



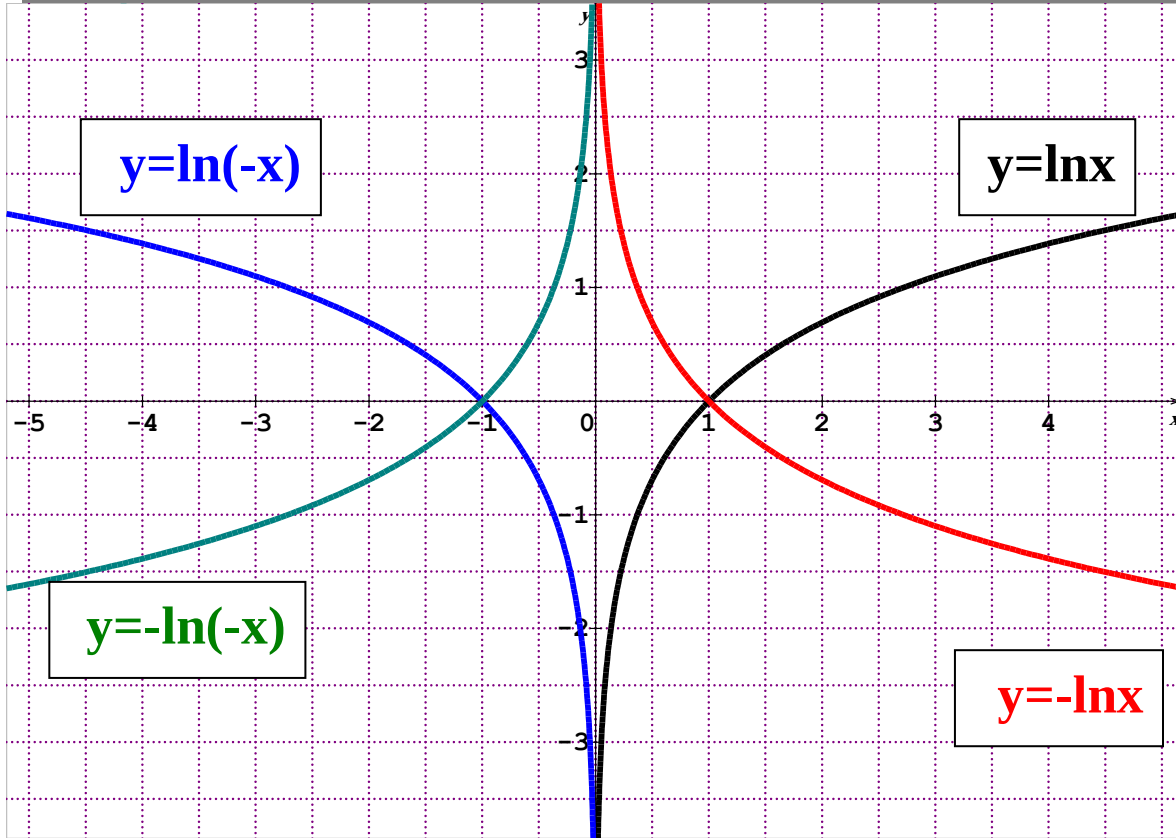
مجلة الرائد في الرياضيات



تمارين الدوال اللوغاريتمية في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook





مجلة الرائد في الرياضيات



تمارين الدوال اللوغاريتمية
في البكالوريا بين يديك

الشعب: علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

الجزء الاول

تدريبات متنوعة

الجزء الثاني

تمارين البكالوريا الجزائرية

الشعب: العلوم التجريبية+تقني رياضي+رياضيات

(1)المواضيع ، (2)الحلول (المجلة المرفقة)

الجزء الثالث

تمارين البكالوريات الاجنبية

(1)بكالوريات جزائرية نظام قديم (2)بكالوريات أجنبية

BAC2020

إعداد :الأستاذ:بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook



ملخص نظري لدرس الدالة اللوغاريتمية

1) تعريف

الدالة اللوغاريتمية النسيرية معرفة على $[0; +\infty[$ هي الدالة التي نرمز لها بـ: $\ln$ كمايلي:
من أجل كل $x > 0$ و $y \in \mathbb{R}$: $y = \ln x$ تكافئ $x = e^y$.

2) نتائج وخواص

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x و y ومن أجل كل عدد صحيح n :
أ) $\ln x = \ln y$ معناه $x = y$ ، $\ln x < \ln y$ معناه $x < y$
حالة خاصة: $\ln x = 0$ معناه $x = 1$ أي $\ln 1 = 0$ و $\ln x = 1$ معناه $x = e$ أي $\ln e = 1$.

ب) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ (1) ، $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ (2) ، $\ln x^n = n \ln x$ (3)

حالة خاصة: $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ (1) ، $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ (2) ، $\ln x^2 = 2 \ln x$ (3)

ج) من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$\ln(x)^n = n \ln|x|$ حيث n عدد زوجي و $\ln(x)^n = n \ln x$ حيث n عدد فردي

3- أ) إشارة العبارة $\alpha \ln(ax + b) + \beta$

$\alpha \ln(ax + b) + \beta$ تنعدم عند القيمة $x_0 = \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}} - b}{a}$ وإشارة العبارة $\alpha \ln(ax + b) + \beta$ هي :

1) إشارة $\alpha \cdot a$ من أجل كل $x \geq x_0$.

2) عكس إشارة $\alpha \cdot a$ من أجل كل $x \leq x_0$.

حالة خاصة: من أجل كل $x \in]0; 1[$: $\ln x < 0$ و من أجل كل $x \in]1; +\infty[$: $\ln x > 0$

ب) إشارة العبارة $\ln[u(x)]$

إشارة العبارة $\ln[u(x)]$ هي نفس إشارة العبارة $[u(x) - 1]$ حيث $u(x) > 0$

4) حل المعادلة $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$

المعادلة $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$ يؤول حلها لحل الجملة : $\begin{cases} X = \ln x \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$

5) النهايات الشهيرة

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ (3) و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ (2) ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ (1)

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (4) ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (5) وتكافئ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

تعميم : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ حيث n عدد طبيعي.

6) الدالة المشتقة

1) الدالة $x \rightarrow \ln x$ قابلة للإشتقاق من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

2) $(\ln(ax + b))' = \frac{a}{ax + b}$ حيث a و b عدنان حقيقيان و $ax + b > 0$

3) إذا كانت الدالة u موجبة تماما وقابلة للإشتقاق على المجال D فإن الدالة $x \rightarrow \ln[u(x)]$

قابلة للإشتقاق على المجال D حيث : $[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ (مشتقة دالة مركبة).

ملاحظة: إذا كانت الدالة u غير معدومة : $[\ln|u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

حالة خاصة: $\left[\ln \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right) \right]' = \left[\ln \left| \frac{ax + b}{cx + d} \right| \right]' = \frac{a.d - b.c}{(ax + b)(cx + d)}$

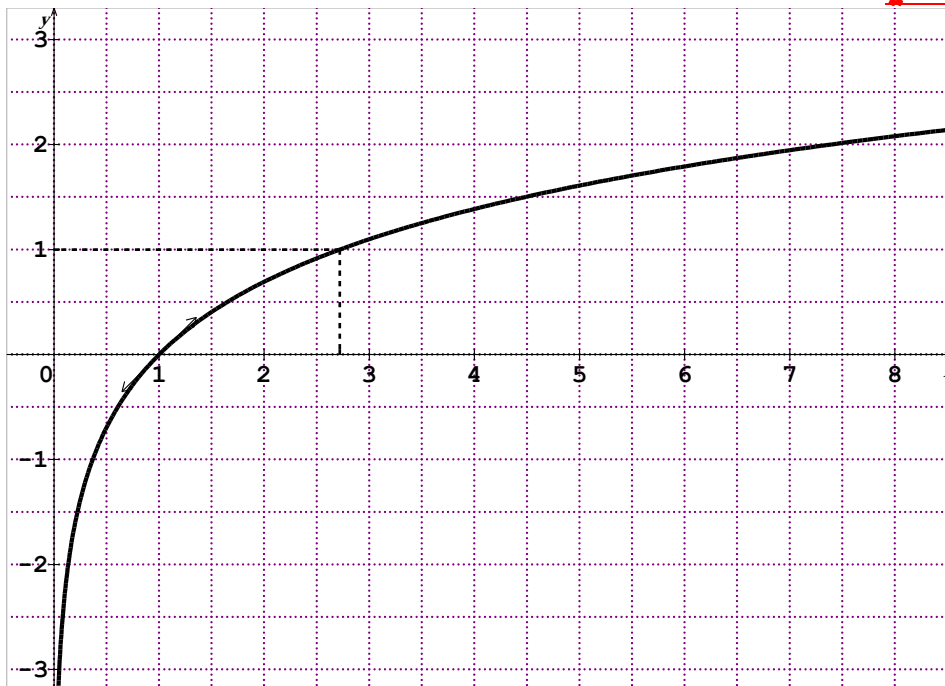
7) دراسة الدالة $x \rightarrow \ln x$

أ) دراسة التغيرات

الدالة $x \rightarrow \ln x$ مستمرة و متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ وعليه جدول تغيراتها يكون كما يلي

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			+	
$\ln x$	$-\infty$	e	1	$+\infty$

ب) التمثيل البياني



الجزء الأول: تدريبات متنوعة

التمرين 01

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

- 1) $1 - (\ln x)^2 = 0$ (5, $\ln(x^2 - 3x + 2) = 2\ln \sqrt{2}$ (4, $\ln|x+1| = 0$ (3, $\ln(x-1) = 0$ (2, $\ln x - 1 = 0$ (1
 $(\ln x)^2 - \frac{5}{2}\ln x + 1 = 0$ (8, $\ln(4x+5) - \ln(x-1) = 5\ln 2 + \ln(x)$ (7, $\ln(2x-3) = \ln(x-3) + \ln 5$ (6
 $\ln^3 x + 3\ln^2 x - 4 = 0$ (12, $\ln(e^{2x} - e^x + 1) = 0$ (11, $\ln|e^{2x} - 1| = x$ (10, $\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2$ (9
2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

- 1) $\ln|x^2 - 1| \leq 0$ (5, $\ln(x^2 - 2x) \leq \ln(4x - 5)$ (4, $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \leq 0$ (3, $\ln(x+1) \leq 0$ (2, $\ln x \geq 1$ (1
5) $(\ln x)^2 - \ln x - 2 \geq 0$ (5, $(\ln x + 1)(\ln x - 1) > 0$ (8, $\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} < 0$ (9, $2(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 + 3\ln x > 0$ (9)

التمرين 02

نعتبر كثير الحدود P للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$

- 1) تحقق من أن: $P(x) = (2x - 1)(x + 2)(3 - x)$ ثم استنتج حلول المعادلة $P(x) = 0$
2) استنتج مجموعة حلول المعادلتين التاليتين:
 $2e^{3x} - 3e^{2x} = 11e^x - 6$, $2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 11(\ln x) = -6$

التمرين 03

ليكن كثير الحدود $P(x)$ حيث: $P(x) = x^3 - 3x - 2$

- 1) أحسب $P(-1)$, ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x) = 0$
2) استنتج حلول كلا من: * المعادلة التالية: $(x+1)(\ln^2 x - \ln x - 2) = 0$.
* المتراجحة التالية: $(x+1)e^{2x} \leq (x+1)(e^x + 2)$

التمرين 04

عين مجموعة تعريف كلا من الدوال التالية ثم أدرس تغيراتها على مجالات تعريفها

- 1) $f(x) = \ln(x-1)$ (2, $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ (3, $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x}$ (4, $f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ (4
5) $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)$ (6, $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ (7, $f(x) = 1 + (\ln x)^2$ (8, $f(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}$
9) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ (10, $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$ (11, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ (12, $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln|x-1|$

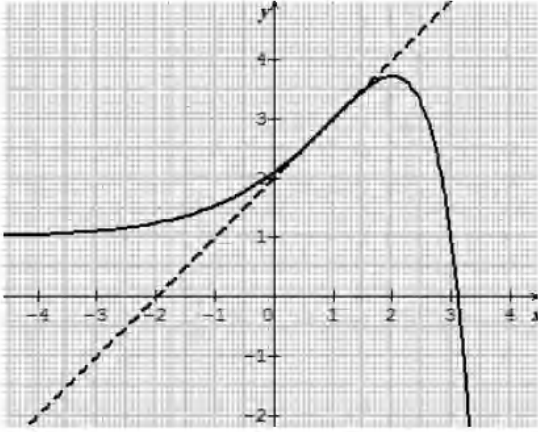
التمرين 05

عين الإجابة (أو الأجوبة) الصحيحة لكل سؤال من الأسئلة التالية :

$$f(x) = x + \frac{2\ln x}{x} \text{ بـ }]0; +\infty[$$

- (1) f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ وإشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$
- (2) على $]0; +\infty[$ إشارة g' هي إشارة $x - 1$.
- (3) g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3 على $]0; +\infty[$.
- (4) f متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.
- (5) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\alpha \in]1; 2[$.
- (6) منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$.

التمرين 06



التمثيل البياني في الشكل المقابل هو منحنى لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 المنحنى (C_f) يقبل يشمل النقطة $A(3; 1)$ ويقبل مماسا يوازي محور الفواصل عند النقطة $B(2; 1+e)$ ويقبل مستقيم مقارب معادلته $y = -1$ عند $-\infty$.

ويقبل مماسا يخرق (C_f) في النقطة $C(1; 3)$.

(1) عيّن الأعداد التالية : $f'(1)$ ، $f'(2)$ و $f''(1)$.

(2) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة $C(1; 3)$.

(3) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]3; +\infty[$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

(4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة الحلول المعادلة $f(x) = |m|$.

(5) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(6) لتكن g دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty; \alpha[$ بـ : $g(x) = f(x) - \ln[f(x)]$.

(أ) عبّر عن $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

(ب) أستنتج اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين 07

اذكر دون تبرير إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة.

(1) الدالة $\ln$ موجبة تماما على $]1; +\infty[$.

- (2) الدالة $f : x \mapsto \ln[-x(x+1)]$ معرفة على $]-1; 0[$.
- (3) الدالة $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ متناقصة تماما على $]1; +\infty[$.
- (4) المعادلة $\ln x^2 = \ln(3x + 4)$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.
- (5) إذا كانت $f(x) = x \ln x$ فإن $xf'(x) = 1 + x$.
- (6) المتراجحة $1 + \ln(2 - x) \geq 0$ تقبل كمجموعة حلول المجال $]-\infty; 2[$.

التمرين 08

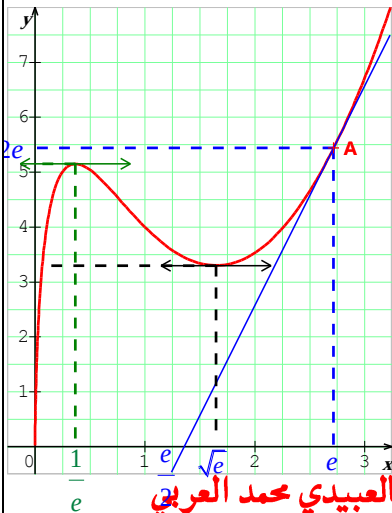
اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل.

- (1) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = 2(\ln x)^2 - \ln x - 3$
- أ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ، ب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ، ج $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
- (2) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $f(x) = x^2 - 2x - \ln(x-1)^2$ يقبل محور تناظر معادلته
- أ $x = 1$ ، ب $x = -1$ ، ج $x = 2$
- (3) حل المعادلة: $\sqrt[3]{5-3x} = 2$ هو : أ $x = 1$ ، ب $x = -1$ ، ج $x = 2$
- (4) الدالة المشتقة للدالة f والمعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ ب: $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ هي :

أ $f'(x) = \frac{\ln 3}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ ، ب $f'(x) = \frac{\ln 3}{x^2} e^{\frac{1}{\ln 3}}$ ، ج $f'(x) = \frac{-\ln 3}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

التمرين 09

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ في الشكل الموالي مرسوم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ومماسه عند النقطة $A(e; 2e)$ يقطع محور الفواصل في



النقطة التي فاصلته $\frac{e}{2}$.

