

Prof Mustapha
KHALED

معادلة مستقيم

I. مفاهيم أساسية

◆ كل شعاع يوازي مستقيم هو شعاع توجيه له

◆ (AB) و (CD) لهما نفس معامل التوجيه $\Leftrightarrow (AB) // (CD)$

II. حساب معامل وشعاع توجيه مستقيم

المستقيم	$ax + by + c = 0$	$y = ax + b$
معامل توجيهه (الميل)	$-\frac{a}{b}$	a
شعاع توجيهه	$\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$	$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

* معامل توجيه مستقيم يشمل نقطتين $B(x_B; y_B)$ ، $A(x_A; y_A)$ هو $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

III. قاعدة المستقيمان المتوازيان

المستقيمان المتوازيان لهما نفس معامل التوجيه ونفس شعاع التوجيه

IV. المعادلة المكافئة: يمكن الانتقال من المعادلة $ax + by + c = 0$ إلى المعادلة $y = ax + b$ بتغيير

أطراف المساواة و بضرب أو قسمة المعاملات على عدد حقيقي غير معدوم.

مثال: كل المعادلات التالية متكافئة ولنفس المعادلة.

$$2x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 4 = 0 \Leftrightarrow -6x + 3y + 12 = 0$$

$$y = 2x - 4 \Leftrightarrow 12x - 6y - 24 = 0 \Leftrightarrow -12x + 6y + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

V. طرق إيجاد معادلة مستقيم

1) مستقيم يشمل نقطتين

I. طريقة (1) الارتباط الخطي

مثال: إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$$B(4; 5) ; A(1; -1)$$

① حساب مركبة $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

② نفرض النقطة $M(x; y)$ حيث $M \in (AB)$

③ نحسب مركبة $\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - (-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

④ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AM} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & x - 1 \\ 6 & y + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y + 1) - 6(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow -6x + 3y + 9 = 0$$

إذن معادلة (AB) هي: $y = 2x - 3$

✓ طريقة (2) (معامل التوجيه)

مثال: إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$$B(4; 5) ; A(1; -1)$$

① حساب معامل التوجيه a

$$a = \frac{5 - (-1)}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

و منه معادلة (AB) هي: $y = 2x + b$

② نحسب المعامل b بتعويض إحداثي A أو B في المعادلة

$$-1 = 2(1) + b \text{ تصبح المعادلة}$$

$$\Rightarrow b = -3$$

إذن معادلة (AB) هي: $y = 2x - 3$

أو من الشكل: $2x - y - 3 = 0$

* بفهم المعادلة المكافئة يتمكن التلميذ من الاستيعاب الكامل للدرس وتصبح له الحرية التامة في اختيار الطريقة المناسبة له

Prof Mustapha KHALED

✓ طريقة (4) (استخلاص المعاملات)

مثال: $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $E(2; 1)$ أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه $\vec{v}$

① نستخلص المعاملات a و b من شعاع التوجيه

لدينا $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه من الشكل $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ و منه نستنتج أن $\begin{cases} -b = 3 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 4 \end{cases}$ أي معادلة (D) من الشكل $4x - 3y + c = 0$

② إيجاد المعامل c

نعوض E في المعادلة $4x - 3y + c = 0$

$$\Rightarrow 4(2) - 3(1) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -5}$$

إذن معادلة (D) هي: $\boxed{4x - 3y - 5 = 0}$

✓ طريقة (6) (استنتاج المعاملات)

مثال:

 $5x + 2y - 6 = 0$ مستقيم معادلته $F(-3; 4)$; (D)

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

① $(\Delta) \parallel (D) \Leftrightarrow (\Delta) \Leftarrow (D)$ و لهما نفس معامل

وشعاع التوجيه.

 $\Leftarrow (\Delta)$ و (D) لهما نفس المعاملين a و bو منه معادلة (Δ) من الشكل $\boxed{5x + 2y + c = 0}$

② إيجاد المعامل c

نعوض F في المعادلة $5x + 2y + c = 0$

$$\Rightarrow 5(-3) + 2(4) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 7}$$

إذن معادلة (Δ) هي: $\boxed{5x + 2y + 7 = 0}$ $(\Delta) \Leftarrow (D)$ و (Δ) لهما نفس معامل و شعاع التوجيه

✓ طريقة (8) (تعويض معامل التوجيه)

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل $G(6; 5)$ و معامل توجيهه $\frac{3}{2}$ ① نعوض معامل التوجيه في المعادلة $y = ax + b$ إذن معادلة (K) من الشكل $y = \frac{3}{2}x + b$ ② نعوض G في المعادلة تصبح $5 = \frac{3}{2}(6) + b$

$$\Rightarrow \boxed{b = -4}$$

و منه معادلة (K) هي $y = \frac{3}{2}x - 4$ أو من الشكل $\boxed{3x - 2y - 8 = 0}$

(2) مستقيم معرف بنقطة وشعاع توجيه

✓ طريقة (3) (الارتباط الخطي)

