{BD}\| = |z_D - z_B| = |5 - 4i + 3| = |8 - 4i| = 4\sqrt{5}$$

ومنه B تنتمي إلى Γ_2 .

• تعيين Γ_2 : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$ تكافئ $\|\overrightarrow{MD}\| = MD = 4\sqrt{5}$ لأن D مرجع

الجملة $A, 1; B, -1; C, 1$ وبالتالي Γ_2 هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $4\sqrt{5}$.

التمرين رقم 05 :

D, C, B, A نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$ ، لواحقتها على الترتيب

$$z_D = -2 + i\frac{\sqrt{3}}{3}, z_C = -4 - 3i\sqrt{3}, z_B = -i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_A = 2 + 3i\sqrt{3}$$

1. بين أن الرباعي $ABCD$ هو متوازي الأضلاع.

2. بين أن $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$ تخيلي صرف.

3. استنتج طبيعة متوازي الأضلاع $ABCD$.

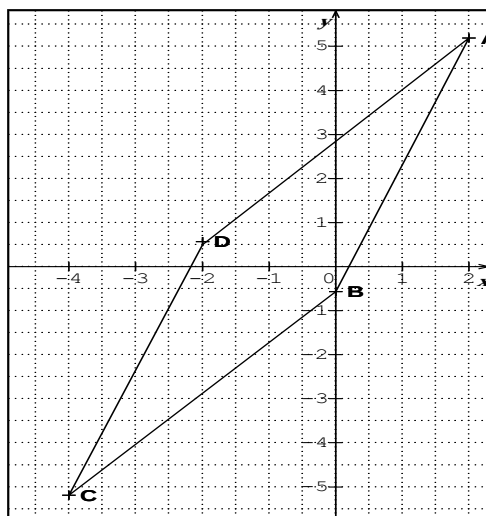
حل التمرين رقم 05:

1. $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه $\overline{AB} = \overline{DC}$.

$$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = -i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 - 3i\sqrt{3} = -2 - i\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$z_{\overline{DC}} = z_C - z_D = -4 - 3i\sqrt{3} + 2 - i\frac{\sqrt{3}}{3} = -2 - i\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة



ومنه $z_{\overline{AB}} = z_{\overline{DC}}$ أي $\overline{AB} = \overline{DC}$ إذن $ABCD$ هو متوازي الأضلاع.

$$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \frac{-2 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{-4 - 3i\sqrt{3} - (2 + 3i\sqrt{3})} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{9 + 9i\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{9} \quad 2.$$

ومنه $\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ أي أن $(AC) \perp (BD)$.

وبالتالي الشكل $ABCD$ معين (القطران متعامدان)

التمرين رقم 06:

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

تُعطى النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب :

$$z_C = -2i, \quad z_B = -\sqrt{3} + i, \quad z_A = \sqrt{3} + i$$

(1) أنشئ النقط A, B, C .

(2) أكتب على الشكل المثلي كلا من z_A, z_B, z_C .

(3) ليكن عدد مركب بحيث $z_0 = 1 + i$. أكتب على الشكل الجبري كلا من :

$$m = z_A \times z_0; n = z_B \times z_0; p = z_C \times z_0$$

(4) أكتب على الشكل المثلي العدد المركب z_0 .

(5) إستنتج الشكل المثلي لكل من الأعداد المركبة $m; n; p$.

(6) أنشئ النقط $M; N; P$ التي لواحقها على الترتيب $m; n; p$.

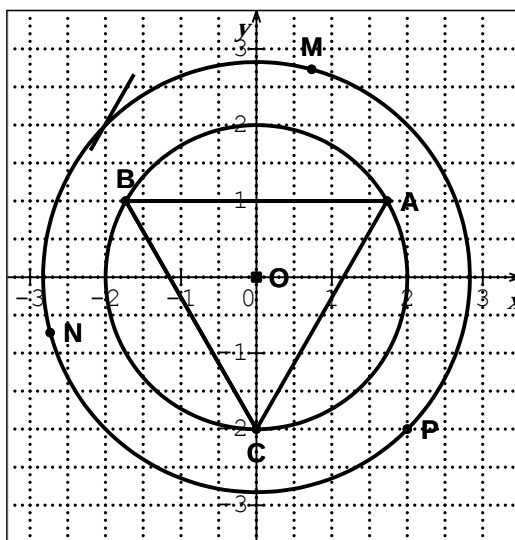
(7) أحسب الأطوال $AB; BC; CA$ وما هي طبيعة المثلث ABC ؟