نقبل أن $f(x) = 2x(a(\ln x)^2 + b \ln x + c)$ حيث a, b, c أعداد حقيقية

- احسب $f'(x)$ بدلالة a, b, c
- باستعمال المعلومات في الشكل عين $f'(\frac{1}{e})$, $f'(\sqrt{e})$ و $f'(e)$.
- استنتج أن $f(x) = 2x(2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2)$.

4. عين نهاية f عند 0 (يمكن وضع $t = -\ln x$) ، ثم عين نهاية f عند $+\infty$.
 5. بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$
 6. ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات f .

التمرين 10

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - 2\ln(1-2x) & ; -4 \leq x \leq 0 \\ f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) & ; x > 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4; +\infty[$ بـ :

واليك (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ ، ثم بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$

ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f

ب) اكتب معادلتين نصفين المماسين عند النقطة O مبدأ الاحداثيات.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ln x + \ln 2 = 0$ ثم فسر النتيجة بيانيا

3- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[-4; +\infty[$.

4- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حدا وحيدا $\alpha \in]-4; -3[$ ، جد $f(0)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$

5- أرسم المنحنى (C) .

6- نعتبر الدالة العددية والمعرفة على المجال $[-4; 0]$ بـ :

$$g_m(x) = f_m(x) + 1 \text{ حيث } m \text{ وسيط حقيقي غير معدوم.}$$

بين أن جميع المنحنيات (C_m) الممثل للدالة g_m تشمل التقطعيتين $A(0;1)$ و $B(\alpha;1)$

الجزء الثاني: تمارين البكالوريات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 11: دورة 2019

f الدالة العددية المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

واليك (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانياً. ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير f على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ وشكل جدول تغيراتها

3- نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيرية "ln" في المعلم السابق.

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب) ادرس وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ)

4) ارسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

6) دالة معرفة على المجال $]-1; 0[\cup]-\infty; -1[$ بـ: $g(x) = f(-2x)$

دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها

التمرين 12: دورة 2018

$I-g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$

و (C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل

احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$ و (C_f)

تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وبيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

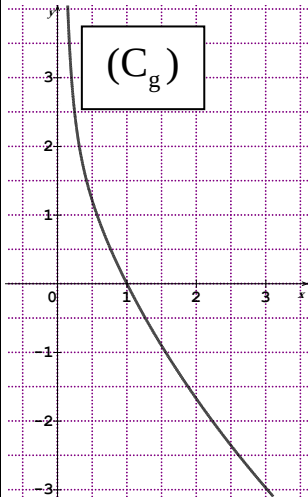
2- أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) بيّن أن: $y = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس لـ (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور

الفواصل، ثم ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f)

4) عين بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - em$ حلين متمايزين.



التمرين 13: دورة 2017

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن الدالة f فردية وفسر ذلك بيانياً.

2- احسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب.

3- أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $D: f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$.

ب- أستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$.

5- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

6- أنشئ المستقيم (Δ) ثم المنحنى (C_f) .

7- m وسيط حقيقي، ناقش بيانياً وحسب قيم m عدد وحلول المعادلة: $(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

التمرين 14: دورة 2017 الاستدراكية

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $] -\frac{1}{2}; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$ كمايلي:

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب النهايتين التاليتين: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

2- أ- بين أنه من أجل كل x من $] -\frac{1}{2}; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$.

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- حل في المجال $] -\frac{1}{2}; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $f(x)$.

4- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها، ثم أنشئ (C_f) .

التمرين 15: دورة 2016

I- الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $g(x) > 0$.

II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2) -أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

4) -أ- بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y = x - 1$ معادلة له.

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و (Δ) .

5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C).

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y = mx - m$ معادلة له.

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1; 0)$ تنتمي للمستقيم (Δ_m) .

ب- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx - m$.

التمرين 16: دورة 2016 الاستدراكية

I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,34 < \alpha < -0,33$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$.

II- لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1-أ) بين أن: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ واحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$.

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

د) ارسم المنحنى (C_f) . (نقبل أن $f(\alpha) \approx 3,16$).

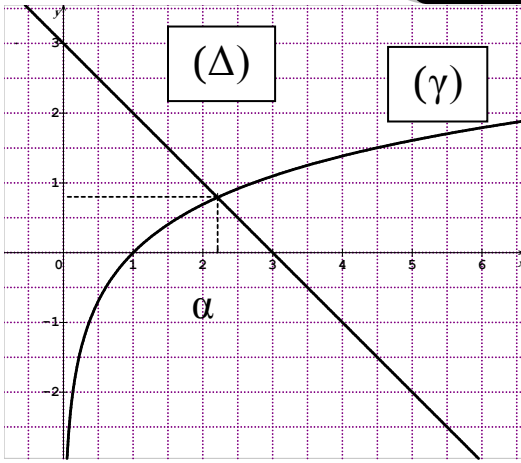
3) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1; +1[$ ب: $k(x) = f(-|x|)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ) بين أن الدالة k زوجية.

ب) بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم ارسمه (دون دراسة الدالة k)

ج) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $k(x) = m$.

التمرين 17: دورة 2015



المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 I (γ) التمثيل البياني للدالة $x \rightarrow \ln x$ و (Δ) المستقيم
 ذو المعادلة $y = -x + 3$ و α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ)
 1) بقراءة بيانية حدّد وضعية (γ) بالنسبة لـ (Δ) على $]0; +\infty[$
 2) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$
 استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ ثم تحقق أن: $2,2 < \alpha < 2,3$
 II f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) \text{ و } (C_f) \text{ تمثيلها البياني.}$$

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2) أثبت أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل، ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

التمرين 18: دورة 2014

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1-أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسيا.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2-أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

ج) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$

3) أنشئ (T) والمنحنى (C_f) .

4) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$

و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

1-أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .

ج) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$

التمرين 19: دورة 2013

I) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه، من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ فسر النتيجة هندسيا. ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ) بيّن أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب) أدرس اتجاه تغير f على $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حدا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أ) بيّن أن المستقيم $(\Delta): y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) تقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 . ب) أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين.

التمرين 20: دورة 2012

I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ ب: $f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ فسر النتيجة هندسيا. ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) بيّن أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$: $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$ استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x + 5$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

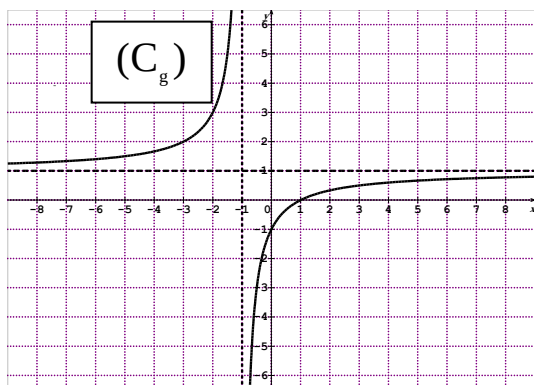
(4) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $-3,5 < \alpha < -3,4$ و $-1,1 < \beta < -1$

5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

6) أ- نعتبر النقطتين $A(-1; 3 + 6\ln \frac{3}{4})$ و $B(-2; \frac{5}{2} + 6\ln \frac{3}{4})$

بين أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln \frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)
 ب- بين أن (AB) ممس (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيينها

التمرين 21: دورة 2011



I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب: $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

(C_g) تمثيلها البياني (الشكل المقابل) بقراءة بيانية:

أ- شكل جدول تغيرات الدالة g

ب- حل بيانيا المتراجحة: $g(x) > 0$

ج- عين بيانيا قيم x التي من أجلها $0 < g(x) < 1$

II) لتكن الدالة f والمعرفة على المجال $]1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ فسر النتيجة هندسيا

2) أ- بين أنه من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

ب- احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات f

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0 \in]3,62; 3,63[$.

د- أرسم المنحنى (C_f) .

3- أ- باستعمال الجزء I) السؤال ج، عين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.

التمرين 22: دورة 2010

I) الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ب: $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) بين أن f متزايدة تماما على I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

4) أثبت أنه من أجل كل x من I $f(x) = \ln(x + a) + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة $\ln$. ثم ارسم (C) و (C_f) .

II g الدالة المعرفة على المجال I ب: $g(x) = f(x) - x$

1) احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) احسب $g(1)$ ، ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $[1, 5; +\infty[$ حلا وحيدا α .
تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى g على $[0, 5; 5]$ في المعلم السابق

4) استنتج إشارة $g(x)$ على I ثم حدد ضعية (C_f) و (d)

5) برهن أنه من أجل عدد حقيقي x من المجال $[1; \alpha[$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[1; \alpha[$.

التمرين 23: دورة 2009

I - h دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

2. بين أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1 + 2(x + 1)^2}{x + 1}$. استنتج اتجاه تغير h ، ثم أنجز جدول تغيراتها

3. احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$.

II - f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$ نسمي (C_f) تمثيلها البياني

1. احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب) باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ (ج) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

د) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

2. بين أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x + 1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. بين أن (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. ارسم (C_f) .

شعبة: تقني رياضي

التمرين 24: دورة 2019

I- الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ب:

$$g(x) = (x+1)(x+e) - e(x \ln x)$$

احسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln(x+1) + \frac{e \ln x}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

أ-1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

3-أ) بيّن أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α .

ب) تحقق أن : $0,7 \leq \alpha \leq 0,8$

4- (Γ) التمثيل البياني للدالة : $x \rightarrow \ln(x+1)$ على المجال $]0; +\infty[$.

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (Γ) و (C_f)

ج) أرسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f)

التمرين 25: دورة 2018

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; 1[$ كما يلي: $g(x) = 2 - x + \ln x$

1- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; 1[$.

2- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,15 \leq \alpha \leq 0,16$

3- استنتج حسب إشارة $g(x)$ على المجال $]0; 1[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1-2x+\ln x}{x-1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{1-2x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-1}$

ثم فسر النتيجة بيانيا.

2- أ، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$

ب) بين أن f متزايدة تماماً على $[\frac{1}{\alpha}; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $[\frac{1}{\alpha}; 1]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة: $y = -2$

4- ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) يعطى $f(\frac{1}{\alpha}) = -1,8$

5- عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متميزين.

التمرين 26: دورة 2017

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]2; +\infty[\cup]-\infty; 1]$ بـ: $f(x) = -2x + 3 + 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- احسب النهايتين التالية: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- بين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3- أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $(3-x) \in D_f$ ، $f(3-x) + f(x) = 0$

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيين إحداثيه.

4- أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,45; 0,46[$.

ثم استنتج أنها تقبل حلاً آخر β يطلب تعيين حصره.

5- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -2x + 3$ مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

6- ارسم (Δ) و (C_f) .

التمرين 27: دورة 2017 الاستدراكية

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2 - \ln x}{x^2}$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

3- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,71 < \alpha < 1,72$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 + \frac{-1 + \ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$1-أ) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

$$2-أ) \text{ بيّن أن المستقيم } (\Delta) \text{ ذا المعادلة: } y = -\frac{1}{2}x + 2 \text{ مقارب مائل للمنحنى } (C_f).$$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

$$3- \text{ نقبا أن } f(\alpha) \approx 0,87 \text{ و } f(\beta) = f(\gamma) = 0 \text{ حيث } 0,76 < \beta < 0,77 \text{ و } 4,19 < \gamma < 4,22.$$

أنشئ في المعلم السابق المستقيم (Δ) المنحنى (C_f) .

التمرين 28: دورة 2016 م 1

$$I) \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال }]-1; +\infty[\text{ ب: } g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)$$

$$1-أ) \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

$$2-أ) \text{ بيّن أن للمعادلة } g(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ حيث: } 0,4 < \alpha < 0,5.$$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

$$II) \text{ دالة معرفة على }]-1; +\infty[\text{ بمايلي: } f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$$

$$1) \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \text{ وفسر النتيجة هندسيا ثم احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$2-أ) \text{ أدرس اتجاه تغير الدالة } f \text{ على المجال }]-1; +\infty[\text{، ثم شكل جدول تغيراتها.}$$

$$\text{ب) بيّن أن: } f(\alpha) = -\alpha + 4 - \frac{4}{\alpha+1} \text{، ثم أعط حصر لـ } f(\alpha) \text{ (تدور النتائج إلى } 10^{-2} \text{).}$$

$$3) \text{ ليكن } a \text{ عدد حقيقي من المجال }]-1; +\infty[\text{، نسمي } (T_a) \text{ المماس للمنحنى } (C) \text{ الممثل للدالة } f$$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ عند النقطة ذات الفاصلة a .

$$\text{نضع من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال }]-1; +\infty[: h(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$$

$$\text{أ- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال }]-1; +\infty[: h'(x) = f'(x) - f'(a)$$

$$\text{ب- باستعمال اتجاه تغير } g \text{، عيّن إشارة } h'(x) \text{ حسب قيم } x \text{ واستنتج اتجاه تغير } h \text{ على المجال }]-1; +\infty[$$

$$\text{ج- حدّد الوضع النسبي للمنحنى } (C) \text{ والمستقيم } (T_a).$$

$$4-أ) \text{ بيّن أنه يوجد مماسان } (T_a) \text{ يشمالان النقطة } A(1;0) \text{ يطلب تعيين معادلتيهما.}$$

$$\text{ب) ارسم المماسين والمنحنى } (C).$$

التمرين 29: دورة 2016 م 2

$$I) \text{ نعتبر الدالة العددية } g \text{ المعرفة على المجال }]0; +\infty[\text{ ب: } g(x) = x - x \ln x$$

$$1-أ) \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ ، } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيرها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3,5 < \alpha < 3,6$

3) استنتج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $[0; +\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0; +\infty[$ بمايلي: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 4\text{cm}$.

1) بيّن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$

2-أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

ب) بيّن أن الدالة f متزايدة على $[0; \alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

ج) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

د) أحسب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، فسر النتيجة هندسيا.

3-أ) بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ج- أرسم (C_f).

4) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي: $x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2)$..(E)

أ- تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

ب- عيّن بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متميزين.

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ و (C_h) منحناها البياني في المستوي.

أ- بيّن أن h زوجية. ب- أرسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f).

التمرين 30: دورة 2015

I) h دالة معرفة على $]-2; +\infty[$ بمايلي: $h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أستنتج أنه من أجل كل x من $]-2; +\infty[$ ، $h(x) > 0$.

II) f دالة معرفة على $]-2; +\infty[$ بمايلي: $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2} \ln(x+2)$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1cm)

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) أ، بين بين أنه من أجل كل $x \in]-2; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-2; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ، بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4) أ، أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثيها.

ب) أرسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f) .

III) g دالة معرفة على $]-2; +\infty[$ بمايلي: $g(x) = |x+1| + \frac{2}{x+2} |\ln(x+2)|$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$ و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى g ؟

2) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.

3) انطلاقاً من المنحنى (C_f) أرسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.

التمرين 31: دورة جوان 2014

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I- g دالة معرفة على $]0; 3]$ ب: $g(x) = x \ln x + x$.

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2- أ، بين أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حداً وحيداً α في المجال $]0; 3]$ ثم تحقق أن $1,45 < \alpha < 1,46$.

ب) استنتج إشارة $g(x) - 2$.