مثال: $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $E(2; 1)$ أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه $\vec{v}$ ① نفرض النقطة $M(x; y)$ حيث $M \in (D)$ ② نحسب مركبة $\overrightarrow{EM}$

$$\overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

③ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\vec{v}$ و $\overrightarrow{EM}$

$$\vec{v} \parallel \overrightarrow{EM} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & x - 2 \\ 4 & y - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y - 1) - 4(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-4x + 3y + 5 = 0}$$

إذن معادلة (D) هي: $\boxed{4x - 3y - 5 = 0}$

(3) مستقيم يشمل نقطة ويوازي مستقيم

✓ طريقة (5) (الارتباط الخطي)

مثال:

 $5x + 2y - 6 = 0$ مستقيم معادلته $F(-3; 4)$; (D)

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

① نستخلص شعاع التوجيه $\vec{u}$ للمستقيم (D)

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

② نفرض النقطة $M(x; y)$ حيث $M \in (\Delta)$ ③ نحسب مركبة $\overrightarrow{FM}$ $\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-4 \end{pmatrix}$ ④ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{FM}$

$$(\Delta) \parallel (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} \text{ مرتبطان خطيا}$$

$$\vec{u} \parallel \overrightarrow{FM} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & x + 3 \\ 5 & y - 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2(y - 4) - 5(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-5x - 2y - 7 = 0}$$

إذن معادلة (Δ) هي: $\boxed{5x + 2y + 7 = 0}$

(4) مستقيم معرف بنقطة ومعامل توجيه

✓ طريقة (7) (استخلاص المعاملات)

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل $G(6; 5)$ و معامل توجيهه $\frac{3}{2}$

① من معامل التوجيه نستنتج المعاملين a و b

$$-\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} -a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

و منه معادلة (K) من الشكل $-3x + 2y + c = 0$

② نعوض G في المعادلة تصبح:

$$-3(6) + 2(5) + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

إذن معادلة (K) هي $\boxed{-3x + 2y + 8 = 0}$

حل جملة معادلتين (تقاطع مستقيمين)

I. طريقة الجمع

تعتمد طريقة الجمع على التخلص من إحدى المجهولين x أو y لتصبح معادلة ذات مجهول واحد

مثال: أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين

$$\begin{cases} 3x + 6y - 15 = 0 \dots (1) \\ 2x - 4y + 6 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

للتخلص من المجهول x يجب ضرب المعادلة (1) في (2) و المعادلة (2) في (-3) ليصبح معامل المجهول x متعاكسين، فتصبح الجملة:

$$\begin{cases} 6x + 12y - 30 = 0 \dots (3) \\ -6x + 12y - 18 = 0 \dots (4) \end{cases}$$

جمع المعادلتين (3) + (4) نجد: $24y - 48 = 0 \Rightarrow y = 2$

بالتعويض في المعادلة (1) أو (2) نجد $x = 1$ و منه الثنائية (1; 2) هي حل للجملة و النقطة (1; 2) هي نقطة تقاطع المستقيمين

II. طريقة التعويض

نستعمل طريقة التعويض غالبا عندما يكون معامل أحد المجاهيل = 1

مثال: أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين

$$\begin{cases} 5x - 4y + 6 = 0 \dots (1) \\ -2x + y + 3 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نستنتج أن: $y = 2x - 3$... (3)

بتعويض y في المعادلة (1) نجد:

$$5x - 4(2x - 3) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 8x + 12 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow -3x = -18$$

$$\Rightarrow x = 6$$

نعوض x في المعادلة (3) نجد:

$$y = 2(6) - 3 \Rightarrow y = 9$$

و منه الثنائية (6; 9) هي حل للجملة و النقطة (6; 9) هي نقطة تقاطع المستقيمين.

III. طريقة المحدد (Det) [الوضع النسبي لمستقيمين]

* تعتبر طريقة المحدد طريقة كاملة لمعرفة الوضع النسبي لمستقيمين أي:

◀ متوازيان منفصلان

◀ متوازيان متطابقان

◀ متقاطعان مع إيجاد نقطة التقاطع

الطريقة:

(D) مستقيم معادلته $ax + by = c$

(D') مستقيم معادلته $a'x + b'y = c'$

$$(*) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

لمعرفة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (D') نستعمل المحدد det

$$det = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$det \neq 0$	$det = 0$	إذا كان
الجملة (*) تقبل حل وحيد	الجملة (*) تقبل ما لا نهاية من الحلول أو لا تقبل حلول	فإن
	(D) و (D') إما متوازيان متطابقان أو متوازيان غير متطابقان	التفسير الهندسي

* في حالة $det \neq 0$ إحداثيي نقطة التقاطع هي:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{det}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{det}$$

✓ ملاحظة:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (D) // (D') \text{ و منفصلين}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (D') \text{ ينطبق على } (D)$$