حل التمرين رقم 06:

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

$$z_C = -2i, z_B = -\sqrt{3} + i, z_A = \sqrt{3} + i \quad (1)$$

$$z_C = 2\left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2}\right), z_B = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right), z_A = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \quad (2)$$



(3) الشكل الجبري لـ: $m = z_A \times z_0; n = z_B \times z_0; p = z_C \times z_0$

$$m = z_A \times z_0 = (\sqrt{3} + i)(1 + i) = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$$

$$n = z_B \times z_0 = (-\sqrt{3} + i)(1 + i) = (-\sqrt{3} - 1) + i(-\sqrt{3} + 1)$$

$$p = z_C \times z_0 = (-2i)(1 + i) = 2 - 2i$$

(4) الشكل المثلثي للعدد z_0

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

(6) الشكل المثلثي لكل من $m; n; p$

لدينا سابقا: $m = z_A \times z_0; n = z_B \times z_0; p = z_C \times z_0$

$$m = z_A \times z_0 = z_A = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \times \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$n = z_B \times z_0 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \times \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}\right)$$

$$p = z_C \times z_0 = 2\left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2}\right) \times \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

$$= 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin \cos\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)$$

(7) حساب الأطوال $AB; BC; CA$

$$AB = |z_B - z_A| = |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-3i + \sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \quad \text{ومنه المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع.}$$

$$CA = |z_A - z_C| = |3i + \sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

التمرين رقم 07:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها

$$z_A = 2, \quad z_B = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_C = 1 - i\sqrt{3}.$$

أولا :

$$(أ) \text{ أعط الشكل الأسّي لكل من } z_B = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_C = 1 - i\sqrt{3}.$$

(ب) أنشئ النقط A, B, C .

(ت) عين طبيعة الرباعي $OBAC$.

(ج) عين وانشئ مجموعة النقط (D) للنقط M ذات اللاحقة z من المستوي بحيث :

$$|z| = |z - 2|$$

ثانيا :

بكل نقطة M ذات اللاحقة z حيث $z \neq z_A$ نرفق النقطة M' ذات اللاحقة $z' = \frac{-4}{z-2}$.

$$(1) \text{ (أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة } C \text{ المعادلة } z = \frac{-4}{z-2}.$$

(ب) استنتج النقط المرفقة بالنقطتين B و C .

(ت) عين وانشئ النقطة G' المرفقة بالنقطة G بمركز ثقل المثلث OAB .

$$(2) \text{ (أ) بين أنه من أجل كل عدد مركب } z \text{ المختلف عن } 2, \quad |z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}.$$

(ب) نفرض أن M تنتمي إلى (D) ((D) المجموعة المعروفة في الفقرة الأولى).

بين أن النقطة M' المرفقة بالنقطة M تنتمي إلى دائرة (Γ) التي يطلب تعيين مركزها

ونصف قطرها . أنشئ (Γ) .