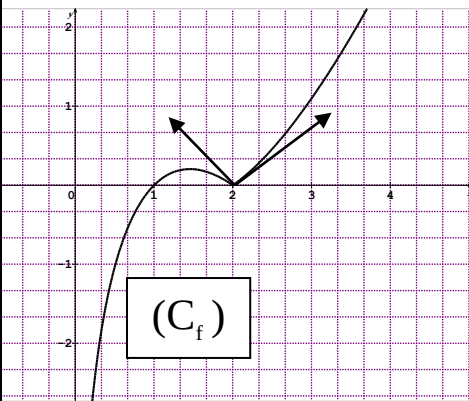
II - التمثيل البياني المقابل (C_f) هو للدالة f والمعرفة

على المجال $]0; 3]$ ب: $f(x) = |x-2| \ln x$.

1) باستعمال (C_f) ضع تخميناً حول قابلية اشتقاق f عند 2

2) أثبت صحة تخمينك.

3) أدرس تغيرات الدالة f



III- h الدالة المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ب: $h(x) = (2 - \cos x) \ln(\cos x)$

1) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمحنى (C_h) حيث (C_h) منحنى الدالة h

2) أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h) .

التمرين 32: دورة جوان 2013 م

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

2- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$

3- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II- f الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + [2 - \ln(x+1)]^2$ و (C_f) تمثيلها البياني
1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

2- بيّن أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

4- بيّن أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 [1 + (\alpha+1)^2]$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5- مثل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

III- (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1- أثبت أن المسافة AM تعطى بالعلاقة: $AM = \sqrt{f(x)}$.

2- الدالة k معرفة على $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- بيّن أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

ج- بيّن أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

التمرين 33: دورة جوان 2013 م

I- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (x-1)e^x$

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- بيّن أنه، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $1 + (x-1)e^x \geq 0$

II- f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ ب:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- أ- بيّن أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.
ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2- أ- تحقق أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

III- n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ f_n الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ ب: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$

و (C_n) منحناها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$.
2- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$

- 3- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .
- 4- بين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.
- 5- أ- بين أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد من $\alpha_1 \in]0, 3; 0, 4[$ بحيث: $f_1(\alpha_1) = 0$.
 ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) \leq 0$.
 ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $[\alpha_1; 1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n) = 0$.
- ج- بالاعتماد على الجزء II ، بين أنه ، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

التمرين 34: دورة جوان 2012

I- دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + a + b \ln(x)$

- 1- عين العددين الحقيقيين a و b علما أن (C_f) يقبل في النقطة $A(1; -1)$ مماسا معامل توجيهه 4
- 2- نضع: $a = -2$ و $b = 2$. أ) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]0; +\infty[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

II- دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. ب) احسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ج) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f

- 2- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 2$ مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)
- ب) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ثم جد معادلة له

ج) نأخذ $\alpha = 1, 25$ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث:
 $0, 6 < x_1 < 0, 7$ و $2, 7 < x_2 < 2, 8$. ثم ارسم كلا من (Δ) و (T) و (C_f) .

3- ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وحلول المعادلة: $(m + 2)x + 2 \ln(x) = 0$

التمرين 35: دورة جوان 2011

f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{a + b \ln(2x)}{4x^2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) عيّن a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A(\frac{1}{2}; 1)$ لـ (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل.

2) g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{1 + 2\ln(2x)}{4x^2}$ (C_g) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ وفسر النتيجةين بيانيا

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) حل في $]0; +\infty[$ المعادلة: $g(x) = 0$.

د) أنشئ (C_g) .

التمرين 36: دورة جوان 2010

g دالة معرفة على $[1; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = 2x + \ln x$

أ) احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

ج) بيّن أنه من أجل كل $x \in [1; +\infty[$: $g(x) \neq 0$.

2) f دالة معرفة على $[1; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{6\ln x}{2x + \ln x}$ و (C_f) التمثيل البياني لها

أ) بيّن أن: $f(x) = \frac{\frac{6\ln x}{x}}{2 + \frac{\ln x}{x}}$. ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ماذا تستنتج؟

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، شكل جدول تغيرات f

د) ما هي قيمة k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متميزين

هـ) جد معادلة للمماس (Δ_1) لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1.

3) h دالة معرفة على $[1; +\infty[$ بـ: $h(x) = f(e^x)$ واليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ) شكل جدول تغيرات الدالة h . ب) جد معادلة للمماس (Δ_2) لـ (C_h) عند النقطة التي فاصلتها 1

ج) أرسم كلاً من (Δ_1) ، (Δ_2) ، و (C_f) و (C_h) في المعلم السابق.

شعبة الرياضيات

التمرين 37: دورة 2019

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x ; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 3cm
1) برهن أن:

- إذا كان $x > 1$ فإن: $1 - x - 2x \ln x < 0$

- إذا كان $0 < x < 1$ فإن: $1 - x - 2x \ln x > 0$

2- أ) أثبت أن الدالة f قابلة للأشتقاق عند 0 من اليمين .

أكتب معادلة لنصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم.

ب) ادرس الوضع النسبي للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) .

ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

د) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- أ) أكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) الموازي للمستقيم (Δ)

ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[1; +\infty[$ حداً وحيداً α ، ثم تحقق أن $1,76 < \alpha < 1,77$.

ج) اكتب معادلة للمستقيم (d) الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة ذات الإحداثيين $(\alpha; 0)$

- ارسم كلاً من (T) ، (d) و (Δ) ثم المنحنى (C_f) في المجال $[0; \alpha]$.

5) m وسيط حقيقي ، ناقش وحسب قيم m عدد حلول المعادلة : $x^2 \ln x + m = 0$ في المجال $[0; \alpha]$

التمرين 38: دورة 2018

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \frac{1}{\ln x}; & x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ) بين أن f مستمرة عند 0 بقيم أكبر

ب) احسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

2- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α حيث $1,49 < \alpha < 1,5$
 ثم بين أن معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ω هي من الشكل: $y = (\alpha + 3 + \frac{1}{\alpha})(x - \alpha)$
 5) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

6) الدالة العددية والمعرفة على المجال $[1; +\infty[$ كمايلي: $h(x) = 1 - x + x \ln x$.
 أ) بين أن الدالة h متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ و اشارة $h(x)$ على المجال $[1; +\infty[$.

ب) بين أنه من أجل كل $x > 1$: $f(x) - x + \frac{1}{x \ln x} = \frac{h(x)}{x \ln x}$

واستنتج أنه من أجل كل $x > 1$: $x - \frac{1}{x \ln x} < f(x) < x + 1$

7) مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = \alpha$ و $x = e$ (أساس اللوغاريتم النيري)

بين أن: $\frac{1}{2}(e^2 - \alpha^2) - \ln(\alpha + 1) < A < \frac{1}{2}(e - \alpha)(e + \alpha + 2)$

التمرين 39: دورة 2017

I-- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

1- أدرس إتجاه تغير الدالة g .

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $[1,76; 1,77]$ استنتج إشارة $g(x)$ على $[0; +\infty[$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0; +\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x - \ln x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أثبت أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 من اليمين، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة بيانيا

2- بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - \ln x)^2}$

3- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4- لتكن h الدالة العددية والمعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي: $h(x) = x - \ln x$.

أ- بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $h(x) > 0$ واستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = 1$.

ب- أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 2,31$)

التمرين 40: دورة 2017 الإستثنائية

I-- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = x + 2 - \ln x$ - أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II-- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x) = \frac{1}{2} \left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x} \right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x) = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$ ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f .

2- أ) أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب لـ (C_f) . ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

4- أ) أثبت أنه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثم جد معادلة لكل منهما.

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث:

$$-0,5 < \beta < -0,4 \text{ و } 2 < \alpha < 2,1$$

5- أرسم المماسين و المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

6- باستعمال (C_f) ، عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x(e - 2m) = \ln(x^2)$ حلا وحيدا

التمرين 41: دورة 2016

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = 1 + x^2 + 2 \ln x$.

(1) ادرس إتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,52; 0,53[$ حلا وحيدا α .

(3) استنتج إشارة $g(x)$ المجال $]0; +\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = -x + \frac{3 + 2 \ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(2-أ) بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$.

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f . (ج) تحقق أن $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ ثم جد حصره.

(3-أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل (Δ) .

(ج) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة له.

(4) تقبل ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما x_1, x_0 حيث:

$$0,22 < x_0 < 0,23 \text{ و } 2,11 < x_1 < 2,13.$$

أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

(5) m وسيط حقيقي : ناقش بيانيا وحسب قيم m ، عدد حلول المعادلة: $3 + 2\ln x - mx = 0$

التمرين 42: دورة جوان 2015

f الدالة معرفة بـ: $f(0) = 1$ ومن أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 - x^2 \ln x$.
و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
(1) أ) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

(2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بيّن أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حدا وحيدا α من المجال $]0; +\infty[$.

(ب) تحقق أن: $1,531 < \alpha < 1,532$.

(4) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(|x|)$.

و (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أ) ادرس شفعية الدالة g . (ب) أنشئ المنحنى (C_g) على المجال $[-2; 2]$.

التمرين 43: دورة جوان 2014

- 1- الف دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = (1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x)$.
 و (C_f) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 أ) ادرس تغيرات الدالة f .
 ب) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e .
 ج) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم أسم (C_f) على المجال $]0; e^2]$
 2- الدالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = 1 - \ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
 أ) ادرس تغيرات الدالة g .
 ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم أرسم (C_g) على المجال $]0; e^2]$.

التمرين 44: دورة جوان 2013

- I-1- الدالة u معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$.
 أ) ادرس اتجاه تغير الدالة u .
 ب- بيّن أنه، من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $e^x - e > 3x - 4$.
 2- الدالة v معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$.
 أ- بيّن أن: $v'(1) = 0$ (يرمز v' إلى المشتقة للدالة v)
 ب- أثبت أنه، من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $v(x) \leq 0$.
 ج- أثبت أنه، من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$.
 3- أثبت أنه، من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0$.
 II- الف دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$.
 و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 2- بيّن أن f متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ وشكل جدول تغيراتها
 3- أحسب $f(1)$ ، ثم مثل المنحنى (C_f) على المجال $]0; 2,5]$.

التمرين 45: دورة جوان 2012

- I- دالة معرفة على $]-1; 3]$ ب: $g(x) = 2 \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

3) عيّن ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

4) h دالة عددية معرفة على $]-1; 3[$ ب: $h(x) = [g(x)]^2$

أ) أحسب $h'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$.

ب) عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

II) f دالة عددية معرفة على $]-1; 3[$ كما يلي:
$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)} ; x \neq 0$$
 و $f(0) = 0$ تمثيلها البياني (C_f) .

1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ثم أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

2) أ- بيّن أنه من أجل كل $x \in]-1; 0[\cup]0; 3[$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب- بيّن أن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عين حصر $f(\alpha)$

ج- أحسب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات f

3) أ- بيّن أنه من أجل كل $x \in]-1; 3[$ فإن $x - \ln(x+1) \geq 0$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3

5) أرسم (T) ، (T') و (C_f) .

6) ناقش بياناً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

التمرين 46: دورة جوان 2011

1) g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + \ln(x^2) - 1$

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

2) الدالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = (1 - \frac{1}{x^2})(\ln x)$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أ) بيّن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وأن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) (δ) المنحنى الممثل للدالة $\ln x \rightarrow x$ على المجال $]0; +\infty[$.

- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى للمنحنى (δ) ثم جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x$ ، ماذا تستنتج؟

- أرسم (δ) و (C_f) .

التمرين 47: دورة جوان 2010

g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = x - 1 - 2 \ln x$ و (C_g) المنحنى الممثل لها

1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ وفسر النتيجة بيانياً.

2- أ) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

ب) أدرس تغيرات الدالة g . ج) أحسب $g(1)$

د) برهن ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين احدهما α حيث $3,5 < \alpha < 3,6$.

هـ) استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g(\frac{1}{x})$.

3- دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسياً.

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ج- بيّن أنه من أجل x من $]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f . د- شكل جدول تغيرات الدالة f بيّن أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$

واستنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

4- أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0;3]$

الجزء الثالث: بكالوريات جزائرية و أجنبية

بكالوريات جزائرية-نظام قديم

التمرين 48: دورة جوان 95 ع-ش

1. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x$: كمايلي: $[0; +\infty[$ المجال معرفة على x الحقيقي

أ) احسب نهايات الدالة f عند حدود المجال $[0; +\infty[$

ب) ادرس تغيرات الدالة f

2- نسمي (Γ) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

أ) اكتب معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني (Γ) .

ب) اكتب معادلة المماس لـ (Γ) عند النقطة ω ذات الترتيب 0

بين ان المنحني (Γ) يقبل نقطة انعطاف E . اكتب معادلة لمماس للمنحني (Γ) عند هذه النقطة.

ج) ارسم بعناية المماسين المذكورين سابقا ثم ارسم (Γ)

التمرين 49: دورة جوان 98 ع-ش

I. ϕ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ ب: $\phi(x) = x^2 - 4x + 3 + 6 \ln|x - 2|$

1. احسب $\phi(1)$ و $\phi(3)$.

2. ادرس تغيرات الدالة ϕ و استنتج إشارة $\phi(x)$

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي: $f(x) = x + 2 - \frac{5}{x-2} - \frac{6 \ln|x-2|}{x-2}$

و (Γ) المنحني البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{2\}$: $f'(x) = \frac{\phi(x)}{(x-2)^2}$.

ب) استنتج تغيرات الدالة f .

ج) بيّن أن المنحني (Γ) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل يطالب تعيين معادلتهما.

د) احسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(4)$ و $f(-4)$ بالتقريب إلى $\frac{1}{10}$

- تحقق أن النقطة $\omega(2; 4)$ مركز تناظر للمنحني (Γ) ثم ارسم (Γ)

التمرين 50: دورة جوان 2001 ع

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$ كما يلي: $f(x) = x + \ln|e^x - 2|$ وليكن (C) المنحني

البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 2cm)

1- أدرس تغيرات الدالة f .

ب- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$ ، $f(x) = 2x + \ln|1 - 2e^{-x}|$

2- أ- بين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين $(\Delta): y = 2x$ و $(\Delta'): y = x + \ln 2$

ب- عين نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل .

ج- أنشئ المنحنى (C)

التمرين 51: دورة جوان 2004 ع

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

وليكن (C) المنحنى البياني للمثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- أدرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

- أثبت أن (C) يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 1$ في نقطتين يطلب تعيين احداثياتهما.

2) احسب: $f(-x) + f(x)$ ماذا تستنتج؟

3) بين ان المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حدا وحيدا $\alpha \in]-1; -0,5[$.

4) أثبت أن (C) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس المنحنى (C) في نقطتين يطلب

تعيين احداثياتهما ثم أوجد معادلة للمماس (T) .

5) أرسم (T) ثم (C)

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx + 1$

7) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$ وليكن (γ) تمثيلها البياني

- بين ان g زوجية .

- دون دراسة تغيرات g ، ارسم (γ) علل ذلك.

بكالوريات اجنبية

التمرين 52: عن بكالوريا تونس 2018

ترجمة وتصرف الاستاذ: بالعبيدي م العربي

في الجزء المرفق الشكل (Γ) يمثل منحنى الدالة u في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = x - 1 - 4 \ln x$.

(Γ) يقبل مقاربين أحدهما حامل محور الترتيب والاخر مائل (D) ذو المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$

(Γ) يقبل مماسا وحيدا يوازي محور الترتيب عند النقطة ذات الفاصلة 4 .

(Γ) يقطع المحور $(O; \vec{i})$ في نقطتين فاصلتهما 1 و α على الترتيب .

أ) بقرأة بيانية: 1) أحسب كلا من : $u(1)$ ، $u(\alpha)$ ، $u'(4)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{x}$.

2) عيّن إشارة كلا من : $u(x)$ و $u'(x)$.