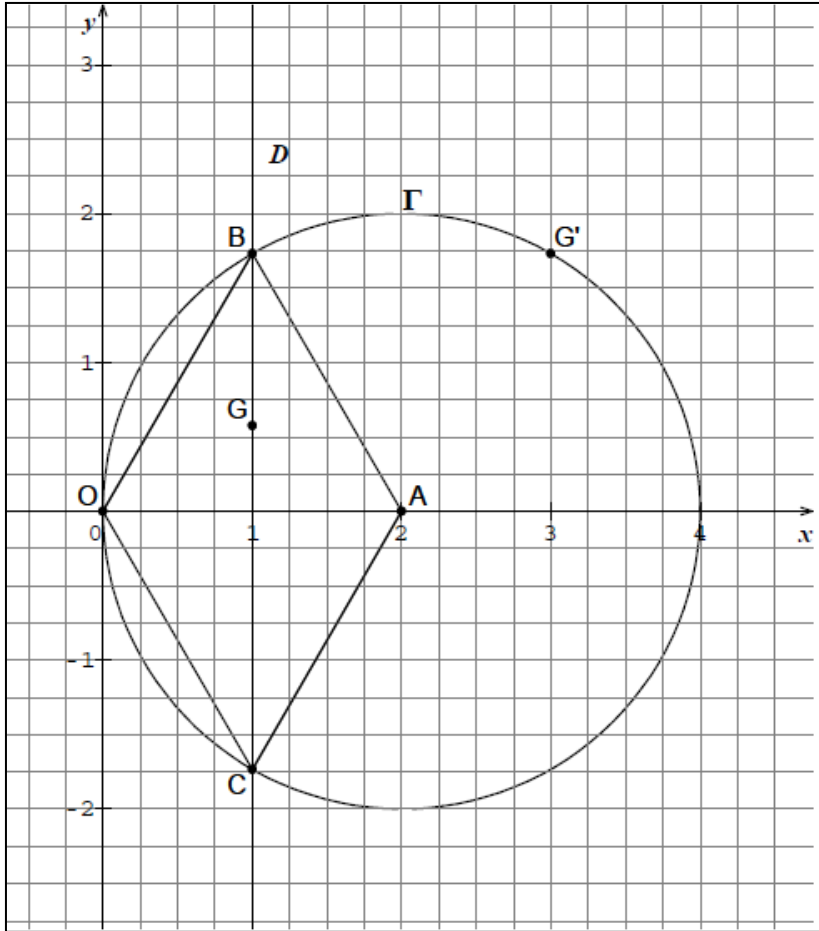
حل التمرين رقم 07:

اولا :

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

(1) لدينا $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $|z_B| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ ومنه

$$z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{فإن } z_C = \overline{z_B} \quad \text{وبما أن } z_B = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$



(ت)

لدينا من جهة : $z_B - z_O = z_B$ و $z_A - z_C = 2 - 1 + i\sqrt{3} = z_B$ ومنه $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$ إذن $OBAC$ متوازي أضلاع.

ولدينا من جهة أخرى $|z_B| = |z_C|$ أي $OB = OC$.

OBAC متوازي أضلاع وفيه ضلعين متتابعين لهما نفس الطول فهو إذن معين.

(ج) تعيين وإنشاء مجموعة النقط (D) بحيث : $|z| = |z - 2|$

$M \in (D)$ تكافئ $|z| = |z - 2|$ أي $OM = AM$ وهذا يكافئ أن النقطة M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[OA]$.

مجموعة النقط (D) للنقط M بحيث : $|z| = |z - 2|$ هي محور القطعة المستقيمة $[OA]$.

ثانيا :

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

(1) نحل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z = \frac{-4}{z-2}$.

من أجل $z \neq z_A$ ، $z = \frac{-4}{z-2}$ تكافئ $z(z-2) = -4$ أي $z^2 - 2z + 4 = 0$

نحل هذه المعادلة فنجد $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 1 - i\sqrt{3}$

(ب) نستنتج أن النقطتين المرفقتين بالنقطتين B و C هما B و C .

(ت) اللاحقة z_G لمركز ثقل المثلث OAB هي : $z_G = \frac{1}{3}(z_0 + z_A + z_B) = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$

ومنه $z_{G'} = \frac{-4}{z_G - 2} = \frac{-4}{1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - 2} = 3 + i\sqrt{3}$

(2) (أ) نبين أنه من أجل كل عدد مركب z المختلف عن 2 ، $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$

$$|z' - 2| = \left| \frac{-4}{z-2} - 2 \right| = \left| \frac{-4 - 2z + 4}{z-2} \right| = \left| \frac{-2z}{z-2} \right| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

(ب) $M \in (D)$ تكافئ $|z| = |z-2|$ وتكافئ $\frac{|z|}{|z-2|} = 1$ وحسب ما سبق كذلك تكافئ

$$\frac{|z'-2|}{2} = 1$$

أي $|z'-2| = 2$ أو $AM' = 2$ أي M' تنتمي إلى دائرة مركزها A ونصف قطرها 2.

التمرين رقم 08:

في كل سؤال توجد 4 تأكيدات: واحدة فقط صحيحة عينها مع التعليل

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

(1) n عدد طبيعي ، يكون العدد المركب $(\sqrt{3} + i)^n$ تخيليا صرfa إذا وفقط إذا كان n يكتب

على الشكل :

(أ) $n = 6k + 1$ ، (ب) $n = 6k + 2$ ، (ت) $n = 6k + 3$ ، (ج) $n = 6k$

(2) A و B نقطتان لاحتقاهما على الترتيب : $z_A = i$ ، $z_B = \sqrt{3}$. أحد أقياس الزاوية

هو : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

$$(i) \quad -\frac{5\pi}{6} \quad (ب) \quad \frac{\pi}{6} \quad (ت) \quad \frac{47\pi}{6} \quad (ج) \quad \frac{5\pi}{6}$$

(3) لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ هي :

$$(i) \quad z_C = -i \quad (ب) \quad z_C = 2i \quad (ت) \quad z_C = \sqrt{3} + i \quad (ج) \quad z_C = \sqrt{3} + 2i$$

(4) مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z = x + iy$ والتي تحقق $|z-1| = |z+i|$ هي المستقيم الذي معادلته :

$$(i) \quad y = x - 1 \quad (ب) \quad y = -x \quad (ت) \quad y = -x + 1 \quad (ج) \quad y = x$$

حل التمرين رقم 08:

(1) التأكيد (ت) $n = 6k + 3$ هي الصحيحة : التعليل

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}} = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}\right)$$

$$\text{كان } \cos \frac{n\pi}{6} = 0 \text{ تكافئ } \frac{n\pi}{6} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ ومنه } n = 6k + 3$$

(2) التأكيد (ت) $\frac{47\pi}{6}$ هي الصحيحة : التعليل

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A) = \arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{47\pi}{6} = \frac{48\pi - \pi}{6} = 8\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2(4)\pi$$

(3) التأكيد (ج) $z_C = \sqrt{3} + 2i$ هي الصحيحة . التعليل :

$$\text{ومنه } z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$

$$z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - i) + i = \sqrt{3} + 2i$$

(4) التأكيد (ب) $y = -x$ هي الصحيحة . التعليل :

$$|z-1| = |z+i| \text{ تكافئ } |z-z_D| = |z-z_E| \text{ حيث } z_D = 1, z_E = -i$$

$$|z-z_D| = |z-z_E| \text{ تكافئ } MD = ME \text{ إذن } y = -x$$

التمرين رقم 09

يوجد في كل سؤال جواب واحد فقط صحيح. عين هذا الجواب الصحيح بدون تبرير.

$$(1) \text{ حل المعادلة } 2z + \bar{z} = 9 + i \text{ هو :}$$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

- (أ) $3+i$ ، (ب) i ، (ت) $3+i$
- (2) z عدد مركب. $|z+i|$ تساوي :
- (أ) $|z|+1$ ، (ب) $|z-1|$ ، (ت) $|i\bar{z}+1|$
- (3) z عدد مركب غير معدوم عمدته θ . عمدة العدد المركب $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ هي :
- (أ) $-\frac{\pi}{3}+\theta$ ، (ب) $\frac{2\pi}{3}+\theta$ ، (ت) $\frac{2\pi}{3}-\theta$
- (4) n عدد طبيعي. يكون العدد المركب $(\sqrt{3}+i)^n$ تخيليا صرfa إذا وفقط إذا كان :
- (أ) $n=3$ ، (ب) $n=3+6k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، (ت) $n=6k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
- (5) A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب هما i و -1 . مجموعة النقط M التي لاحقتها $z = x + iy$ والتي تحقق $|z-i|=|z+1|$ هي :
- (أ) المستقيم (AB) ، (ب) الدائرة التي قطرها $[AB]$ ، (ت) المستقيم العمودي على (AB) المار من المبدأ O .
- (6) Ω النقطة ذات اللاحقة $1-i$. مجموعة النقط M التي لاحقتها $z = x + iy$ والتي تحقق $|z-1+i|=|3-4i|$ معادلتها هي :
- (أ) $y = -x + 1$ ، (ب) $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ ، (ت) $z = 1-i + 5e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$
- (7) A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب هما 4 و $3i$. لاحقة النقطة C بحيث يكون المثلث ABC متساوي الساقين مع $\angle(AB, AC) = \frac{\pi}{2}$ هي :
- (أ) $1-4i$ ، (ب) $-3i$ ، (ت) $7+4i$
- (8) مجموعة حلول المعادلة $\frac{z-2}{z-1} = z$ في $\mathbb{C}$ هي :
- (أ) $\{1-i\}$ ، (ب) مجموعة خالية ، (ت) $\{1-i, 1+i\}$