ب) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4 \ln x$

وليكن (C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- أ) تحقق انه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن: $f(x) = e^{u(x)} - u(x)$

ب) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2- أ) تحقق انه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = u'(x)[e^{u(x)} - 1]$

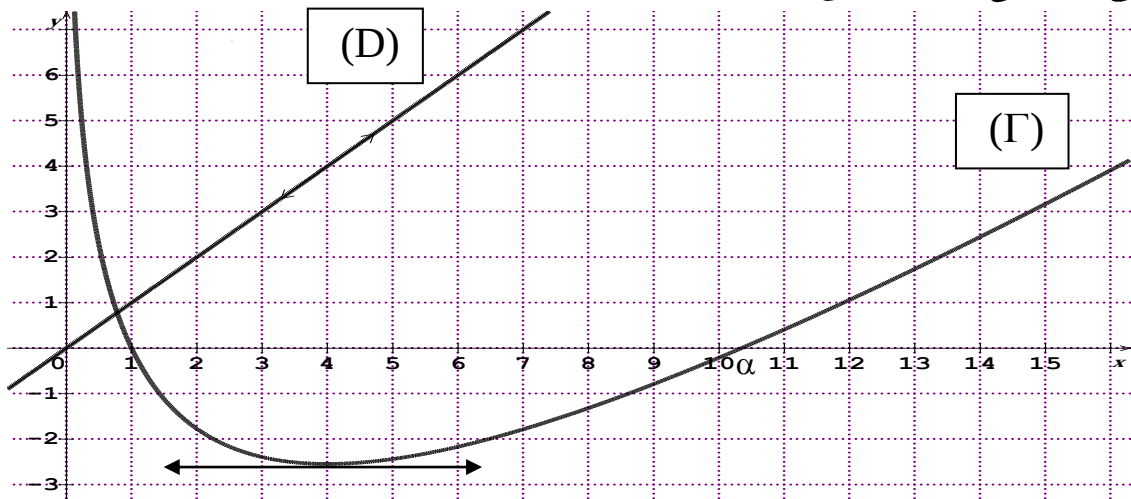
ب) بيّن أنه يكون : $f'(x) > 0$ إذا وفقط إذا ، $x \in]1; 4[\cup]\alpha; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيرات f .

3- أ) تحقق انه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $e^x - 2x > 0$.

ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و (Γ)

ج) أرسم المنحنى (C) في الجزء الرفق على المجال $]0; 15[$

الجزء الرفق: المنحنى (Γ) الممثل للدالة u



التمرين 53: عن بكالوريا المغرب 2017

I) لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$:
 (1) تحقق ان $g(1) = 0$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		$+\infty$

$-\infty \nearrow$

(2) انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g المقابل
 بيّن : أن $g(x) \leq 0$ من أجل كل x من $]0; 1]$
 أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من $[1; +\infty[$:

II) نعتبر الدالة العددية f والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 (1) بيّن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسر النتيجةين بيانيا .

(2-أ) بيّن أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب) بيّن أن الدالة متناقصة على المجال $]0; 1]$ و متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

(3-أ) حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$.

ب) أستنتج أن (C_f) يقطع المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثيهما

ج) بيّن أن $f(x) \leq x$ من أجل كل x من $[1; 2]$ ، أستنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (D) على $[1; 2]$

4-إنشئ كlad من المستقيم (D) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم السابق على المجال $]0; 5]$.

التمرين 54: عن بكالوريا المغرب 2014

(بتصرف / الاستاذ : محمد جبالي)

I) لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$:

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) بيّن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسر النتيجة الاولى بيانيا .

(2) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم ضع جدول تغيراتها.

(4) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $(\ln x)^2 + 2 \ln x + \frac{1}{x^2} - \geq 0$.

(5) احسب $f(2)$ ، $f(3)$ ، $f(4)$ و $f(5)$ ، ثم إنشئ المنحنى (C_f) في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(6) لتكن الدالة العددية h والمعرفة على $]-\infty; 2[$ كمايلي: $h(x) = (1 + \ln(2 - x))^2 + \frac{1}{(2 - x)^2}$.

وليكن (C_h) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

بين أن يمين استنتاج المنحنى (C_h) من (C_f) ثم أنشئه في المعلم السابق.

التمرين 55: عن بكالوريا السنغال 2016

(ترجمة وتصرف بسيط الأستاذ: محمد جبالي)

الجزء أ: لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = -2 \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$.

(أ-1) احسب نهايتي g ، على طرفي مجال تعريفها.

(ب) احسب $g'(x)$ ، وادرس إشارته ، ثم شكل جدول تغيرات g .

(أ-2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 0 والآخر α ينتمي إلى المجال $]-0,72; -0,71[$.

(ب) حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

الجزء ب: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(x+1)}; & x > -1; x \neq 0 \\ (1+x)e^{-x-1}; & x \leq -1 \end{cases}$$
 و $f(0) = 0$.

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب نهايتي f ، على طرفي مجال تعريفها.

(أ-2) ادرس استمرارية f عند -1 وعند 0 .

(ب) ادرس اشتقاقية f عند -1 ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

(أ-3) بين أنه ، من أجل كل x من $]-1; +\infty[- \{0\}$: $f'(x) = \frac{-x \cdot g(x)}{\ln^2(x+1)}$.

(ب) احسب $f'(x)$ على المجال $]-\infty; -1[$.

(ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها.

(أ-4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(ب) أنشئ المماس (T) وكذا نصفي المماسين عند النقطة ذات الفاصلة -1 ، ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

تعطى: $f(\alpha) \simeq -0,41$ و $f(3) \simeq 6,5$ و $f(-2;5) \simeq -6,7$.

التمرين 56: عن بكالوريا المغرب 2015

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$ وليكن (C_f) المنحنى البياني

الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ الوحدة 2cm .

1- إ- بيّن أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$.

2- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيانيا.

ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ يطلب تحديده.

ج- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيان بيانيا. (لاحظ : $x(1 - \ln x) = x - x \ln x$)

3- أ- بيّن أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$.

ب- بيّن أن الدالة f متناقصة على المجال $]0; 1]$ و متزايدة

على كلا من المجالين $]1; e[$ و $]e; +\infty[$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f على D_f .

II) لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

$g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$ و (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في

مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (أنظر الشكل)

1- أ- حدد بيانيا عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$.



x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

ب- نعطي جدول القيم التالية:

بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$

2- أ- تحقق من أنه من أجل كل x من D_f : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$

ب- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطتين فاصلتهما 1 و α

ج- حدد إشارة $g(x)$ انطلاقا من المنحنى (C_g) على المجال $]1; \alpha$

بيّن $f(x) - x \leq 0$ من أجل كل x من $]1; \alpha$.

3- إنشئ في نفس المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

التمرين 57: عن بكالوريا المغرب 2013

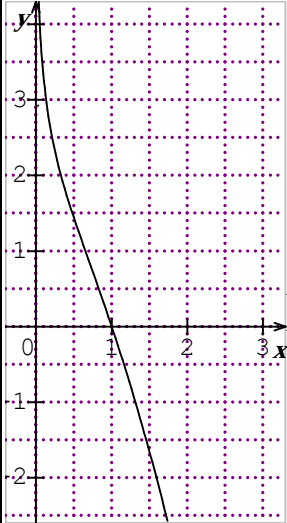
- الجزء 1: f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.
- 1- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، -2 ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 من اليمين.
 - 3- ادرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.
- الجزء 2: g الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \ln(x - 2\sqrt{x} + 2)$.
- و (C) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 - 1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - \ln x]$ وفسر النتيجة الثانية بيانيا.
 - 2- أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty$ وفسر النتيجة بيانيا.
 - 3- ادرس تغيرات الدالة g .
 - 4- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمنحنى (Γ) الممثل للدالة $x \rightarrow \ln x$.
 - 5- أنشئ المنحنيين (Γ) و (C).
 - 6- أشرح كيف يمكن الحصول على المنحنى (C') الممثل للدالة k المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بالعلاقة $k(x) = \ln(ex - 2e\sqrt{x} + 2e)$ ، ثم أرسم المنحنى (C') .

التمرين 58: بكالوريا كاليديونيا الجديدة 2010

- I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.
1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.
 2. ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,8 < \alpha < 1,9$.
- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.
- II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1$ و $\|\vec{j}\| = 4$.
1. أ. بين أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + x^2)^2}$.
 - ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.
 - ج. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in [1; +\infty[$: $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - د. بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم احصر لعدد $f(\alpha)$.
 - 2- شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ و ارسم المنحنى (C_f) .

التمرين 59: بكالوريا فرنسا Polynésie/تقني/2010

(ترجمة وتصرف بسيط الأستاذ: محمد جبالي)



I) المنحنى (C_g) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ:
 $g(x) = 1 - \ln x - x^2$.

بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ على $]0, +\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2\ln x}{x} - 2x + 4$

يرمز (C_f) إلى منحنىها في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ؛ [وحدة الطول 2cm]
 1- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، وفسر النتيجة الأولى هندسياً.

ب- أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -2x + 4$ مقارب مائل لـ C_f .
 ج- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى C_f والمستقيم (D) .

2- أ- بين أنه، من أجل كل عدد x من المجال $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$

ب- استنتج تغيرات f ، وشكل جدول تغيراتها.

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,4 < \alpha < 0,5$ و $2,3 < \beta < 2,4$.
 3- أ- أنشئ المنحنى C_f .

ب- يُعطى المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y = mx - m + 2$ ، حيث m وسيط حقيقي.
 بين أنه عندما يتغير m في $\mathbb{R}$ ، فإن (D_m) يدور حول نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.
 ج- ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة
 $2\ln x - (m+2)x^2 + (m+2)x = 0$

ملاحظة: للأمانة أقول: لقد تصرفْتُ في الموضوع، حتى يتناسب مع البرنامج الجزائري ومدة الامتحان ويتمشى مع العتبة التي حددتها وزارة التربية هذه السنة.

التمرين 60: عن بكالوريا المغرب 2009

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كمايلي: $f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ- تحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ ثم استنتج أن معرفة f على $\mathbb{R}$.

ب- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$

2- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 4$ وفسر النتيجة الثانية هندسياً.

3- أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$ ثم تحقق أن: $f'(0) = 0$

- ب- أدرس إشارة $(\sqrt{e^x} - 1)$ على $\mathbb{R}$ واستنتج أن f متزايدة على $[0; +\infty[$ ومتناقصة على $]-\infty; 0]$
- 4- أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = 2x + 2\ln(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x})$
- ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.
- 5- أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$
- ب- أدرس إشارة $(\sqrt{e^x} - 2)$ و $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ على $\mathbb{R}$.
- ج- استنتج أنه من أجل كل x من $[0; \ln 4]$ ، $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$
- د- بين أنه من أجل كل x من $[0; \ln 4]$ ، $f(x) \leq x$
- 6- إنشئ المنحنى (C).

مجلة الرائد في الرياضيات

الحلول

الجزء الاول
العلوم التجريبية

الجزء الثاني
تقني رياضي

الجزء الثالث
رياضيات

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

BAC2020

الجزء الأول: تمارين البكالوريات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 11: دورة 2019

1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وتفسير النتائج بيانيا

لدينا: الدالة f المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \ln x = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \ln x = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + 2 = -\infty$$

** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الفواصل) مقارب لـ (C_f)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب لـ (C_f)

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2) دراسة اتجاه تغير f على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2} :]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

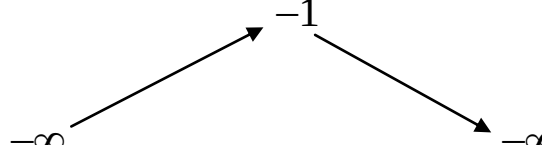
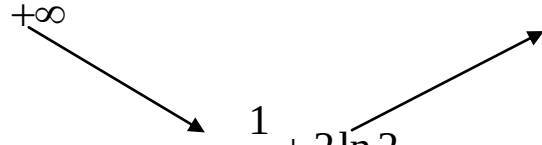
إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - 5x + 4$ لأن المقام موجب تماما

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \text{ معناه } x = 1 \text{ أو } x = 4 \text{ وإشارة } x^2 - 5x + 4 \text{ هي كما يلي}$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0 \text{ معناه }]0; 1[\cup]4; +\infty[\text{ و } x^2 - 5x + 4 < 0 \text{ معناه }]1; 2[\cup]2; 4[$$

$$\text{وعليه } f \text{ متزايدة على }]0; 1[\cup]4; +\infty[\text{ ومتناقصة على المجال }]1; 2[\cup]2; 4[$$

وجداول تغيرات الدالة f يكون كما يلي:

x	0	1	2	4	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)						

3-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ وتفسير النتيجة بيانيا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$ معناه المنحنى (Γ) الممثل للدالة "ln" مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ)

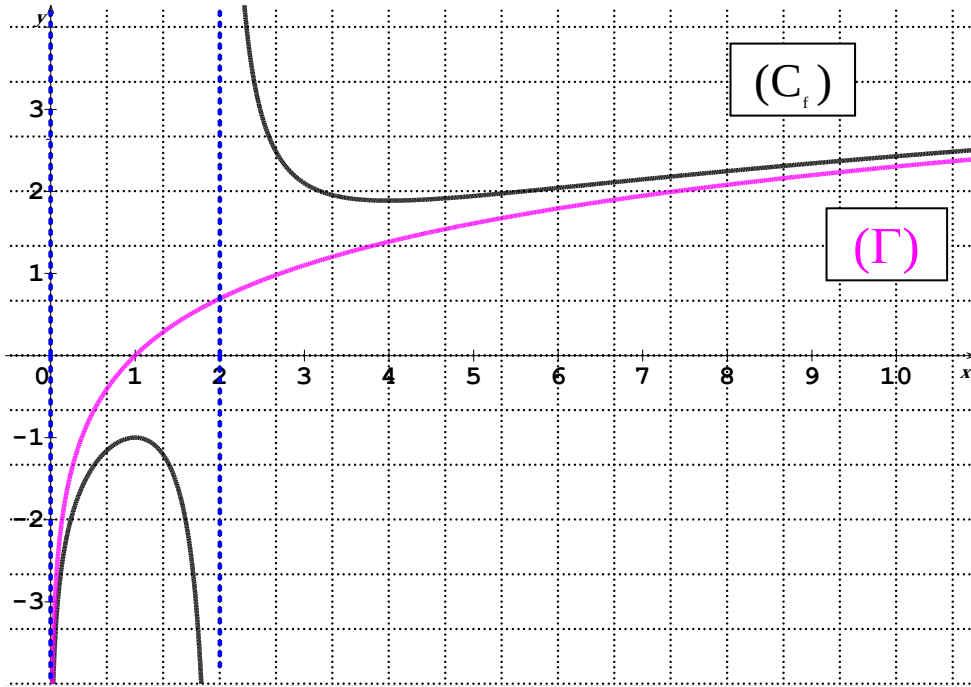
لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة لـ (Γ) ندرس إشارة الفرق $(f(x) - \ln x)$

لدينا: $(f(x) - \ln x) = \frac{1}{x-2}$ وعليه إشارة الفرق هي حسب إشارة $(x-2)$

ومنه : من أجل كل $]0; 2[$ يكون $(x-2) < 0$ ومعناه (C_f) تحت (Γ)

من أجل كل $]2; +\infty[$ يكون $(x-2) > 0$ ومعناه (C_f) فوق (Γ)

4) رسم كلا من المنحنيين (Γ) و (C_f) .



6) تحديد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها

لدينا: دالة معرفة على المجال $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$ ب: $g(x) = f(-2x)$

الدالة g هي تركيب الدالة $x \rightarrow (-2x)$ تألفية متبوعة بالدالة f

وعليه : من أجل كل x من $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$ $g'(x) = -2f'(-2x)$

$g'(x) = 0$ معناه $f'(-2x) = 0$ ومعناه $-2x = 1$ أو $-2x = 4$ أي: $x = -\frac{1}{2}$ و $x = -2$

$g'(x) < 0$ معناه $f'(-2x) > 0$ ومعناه $x \in]-2; -1[\cup]-1; -\frac{1}{2}[$ أي g متناقصة على هذا المجال

$g'(x) > 0$ معناه $f'(-2x) < 0$ ومعناه $x \in]-\infty; -2[\cup]-\frac{1}{2}; 0[$ أي g متزايدة على هذا المجال

التمرين 12: دورة 2018

I- حساب $g(1)$ ثم استنتاج حسب إشارة $g(x)$.

$g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$: ب. $]0; +\infty[$ المجال

لدينا: $g(1) = 0$ ومعناه (C_g) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1

(C_g) فوق حامل محور الفواصل من أجل كل $]0; 1[$ ومعناه $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]0; 1[$

(C_g) تحت حامل محور الفواصل من أجل كل $]1; +\infty[$ ومعناه $g(x) < 0$ من أجل كل $x \in]1; +\infty[$

II- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وبيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة ببيان.

$f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$: ب. $]0; +\infty[$ المجال

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ لأن $f(x) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} + \ln x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

التفسير الهندسي

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ معناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (حامل محور الفواصل)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ معناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ (حامل محور الترتيب)

2- أتبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}(1 + x \ln x) - (\ln x + 1)(1 + \ln x)\right)}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (\ln x)^2 - 2 \ln x - 1}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ نفس إشارة $g(x)$ وعليه الدالة f

متزايدة على المجال $]0; 1[$ ومتناقصة على المجال $]1; +\infty[$ وجدول تغيرات الدالة f هو كمايلي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$+\infty$	1	0

3) تبين أن: $y = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس لـ (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل

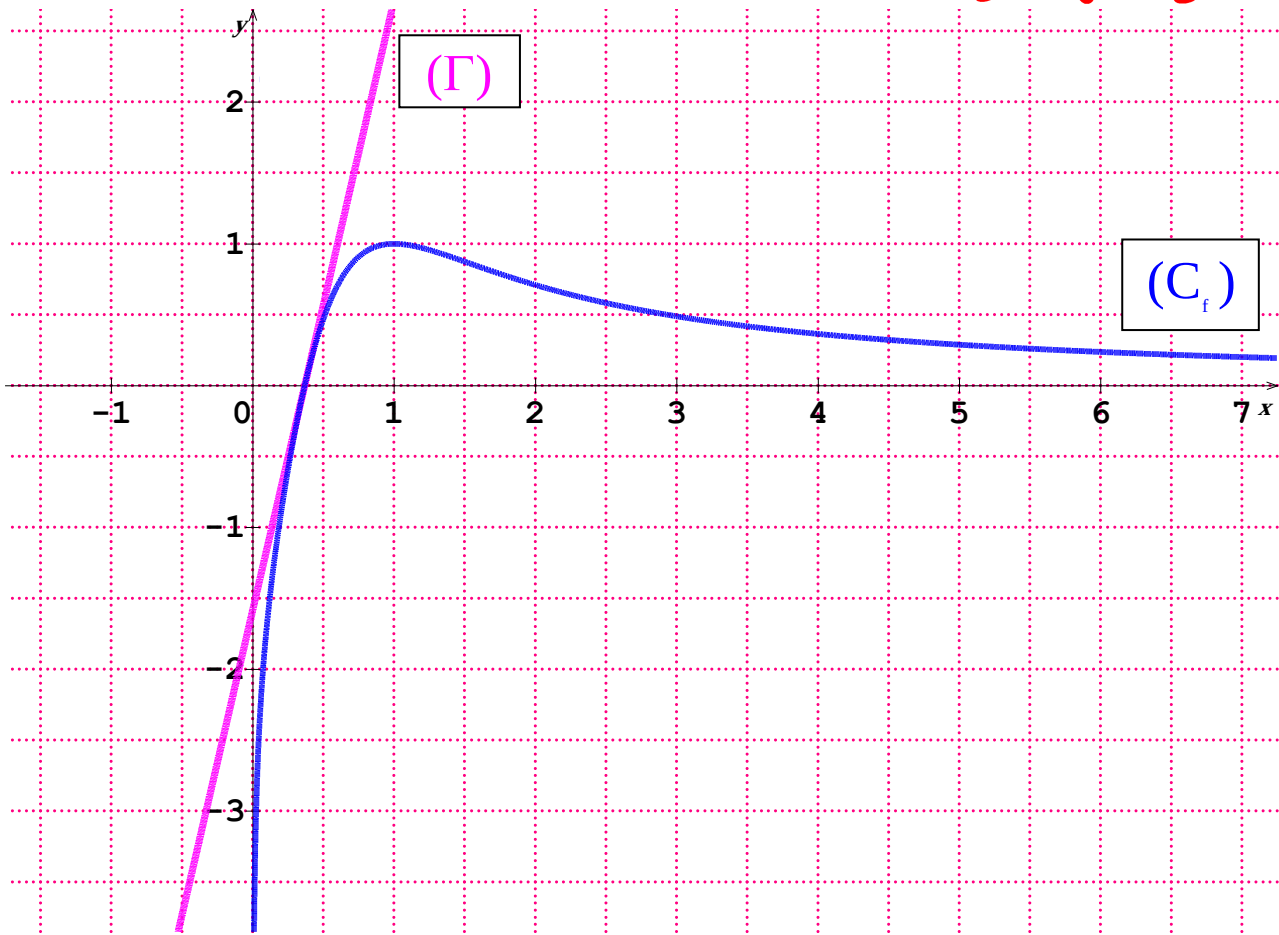
(C_f) يقطع محور الفواصل معناه $f(x) = 0$ ومعناه $1 + \ln x = 0$ أي $x_0 = \frac{1}{e}$

ومنه معادلة المماس (T) عند النقطة x_0 هي: $y = f'(\frac{1}{e})(x - \frac{1}{e}) + f(\frac{1}{e})$

$$f(\frac{1}{e}) = 0 \text{ و } f'(\frac{1}{e}) = \frac{g(e^{-1})}{(1 + e^{-1} \ln e^{-1})^2} = \frac{e-1}{(1-e^{-1})^2} = \frac{e^2}{e-1}$$

$$\text{وعليه: } y = \frac{e^2}{e-1}(x - \frac{1}{e}) = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$$

رسم المماس (T) والمنحنى (C_f)



4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - em$ حلين متميزين.

$$\text{المعادلة } (e-1)f(x) = e^2x - em \text{ تكافئ } f(x) = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}m$$

من اجل $m=1$ نجد: $f(x) = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$ ومعناه $f(x) = y$ حيث $y = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$ معادلة المماس (T)

وعليه المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - em$ تقبل حلين متميزين معناه $m > 1$

1) تبين ان الدالة f فردية وتفسير ذلك بيانيا

لدينا: دالة معرفة على $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ حيث: $f(x) = \frac{2}{3}(x) + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

تذكير: f دالة فردية معناه من اجل كل $x \in D_f$: $f(-x) + f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= \frac{2}{3}(-x) + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) + \frac{2}{3}(x) + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) : x \in D_f \text{ من اجل كل} \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

التفسير البياني: المنحنى البياني للدالة f يقبل مبدأ الإحداثيات O كمرکز تناظر

2) حساب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0^+ \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{2}{3} + \lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0^+ \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{3} + \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln 1 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln 1 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقارب موازيين لحامل محور الترتيب .
من النهايتين السابقتين: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ نستنتج أن يقبل:

* المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = -1$

* المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = 1$

3-أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D : $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D : $f(x) = \frac{2}{3}(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{3} + \frac{3.2}{3(x^2-1)} = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right) \text{ ومنه:}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ موجبة تماما لأن :

إشارة $x^2 - 1$ موجبة على المجال D وكذلك $x^2 + 2$ موجبة من أجل كل عدد حقيقي وعليه الدالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$			$-\infty$ ↗ $+\infty$

4) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

لدينا: $f(1,8) = -0.05 < 0$ و $f(1,9) = 0.08 > 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha) = 0$ حيث $1,8 < \alpha < 1,9$.

3) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

لدينا: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \ln 1 = 0$

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

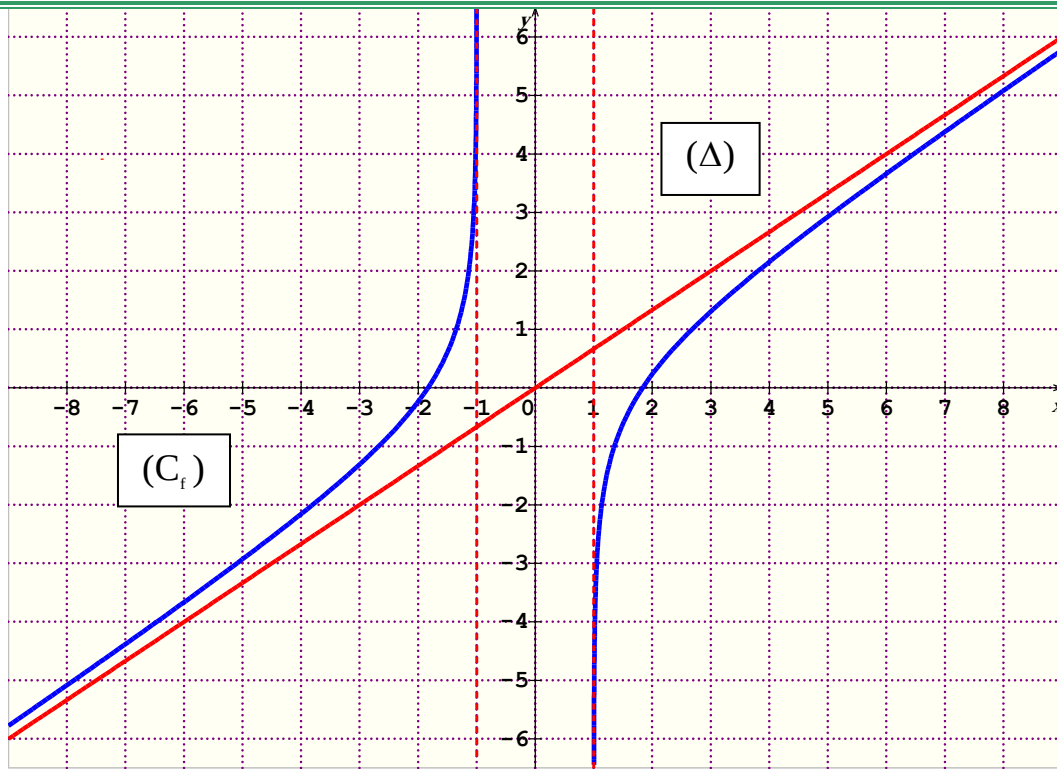
لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$

لدينا: $f(x) - y < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; -1[$ لأن $\frac{x-1}{x+1} < 1$

: $f(x) - y > 0$ من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ لأن $\frac{x-1}{x+1} > 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-			+
الوضع	(C_f) تحت (Δ)			(C_f) فوق (Δ)

6) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)



7) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

نضع: $(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \dots (*)$

المعادلة (*) تكافئ $(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ وتكافئ $\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = |m|x$

أي $|m|x = f(x)$ وتكافئ بياناً الجملة التالية: $\begin{cases} y = |m|x \\ y = f(x) \end{cases}$ وعليه حلول المعادلة (*) هي

فواصل نقط تقاطع (C) والمستقيم (Δ_m) ذا المعادلة $y = |m|x$ (مستقيم دوار يشمل المبدأ ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$ المعادلة تقبل حلين . 2) $m \geq \frac{2}{3}$ أو $m \leq -\frac{2}{3}$ المعادلة لاتقبل حلول.

التمرين 14: دورة 2017 الاستدراكية

(I-1) حساب النهايتن التاليتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ ثم تفسير النتيجة بيانياً.

لدينا: الدالة العددية f معرفة على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ كمايلي: $f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} 1+2\ln(2x+1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (2x+1)^2 = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} = 0 \text{ علماً أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2x+1)^2} + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty \text{ معناه } (C_f) \text{ يقبل مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته } x = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ معناه } (C_f) \text{ يقبل مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل معادلته } y = 0.$$

$$2- \text{أثبت أن من أجل كل } x \text{ من } \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[: f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{2 \frac{2}{(2x+1)} (2x+1)^2 - 4(2x+1)(1+2\ln(2x+1))}{[(2x+1)^2]^2} \text{ لدينا:}$$

$$= \frac{4[1 - (1+2\ln(2x+1))]}{(2x+1)^3} = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$$\text{من العبارة } f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3} \text{ نستنتج أن إشارة } f'(x) \text{ هي نفس إشارة } -\ln(2x+1)$$

لدينا: $-\ln(2x+1) = 0$ معناه $x = 0$ وعليه إشارة $f'(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	-

تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$+\infty$	1	0

$$3- \text{ حل في المجال } \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ المعادلة } f(x) = 0 \text{ ثم استنتاج إشارة } f(x).$$

$$f(x) = 0 \text{ معناه } 1 + 2\ln(2x+1) = 0 \text{ ومعناه } x = \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{\sqrt{e}})$$

$$f(x) < 0 \text{ معناه } 1 + 2\ln(2x+1) < 0 \text{ ومعناه } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{\sqrt{e}}) \right[$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{\sqrt{e}}); +\infty \right] \text{ ومعناه } 1 + 2\ln(2x+1) > 0 \text{ ومعناه } f(x) > 0$$

ملاحظة: لتعيين إشارة $f(x)$ يمكن استعمال جدول تغيرات الدالة f .

4) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω وتعيين إحداثياتها

(C_f) يقبل نقطة إنعطاف $\omega(x_0; y_0)$ معناه المشتقة الثانية f'' تنعدم عند x_0 مغيرة اشارتها عندها

$$f''(x) = \frac{\frac{(-8)2}{2x+1}(2x+1)^3 - 6(2x+1)^2(-8\ln(2x+1))}{(2x+1)^6} = \frac{16[-1+3\ln(2x+1)]}{(2x+1)^4} \text{ لدينا:}$$

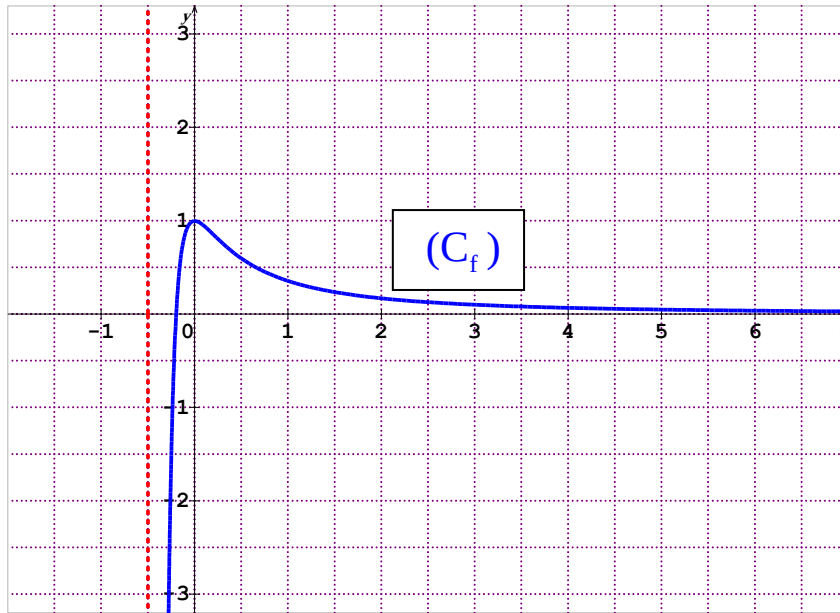
إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $(-1+3\ln(2x+1))$ والموضحة كما يلي:

$$(-1+3\ln(2x+1)) = 0 \text{ معناه } x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt[3]{e}) \text{ نلخص إشارة } f''(x) \text{ كالتالي}$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}(-1 + \sqrt[3]{e}); +\infty \right] \text{ معناه } f''(x) > 0, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}(-1 + \sqrt[3]{e}) \right] \text{ معناه } f''(x) < 0$$

نسنتج مما سبق أن النقطة $\omega(x_0; y_0)$ حيث $y_0 = f(x_0) = \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}$ نقطة انعطاف لـ (C_f) .