حل التمرين رقم 09:

السؤال رقم	1	2	3	4	5	6	7	8
الجواب رقم	ت	ت	ب	ب	ت	ت	أ	ت

التمرين رقم 10 :

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. الوحدة $1cm$.

نعتبر النقط Ω, S, B, A التي لواحقتها على الترتيب هي :

$$z_{\Omega} = -2 + 2i, z_S = -5 + 5i, z_B = -4 + 2i, z_A = -2 + 4i$$

(1) أوجد الشكل المثلثي لكل من $z_{\Omega} \times z_S$; $z_B \times z_A$

(2) نسي C و D النقطتان بحيث $\vec{SC} = 3\vec{SA}$ و $\vec{SD} = 3\vec{SB}$

بين أن لاحقة النقطة C هي $z_C = 4 + 2i$ ولاحقة النقطة D هي $z_D = -2 - 4i$

(3) بين أن النقط A, B, C, D تنتمي إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

(4) أ) عين مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z والتي تحقق

$$|z + 2 - 4i| = |z + 4 - 2i|$$

ب) بين أن المستقيم $(S\Omega)$ هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

(5) لتكن H منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$. عين $\arg\left(\frac{z_{\Omega} - z_H}{z_D - z_B}\right)$ واستنتج قياسا

للزاوية $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{H\Omega})$.

حل التمرين رقم 10

$$z_B \times z_A = (-2 + 4i)(-4 + 2i) = -20i \quad (1)$$

$$z_B \times z_A = 20 \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right) \quad \text{إذن}$$

$$\text{ومنه } z_{\Omega} \times z_S = (-2 + 2i)(-5 + 5i) = -20i$$

$$z_{\Omega} \times z_S = 20 \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right)$$

$$z_C = 3z_A - 2z_S = 4 + 2i \quad \text{ومنه } z_C - z_S = 3(z_A - z_S) \quad \text{تكافئ } \vec{SC} = 3\vec{SA} \quad (2)$$

$$z_D = 3z_B - 2z_S = -2 - 4i \quad \text{ومنه } z_D - z_S = 3(z_B - z_S) \quad \text{تكافئ } \vec{SD} = 3\vec{SB}$$

$$(3) \quad \text{نتحقق بسهولة أن } OA = OB = OC = OD = |z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = \sqrt{20}$$

ومنه النقط A, B, C, D تنتمي إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{20}$.

$$(4) \quad |z + 2 - 4i| = |z + 4 - 2i| \quad \text{تكافئ } |z - (-2 + 4i)| = |z - (-4 + 2i)| \quad \text{تكافئ}$$

$$|z - z_A| = |z - z_B| \quad \text{ومجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة } [AB]$$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

ب) لدينا $\overrightarrow{S\Omega}(3,-3)$ و $\overrightarrow{AB}(-2,-2)$ متعامدان لأن الجداء السلمي لهما يساوي صفر هذا من جهة ومن جهة أخرى $I(-3,3)$ تنتمي على المستقيم $(S\Omega)$. ومنه $(S\Omega)$ هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$

(5) لتكن النقطة $H(2,3)$ منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$ ونكتب $z_H = 1 + 3i$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_\Omega - z_H}{z_D - z_B}\right) = \frac{-2 + 2i - 1 - 3i}{-2 - 4i + 4 - 2i} = \frac{-3 - i}{2 - 6i} = -\frac{1}{2}i$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_\Omega - z_H}{z_D - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ومنه}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_\Omega - z_H}{z_D - z_B}\right) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{H\Omega}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$