إنشاء المنحنى (C_f)



II-1-أ) دراسة اتجاه تغير الدالة g .

$$\text{الدالة العددية } g \text{ معرفة على } \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right] \text{ كمايلي: } g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g معناه حساب عبارة الدالة المشتقة $g'(x)$ وتعيين اشارتها

$$\text{لدينا: } g'(x) = 2 \left[-1 + \frac{2}{2x+1} \right] = 2 \left(\frac{-2x+1}{2x+1} \right)$$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $-2x+1$ وهي كمايلي:

$$x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\text{معناه } g'(x) < 0 \text{ و } x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[\text{معناه } g'(x) > 0 \text{ و } x = \frac{1}{2} \text{ معناه } g'(x) = 0$$

(ب) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$.

* الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ ولدينا: $g(1,2) = 0,047$ و $g(1,3) = -0,03$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $1,2 < \alpha < 1,3$

* المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل معدوم لأن $g(0) = 0$

استنتاج إشارة $g(x)$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in \left] -\frac{1}{2}; 0 \right[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن $g(x) < 0$

ومن أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن $g(x) > 0$

التمرين 15: دورة 2016

I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g

لدينا: الدالة g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

حساب $g'(x)$ ودراسة اشارته استنتاج اتجاه تغير الدالة g

$$\text{لدينا: } g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

لدينا: $g'(x) = 0$ معناه $2x^2 - 1 = 0$ ومعناه $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ مرفوض

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	-	0	+
اتجاه تغير g	متزايدة تماما		متناقصة تماما

2) حساب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ وتبين أن $g(x) > 0$ من أجل كل عدد $x \in]0; +\infty[$

$$\text{لدينا: } g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$$

من خلال اتجاه تغير g والقيمة الحدية المحلية الصغرى $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$

نستنتج أن $g(x) > 0$ من أجل كل عدد $x \in]0; +\infty[$

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ نهاية شهيرة لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$

2-أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

لدينا: $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' + 1 = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) كتابة معادلة المماس (T)

(T) له معادلة من الشكل: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ومنه: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه: $y = 2x - 2$

4-أ) تبيان أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل Δ حيث: $y = x - 1$ معادلة له

المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C) معناه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ نهاية شهيرة

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C) و Δ

لدراسة الوضع النسبي لـ (C) و Δ ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = \frac{\ln x}{x}$

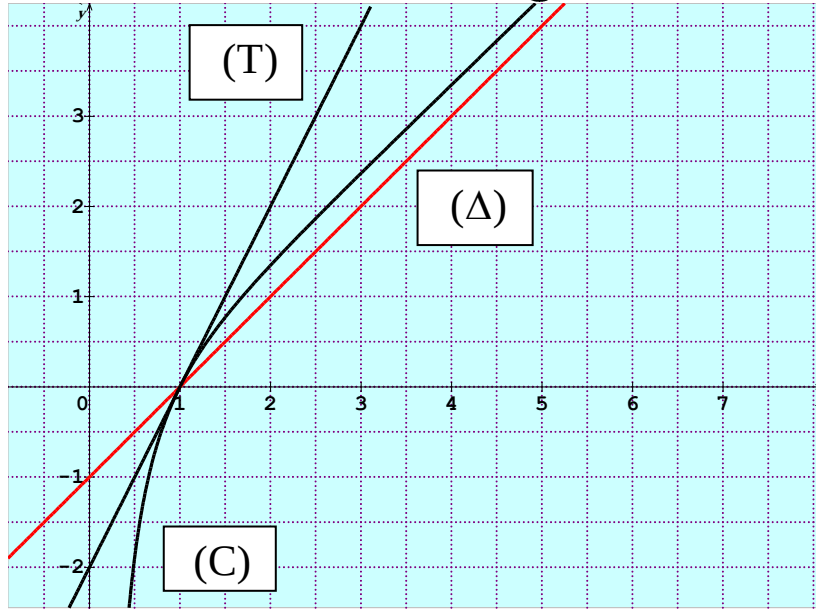
إشارة الفرق هي حسب إشارة $\ln x$ وهي حسب الجدول التالي

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع	(C) تحت Δ	(C) يقطع Δ	(C) فوق Δ

5) رسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحني (C)

(T) يشمل النقطة $A(1;0)$ شعاع توجيه له $\vec{u}(1;2)$

(Δ) يشمل النقطة $A(1;0)$ شعاع توجيه له $\vec{v}(1;1)$



6-أ) اثبات ان النقطة $A(1;0)$ تنتمي للمستقيم (Δ_m)

النقطة $A(1;0) \in (\Delta_m)$ لأن الثنائية $(1;0)$ تحقق صحة المعادلة $y = mx - m$.
من العبارة $y = mx - m$ أي $y = m(x - 1)$ نستنتج ان جميع المستقيمت (Δ_m) تمر من نقطة وحيدة هي النقطة $A(1;0)$.

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

لدينا: $f(x) = mx - m$ تكافئ الجملي التالية: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx - m \end{cases}$ وعليه حلول المعادلة

$f(x) = mx - m$ هي فواصل نقط تقاطع (C) والمستقيم (Δ_m) (مستقيم دوار يشمل النقطة $A(1;0)$) ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $m \leq 1$ المعادلة تقبل حلا وحيد ، 2) $1 < m < 2$ المعادلة تقبل حلين .

3) $m = 2$ المعادلة تقبل حلا مضاعف ، 4) $m > 2$ المعادلة تقبل حلا وحيد .

التمرين 16: دورة 2016 الاستدراكية

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها

لدينا: الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$
حساب النهايات عند -1 وعند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)e = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} 2\ln(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$$

حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

$$g'(x) = e + \frac{2}{x+1} > 0 \text{ لأنه } x \in]-1; +\infty[\text{ ومنه } g \text{ متزايدة تماما على }]-1; +\infty[$$

جدول تغيرات الدالة g

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

لدينا: $g(-0,34) = -0,03$ و $g(-0,33) = 0,02$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-1; \alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) > 0$

II-1-أ) تبين أن: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ وحساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسيا

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e(x+1) + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \ln(x+1) = +\infty(-\infty) = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \left[e + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} \right] = 0 \text{ لاحظ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} = 0 \text{ (ن ش)}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب هو حامل محور الفواصل (معادلته $y = 0$)

ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e}{x+1} \right)' + \left(\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right)' = -\frac{e}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} (x+1)^2 - 2(x+1) \ln(x+1) \\ &= -\left[\frac{e(x+1)}{(x+1)^3} - \frac{1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \right] = -\left[\frac{-1+e(x+1)+2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \right] = -\frac{g(x)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

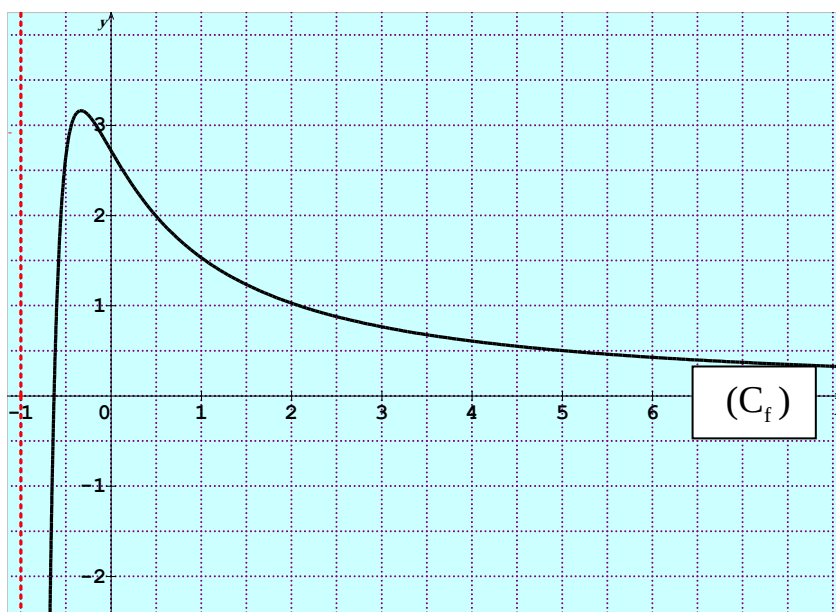
ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $-g(x)$

وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$-\infty$	$f(\alpha)$
			0

(د) رسم المنحنى (C_f)



3-أ) تبين أن الدالة k زوجية

لدينا : الدالة k معرفة على المجال $]-1; +1[$ ب: $k(x) = f(-|x|)$

الدالة k زوجية معناه من أجل كل $x \in]-1; +1[$ و $-x \in]-1; +1[$ $k(-x) = k(x)$

لدينا: $k(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = k(x)$ لأن $|-x| = |x|$ ومنه k زوجية

ب) تبين كيفية استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقاً من المنحنى (C_f) ثم رسم (C_k)

عبارة $k(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة هي كمايلي:

$$k(x) = \begin{cases} f(x); & -1 < x \leq 0 \\ f(-x); & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

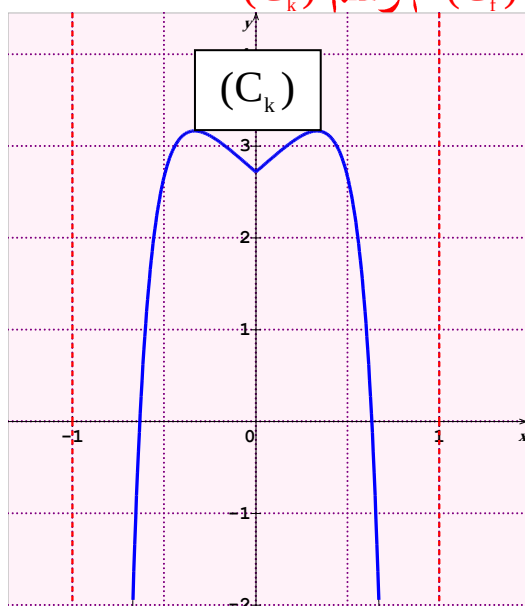
وعليه : $x \in]-1; 0]$ معناه (C_k) ينطبق على (C_f)

$x \in [0; 1[$ معناه (C_k) نظير (C_f)

بالنسبة لحامل محور الترتيب (لأن k زوجية)

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $k(x) = m$

لدينا: $k(x) = m$ تكافئ الجملي التالية : $\begin{cases} y = k(x) \\ y = m \end{cases}$



إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

وعليه حلول المعادلة $k(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_k) والمستقيم (Δ_m) (مستقيم يوازي حامل محور الفواصل) من البيان (C_k) نميز الحالات التالية:

- 1) $m < e$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة، $m = e$ المعادلة تقبل مضاعف معدوم.
- 3) $e < m < k(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين سالبين وحلين موجبين
- 4) $m = k(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين مضاعفين مختلفين في الإشارة
- 5) $m > k(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول.

التمرين 17: دورة 2015

I-1) تحديد وضعية المنحنى (γ) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

من البيان نلخص وضعية المنحنى (γ) بالنسبة للمستقيم (Δ) كمايلي:

- من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ يكون (γ) تحت (Δ)
- من أجل $x = \alpha$ يكون (γ) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة α .
- من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ يكون (γ) فوق (Δ)

2) استنتاج إشارة $g(x)$ وذلك حسب قيم x

لدينا: $g(x) = \ln x - (-x + 3)$ من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

- من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ تكون إشارة $g(x)$ سالبة
- من أجل $x = \alpha$ تكون إشارة $g(x)$ معدومة
- من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ تكون إشارة $g(x)$ موجبة.

3) التحقق أن: $2, 2 < \alpha < 2, 3$

g مستمرة (مجموع دالتين مستمرتين) ومتزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ لأن: $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ و $g(2; 2) = -0, 01$ و $g(2; 3) = 0, 13$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن: $2, 2 < \alpha < 2, 3$.

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (\ln x - 2) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (1 - \frac{1}{x}) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2) = +\infty$

2) إثبات أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln x - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(\ln x - 2) + (x - 1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

التمرين 18: دورة جوان 2014

1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty: \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0: \text{ نهاية شهيرة لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 1$$

التفسير الهندسي

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ معناه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته: $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ معناه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته: $y = 1$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها.

$$f'(x) = 2 \frac{\left(\frac{1}{x} \cdot x - 1 \ln x\right)}{x^2} = 2 \frac{(1 - \ln x)}{x^2} \text{ و }]0; +\infty[\text{ الدالة } f \text{ قابلة للإشتقاق على المجال}$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$f'(x) = 0$ معناه $1 - \ln x = 0$ ومنه $x = e$

$f'(x) < 0$ معناه $1 - \ln x < 0$ ومنه $x > e$

و $f'(x) > 0$ معناه $1 - \ln x > 0$ ومنه $x < e$

وعليه يكون جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

2-أ) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = 2 \frac{\ln x}{x}$ حيث $y = 1$

$f(x) - y = 0$ معناه $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$ معناه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيين (1;1)

$f(x) - y < 0$ معناه $\ln x < 0$ ومنه $x \in]0; 1[$ معناه (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

$f(x) - y > 0$ معناه $\ln x > 0$ ومنه $x \in]1; +\infty[$ معناه (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

ب) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 1.

معادلة المماس (T) هي: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه: $y = 2(x - 1) + 1$ أي: $y = 2x - 1$

ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0 < \alpha < 1$

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; e[$ و $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$ لأن: $f(e^{-0.4}) = -0,2$ و $f(e^{-0.3}) = 0,2$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha \in]e^{-0.4}; e^{-0.3}[$ يحقق $g(\alpha) = 0$

3) إنشاء (T) و (C_f) (تجد الرسم في آخر الحل)

4-أ) تبين أنه من أجل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$ والاستنتاج.

$$h(x) - h(-x) = 1 + 2 \frac{\ln|x|}{|x|} - 1 - 2 \frac{\ln|-x|}{|-x|} = 2 \frac{\ln|x|}{|x|} - 2 \frac{\ln|x|}{|x|} = 0 : x \in \mathbb{R}^*$$

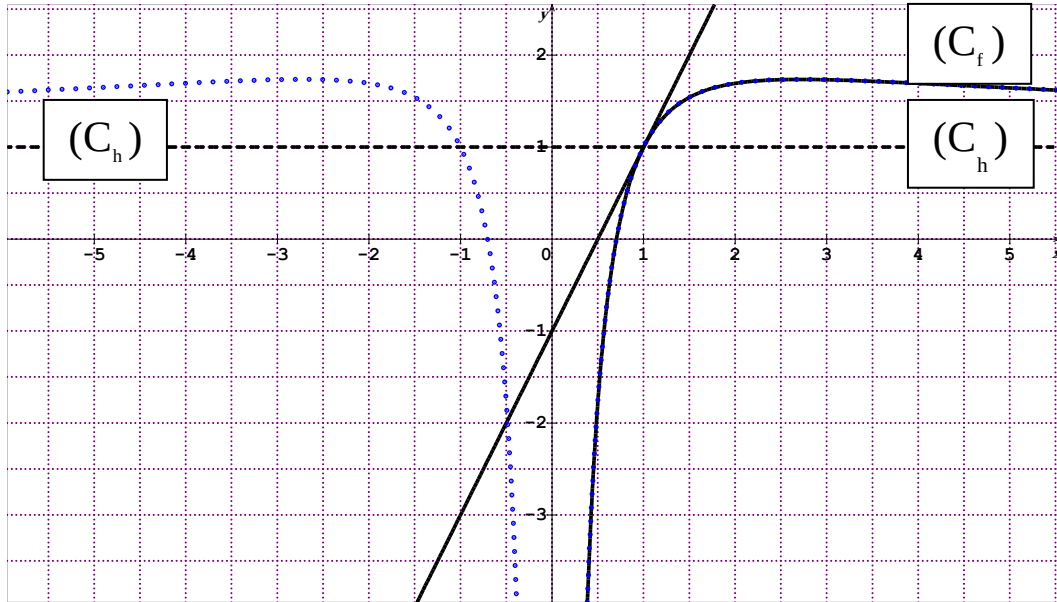
الاستنتاج من العبارة $h(x) - h(-x) = 0$ أي $h(x) = h(-x)$ نستنتج أن الدالة h زوجية

ب) إنشاء المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .

لدينا: $h(x) = f(x)$ معناه $(C_h) = (C_f)$ على المجال $x \in]0; +\infty[$.

$h(x) = f(-x)$ معناه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب $x \in]-\infty; 0[$.

ب) إنشاء (T) و (C_f) والمنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .



ج) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$

من أجل عدد حقيقي x غير معدوم المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$ تكافئ $m = h(x)$

وتكافئ : $\begin{cases} y = m \\ y = h(x) \end{cases}$ من الجملة السابقة نستنتج أن حلول المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$ بيانيا

هي فواصل نقط تقاطع (C_h) والمستقيم $y = m$ (Δ_m) معادلته من البيان لدينا:

(1) $m \leq 1$ معناه المعادلة تقبل حلين . (2) $1 < m < h(e)$ معناه المعادلة تقبل اربعة حلول .

(3) $m = h(e)$ معناه المعادلة تقبل حلين . (4) $m > h(e)$ معناه المعادلة لاتقبل حلول

التمرين 19: دورة جوان 2013

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها

$$g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1) \quad \text{و} \quad x \in]-1; +\infty[$$

حساب النهايات

ح ع ت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2\ln(x+1)) = +\infty$

ازالة ح ع ت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(\frac{x^2}{(x+1)} - 2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} \right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-2\ln(x+1)) = -2(-\infty) = +\infty$$

اتجاه التغير

من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $g'(x) = 2(x+1) - \frac{2}{(x+1)} = \frac{2[(x+1)^2 - 1]}{(x+1)} = \frac{2x(x+2)}{x+1}$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة x على $]-1; +\infty[$

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

جدول التغيرات

2- استنتاج أن $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$

الدالة g تقبل 4 كقيمة حدية صغرى أي $g(x) \geq 4$

من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ إذن : $g(x) > 0$

II-1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانياً

لدينا $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$ و $x \in]-1; +\infty[$

معناه المستقيم ذي المعادلة : $x = -1$ مقارب عمودي لـ (C_f) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = -\infty$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

2-أ) تبين أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{-2}{(x+1)}(x+1) - 1(1 - 2\ln(x+1))}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$ أي $f'(x) > 0$

(ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و }]-1; +\infty[$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد

وحيد $\alpha \in]-1; +\infty[$ حيث $f(\alpha) = 0$

التحقق أن: $0 < \alpha < 0,5$

لدينا: $f(0) = -1$ و $f(0,5) = 0,37$ أي: $f(0) < 0 < f(0,5)$ ومنه $0 < \alpha < 0,5$

(3-أ) تبين أن المستقيم $(\Delta): y = x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

$(\Delta): y = x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

(ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة على (Δ)

$$\text{ندرس إشارة الفرق } f(x) - x = -\frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$$

$$f(x) - x = 0 \text{ معناه } 1 - 2\ln(x+1) = 0 \text{ معناه } x = \sqrt{e} - 1$$

$$\text{و } x \in]-1; \sqrt{e} - 1[\text{ معناه } f(x) - x < 0 \text{ و } x \in]\sqrt{e} - 1; +\infty[\text{ معناه } f(x) - x > 0$$

وعليه: (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e} - 1$

$$(C_f) \text{ تحت } (\Delta) \text{ في المجال }]-1; \sqrt{e} - 1[\text{ و } (C_f) \text{ فوق } (\Delta) \text{ في المجال }]\sqrt{e} - 1; +\infty[$$

(4-أ) حساب x_0 فاصلة نقط التماس لـ (C_f) و (T)

$$\text{لدينا: معادلة هي: } y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}} \text{ و } (T) \text{ مماس لـ } (C_f) \text{ معناه } f'(x_0) = 1$$

$$f'(x_0) = 1 \text{ معناه } \frac{g(x_0)}{(x_0 + 1)^2} = 1 \text{ معناه } g(x_0) = (x_0 + 1)^2 \text{ ومنه } x_0 = e\sqrt{e} - 1$$

(ب) رسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) و (C_f) في آخر الحل

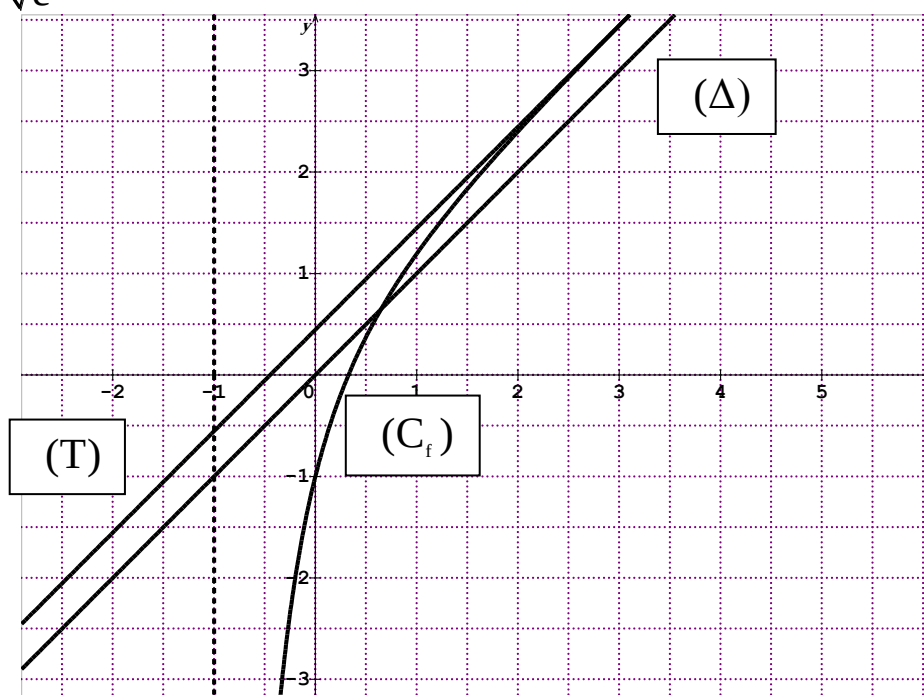
(ج) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m بيانيا حتى تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين

$$\text{المعادلة } f(x) = x + m \text{ تكافئ } \begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases} \text{ حيث } y = x + m \text{ معادلة مستقيم } (\Delta_m) \text{ ميله } 1$$

و $y = f(x)$ معادلة المنحنى (C_f)

$$\text{الحالة 1: } m = 0 \text{ يكون } (\Delta_m) = (\Delta) \text{ ، الحالة 2: } m = \frac{2}{\sqrt{e^3}} \text{ يكون } (\Delta_m) = (T)$$

وعليه نجد من البيان يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلان متميزان معناه $0 < m < \frac{2}{\sqrt{e^3}}$



التمرين 20: دورة جوان 2012

1) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 0} 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} (x+5) = 5 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5+6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)) = -\infty$$

2) تبين أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$: $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$

$$\text{لدينا: } f(x) = x + 5 + 6((\ln|x| - \ln|(x-1)|)) \text{ ومنه: } f'(x) = 1 + 6\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)} = 0 \text{ معناه } x^2 - x - 6 = 0 \text{ معناه } x = -2 \text{ أو } x = 3 \text{ مرفوض}$$

x	-	∞	-2	0
f'(x)		+	0	-

ومنه إشارة $f'(x)$ تكون كالآتي:

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$	$-\infty$

لدينا: $f(-2) = 3 - 6\ln(2) + 6\ln 3 = 0,56$

3-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته

$y = x + 5$ هو مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = 6 \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x}{x-1} = 0$

ومنه: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

لدينا: $(f(x) - y) = 6 \ln \frac{x}{x-1}$ ولدينا من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ $\frac{x}{x-1} \leq 1$

ومنه $\ln \frac{x}{x-1} \leq 0$ أي الفرق $(f(x) - y) < 0$ وعليه يكون (C_f) تحت (Δ)

4) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β

لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $] -2; 0[$ و $f(-1,1) = 0,02$ و $f(-1) = -0,15$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β يحقق $f(\beta) = 0$

لدينا الدالة f متناقصة تماماً على المجال $] -\infty; -2[$ و $f(-3,5) = 1,33$ و $f(-3,4) = -0,15$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق $f(\alpha) = 0$.

5) إنشاء (C_f) و (Δ) .

6-أ) تبيان أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln \frac{3}{4}$ هي معادلة (AB)

لدينا $y_A = \frac{1}{2}x_A + \frac{7}{2} + 6\ln \frac{3}{4} = 3 + 6\ln \frac{3}{4}$

$y_B = \frac{1}{2}x_B + \frac{7}{2} + 6\ln \frac{3}{4} = \frac{5}{2} + 6\ln \frac{3}{4}$

ومنه $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln \frac{3}{4}$ هي معادلة (AB)

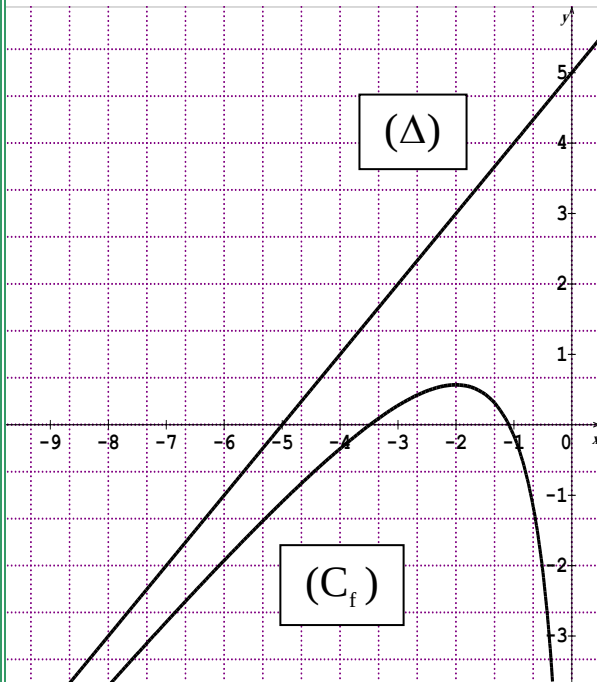
ب) تبيان أن M_0 يمس (C_f) في نقطة

M_0 يمس (C_f) معناه $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ حيث x_0 فاصلة M_0

$f'(x_0) = \frac{1}{2}$ معناه $\frac{x_0^2 - x_0 - 6}{x_0(x_0 - 1)} = \frac{1}{2}$

معناه $2x_0^2 - 2x_0 - 12 = x_0^2 - x_0 - 12 = 0$ ومنه: $x_0 = -3$ أو $x_0 = 4$ مرفوض

ولدينا $f(-3) = 2 + 6\ln \frac{3}{4}$ أي $M_0(-3; f(-3))$



التمرين 21: دورة جوان 2011

X	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 1$

(I) بقراءة بيانية

أ) تشكيل جدول التغيرات للدالة g .

ب) حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$

من البيان $g(x) > 0$ تكافئ $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

ج) تعيين بيانيا قيم x والتي من أجلها يكون $0 < g(x) < 1$

من البيان لدينا: $0 < g(x) < 1$ تكافئ $x \in]1; +\infty[$

(II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 + 0 = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 - \infty = -\infty$$

التفسير الهندسي للنتيجتين

$(C_f)^*$ يقبل مقارب عمودي معادلته هي: $x = 1$ و $(C_f)^*$ يقبل مقارب أفقي معادلته هي: $y = 1$

2-أ) تبين أن $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ من أجل كل $x \in]1; +\infty[$

$$g'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب) حساب $f'(x)$ ودراسة اشارتها وتشكيل جدول تغيراتها

$$f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} > 0 \quad \text{ولدينا: } f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

ومن الدالة f متزايدة تماما من أجل كل $x \in]1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

ج- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و

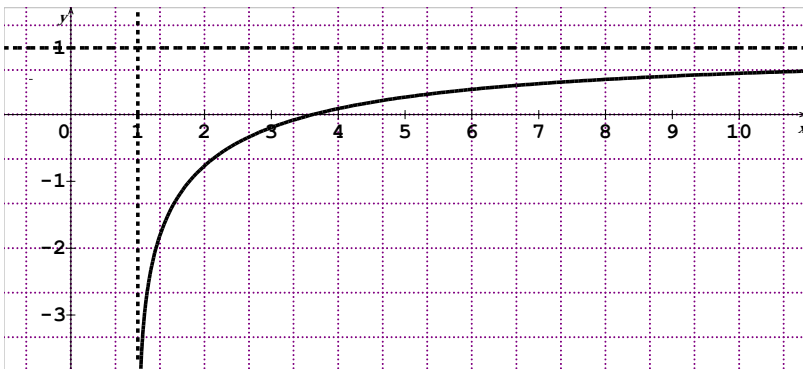
$$f(3,62) < 0 \quad \text{و} \quad f(3,63) > 0 \quad \text{ومنه وحسب مبرهنة القيم}$$

المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_0

حيث $x_0 \in]3,62; 3,63[$ يحقق $f(x_0) = 0$

د- رسم (C_f) .

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty \nearrow 1$	



3-أ) تعيين إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$

من الجزء I-ج) $g(x) < 1$ ومنه: $\ln[g(x)] < \ln 1$ أي: $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$

التمرين 22: دورة جوان 2010

I-1-أ) حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \ln(2x-1) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x-1) = +\infty$$

2) تبين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال I وتشكيل جدول التغيرات للدالة f

x	0,5	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		$+\infty$

$$f'(x) = 0 + \frac{2}{2x-1} > 0 \quad \text{لأن} \quad x > \frac{1}{2}$$

ومن الدالة f متزايدة تماماً على المجال I لأن $f'(x) > 0$.

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس يوازي (d)

$$(d) \text{ يوازي المماس معناه } f'(x_0) = 1 \text{ ومنه } x_0 = \frac{3}{2}$$

4-أ) إثبات أنه من أجل كل $x \in I$: $f(x) = \ln(x+a) + b$

$$f(x) = 1 + \ln(2x-1) = 1 + \ln\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = 1 + \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

ب) استنتاج رسم (C_f) انطلاقاً من $\ln$ منحنى الدالة

من العبارة $f(x) = 1 + \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$ نستنتج أن (C_f) صورة (C) بانسحاب شعاعه $\vec{V}\left(\frac{1}{2}; 1 + \ln 2\right)$

رسم (C_f) و (C) (في الجزء الثاني)

$$1-II) \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) \text{ وتبين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (f(x) - x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x-1} = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) \left[-\frac{x}{2x-1} + \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \right] = -\infty$$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{2x-1} - 1 = \frac{-2x+3}{2x-1}$$

و إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-2x+3$

جدول تغيرات الدالة g

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

لدينا: $g\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \ln(2) - \frac{3}{2} = 0,9$

3-أ) حساب $g(1)$ وتبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

لدينا: $g(1) = f(1) - 1 = 1 + \ln 1 - 1 = 0$

لدينا الدالة متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ و $g\left(\frac{3}{2}\right) = 0,9$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

لدينا: $g(2) = f(2) - 2 = -1 + \ln 3 = 0,38$ و $g(3) = f(3) - 3 = -2 + \ln 5 = -0,39$

التحقق أن $2 < \alpha < 3$

بما أن $g(3) < 0 < g(2)$ فإن $2 < \alpha < 3$.

ب) رسم المنحنى (C_g) على المجال $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

4) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال I.

من البيان أو جدول تغيرات الدالة g لدينا إشارة $g(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	$\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$	
g (x)	-	0	+	0	-

تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (d)

لدراسة وضعية (C_f) و (d) ندرس إشارة الفرق $f(x) - y = g(x)$ وهي حسب إشارة $g(x)$ إذا كانت $\alpha; +\infty[\cup]0,5; 1[$ فإن (C_f) تحت (d) وإذا كانت $\alpha; +\infty[\cup]0,5; 1[$ فإن (C_f) فوق (d) إذا كانت $x = 1$ أو $x = \alpha$ فإن (C_f) يقطع (d).

5) البرهان أنه من أجل كل $x \in]1; \alpha[$ فإن $f(x) \in]1; \alpha[$.

لدينا: $g(1) = g(\alpha) = 0$ ومنه $f(1) = 1$ و $f(\alpha) = \alpha$

ولدينا: f متزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$ ومنه $f(1) < f(x) < f(\alpha)$ إذن: $1 < f(x) < \alpha$.

الجزء الأول:

1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

$$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1) \text{ معرفة على }]-1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (1 - 2 + \ln(x+1)) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = +\infty$$

2) تبين أن: $h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1} \text{ لدينا:}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة h وتشكيل جدول تغيراتها

بما أن: $x > -1$ فإن $h'(x) > 0$ ومنه h متزايدة تماماً

3) حساب $h(0)$ واستنتاج إشارة $h(x)$

$h(0) = 0$ وإشارة $h(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

ب) البرهان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

نضع: $t = \ln u$ ومنه $u = e^t$ إذا كان $u \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0 \text{ ومنه:}$$

ج) استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty - 0 = +\infty \text{ لدينا:}$$

د) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0 \text{ لدينا:}$$

استنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$ ومنه (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y = x - 1$ في جوار $+\infty$

هـ) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - (x-1)] = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1 > 0$

$-\ln(x+1) = 0$ معناه $\ln(x+1) = 0$ أي: $x = 0$ معناه (C_f) يقطع المقارب المائل في النقطة $(0; -1)$

$-\ln(x+1) \geq 0$ معناه $\ln(x+1) \leq 0$ أي: $-1 < x \leq 0$ معناه (C_f) فوق المقارب المائل

$-\ln(x+1) \leq 0$ معناه $\ln(x+1) \geq 0$ أي: $x \geq 0$ معناه (C_f) تحت المقارب المائل

2) تبين أن $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

تشكيل جدول التغيرات

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $h(x)$

جدول التغيرات

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

3) تبين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم: $y = 2$

(C_f) يقطع المستقيم: $y = 2$ معناه المعادلة $f(x) = 2$

تقبل حالا وحيدا α محصورا بين 3,3 و 3,4

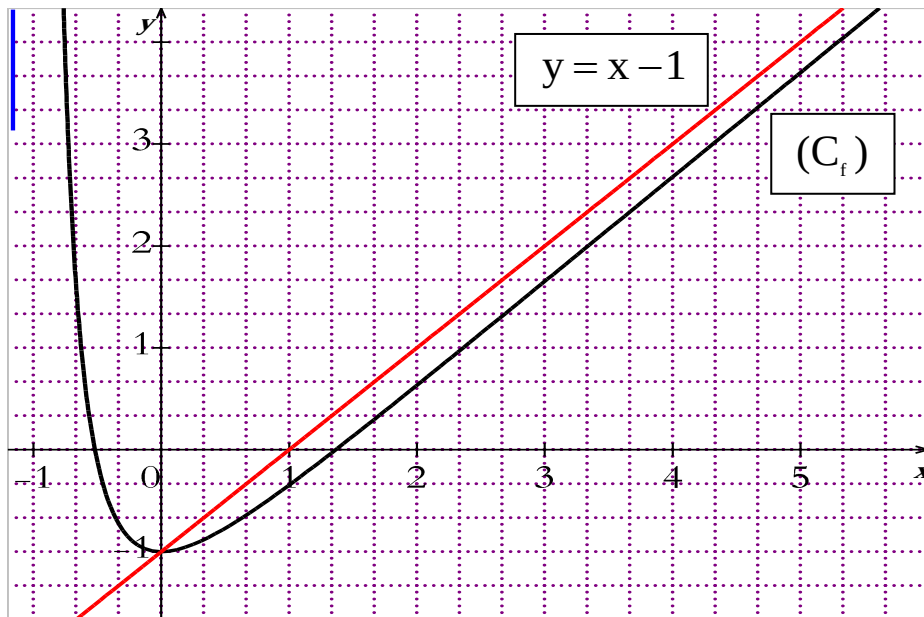
f متزايدة على المجال $[3,3; 3,4]$

ولدينا: $f(3,3) = 1,96$ و $f(3,4) = 2,06$

ونلاحظ أن: $f(3,3) < 2 < f(3,4)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $f(\alpha) = 2$

4) رسم المنحنى (C_f)



I- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ، ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

g الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ب:

$$g(x) = (x+1)(x+e) - e(x \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = e \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ نهاية شهيرة ، } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)(x+e) = e$$

بأن g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = e$ فإن $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$

II-1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln(x+1) + \frac{e \ln x}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ex}{x+1} \cdot \frac{\ln x}{x} = +\infty + e(0) = +\infty$$

ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{-e}{(x+1)^2} \ln x + \frac{e}{x(x+1)} = \frac{(x+1)(x+e) - ex \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ لأن المقام موجب وعليه الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها و جدول تغيراتها يكون كما يلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

معادلة المماس الأول (T) هي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي: $y = \frac{e+1}{2}x - \frac{e+1}{2} + \ln 2$

3-أ) تبين أن المنحنى يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α .

نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

من جدول تغيرات الدالة f الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد

حقيقي وحيد α من المجال $]0; +\infty[$ يحقق: $f(\alpha) = 0$ ومنه المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α .

(ب) التحقق أن: $0,7 \leq \alpha \leq 0,8$

لدينا: $f(0,7) < 0 < f(0,8)$ ومنه $0,7 \leq \alpha \leq 0,8$

-4 أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)]$ ، ثم تفسير النتيجة بانيًا.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1} \cdot \frac{\ln x}{x} = e \cdot 0 = 0$$

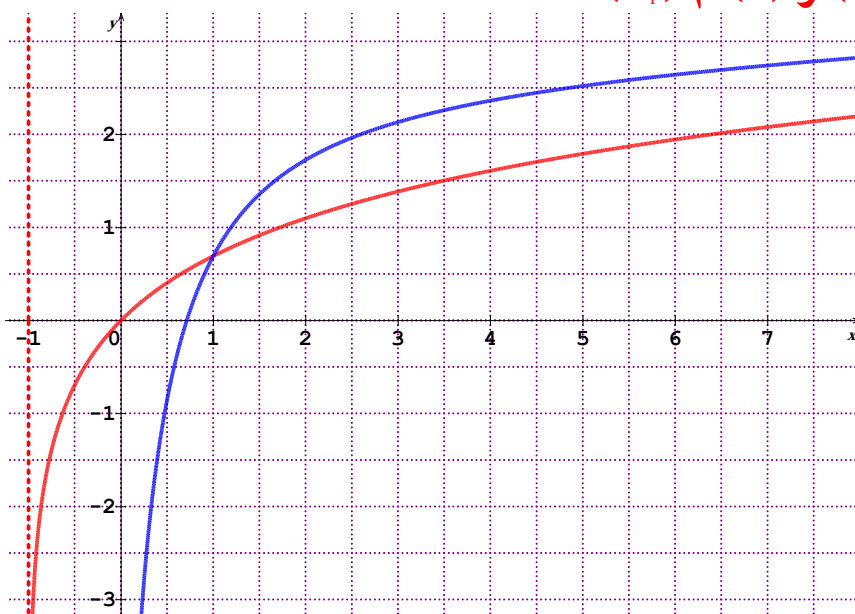
$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)] = 0$ ومعناه المنحنى (T) مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$

(ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (Γ) و (C_f)

لدينا: $[f(x) - \ln(x+1)] = \frac{e}{x+1} \ln x$ وعليه إشارة الفرق هي حسب إشارة $\ln x$ وهي كما يلي

من أجل كل $0 < x < 1$ يكون المنحنى (C_f) يقع تحت (Γ)
من أجل $x = 1$ يكون المنحنى (C_f) يقطع (Γ) احداثيها $(1; \ln 2)$
من أجل كل $x > 1$ يكون المنحنى (C_f) يقع فوق (Γ) .

(ج) رسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f)



ملاحظة: المنحنى (Γ) هو صورة منحنى الدالة $x \rightarrow \ln x$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}_0^{-1}$

التمرين 25: دورة 2018

I-1- دراسة اتجاه تغير الدالة g المجال $]0;1[$.

الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;1[$ كمايلي: $g(x) = 2 - x + \ln x$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;1[$ حيث: $g'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$

من أجل كل $x \in]0;1[$ يكون $g'(x) > 0$ وعليه الدالة g متزايدة تماماً على مجال تعريفها.

2- تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α حيث $0,15 \leq \alpha \leq 0,16$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على $]0;1[$ ولدينا: $g(0,15) =$ و $g(0,16) =$

وعليه: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $0,15 \leq \alpha \leq 0,16$.

3- استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;1[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha;1[$ فإن: $g(x) > 0$.

II- 1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

الدالة العددية f المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1-2x+\ln x}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 1} (1-2x+\ln x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{x-1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \cdot \frac{\ln x}{x} = -2 + 1 \cdot 0 = -2$$

تفسير النتيجةين بياناً

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الترتيب

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ معناه المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الفواصل

2- أ، تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(-2 + \frac{1}{x})(x-1) - 1(1-2x+\ln x)}{(x-1)^2} = \frac{2 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{2 - \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}}{(x-1)^2} = \frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$$

ب، تبيان أن f متزايدة تماماً على $[\frac{1}{\alpha}; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $[\frac{1}{\alpha}; 1]$ ثم تشكيل جدول تغيراتها

من عبارة $f'(x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(\frac{1}{x})$ لأن المقام موجب

لدينا: من أجل كل $x \in]\alpha;1[$ فإن: $g(x) > 0$ وعليه من أجل كل $x \in]1;\frac{1}{\alpha}[$ فإن $g(\frac{1}{x}) > 0$

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ وعليه من أجل كل $x \in]\frac{1}{\alpha};+\infty[$ فإن $g(\frac{1}{x}) < 0$

عليه f متزايدة تماماً على $\left[1; \frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماماً على $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$ وجدول تغيرات g يكون كما يلي

x	1	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty \xrightarrow{\quad} f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \xrightarrow{\quad} -2$		

3) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = -2$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{1 - 2x + \ln x}{x - 1} + 2 = \frac{-1 + \ln x}{x - 1}$

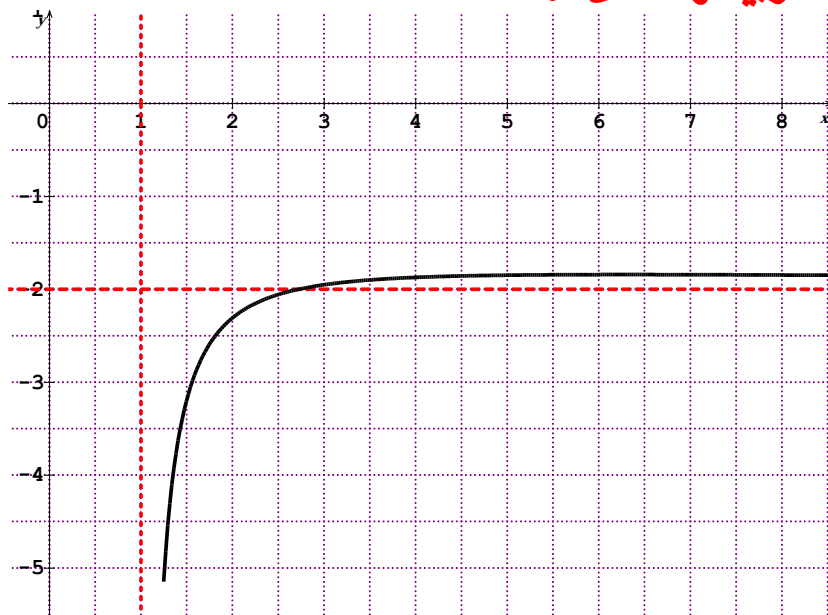
من العبارة السابقة نستنتج ان إشارة الفرق هي نفس إشارة $-1 + \ln x$ وهي كما يلي

(1) $-1 + \ln x = 0$ ومعناه $x = e$ ومعناه (C_f) يقطع (Δ) في نقطة إحداثيها $(e; -2)$

(2) $-1 + \ln x > 0$ ومعناه $x > e$ ومعناه (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]e; +\infty[$

(3) $-1 + \ln x < 0$ ومعناه $x < e$ ومعناه (C_f) يقع تحت (Δ) في المجال $]0; e[$.

4- رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f)



5- تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متميزين.

حلول المعادلة $|f(x)| = m$ بيانها هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = m$ ومنحنى

الدالة ذو المعادلة $y = |f(x)|$ وهو نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

لدينا: المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين متميزين معناه $-2 < m < f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

وعليه $|f(x)| = m$ تقبل حلين متميزين معناه $-f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < m < 2$

التمرين 26: دورة 2017

1-أ) حساب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ وتفسير النتيجة بانيانيا

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $] -\infty; 1[\cup] 2; +\infty [$ ب: $f(x) = -2x + 3 + 2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 3) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 3) = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty^*$ معناه للحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ معناه للحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = 2$.

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \ln 1 = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 3) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \ln 1 = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D : $f'(x) = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$.

لدينا: $f(x) = -2x + 3 + 2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ أي $f(x) = -2x + 3 + 2[\ln(x-1) - \ln(x-2)]$

$$\text{ومنه: } f'(x) = -2 + 2\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right] = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

لدينا: $f'(x) = -2\left[1 + \frac{1}{(x-1)(x-2)}\right] < 0$ فنستنتج أن إشارة $f'(x)$ سالبة تماما:

وعليه الدالة f متناقصة تماما على مجالي تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			-
$f(x)$	$+\infty \rightarrow -\infty$			$+\infty \rightarrow -\infty$

3) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $(3-x) \in D_f$ ، $f(3-x) + f(x) = 0$:

أولاً: من أجل كل $x \in D_f$ فإن $(-x) \in]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$ ومنه $(3-x) \in D_f$

$$f(3-x) + f(x) = -2(3-x) + 3 + 2 \left[\ln \frac{(2-x)}{(1-x)} \right] - 2x + 3 + 2 \left[\ln \frac{(x-1)}{(x-2)} \right]$$

ثانياً:

$$= 2 \left[\ln \frac{(x-1)(2-x)}{(x-2)(1-x)} \right] = 2 \left[\ln \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-1)} \right] = 2 \ln 1 = 0$$

(ب) استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه

من العبارة $f(3-x) + f(x) = 0$ والتي تكافئ $f(2\frac{3}{2}-x) + f(x) = 2(0)$

نسنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر احداثياها $\omega(\frac{3}{2}; 0)$.

4) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α على المجال $]0, 45; 0, 46[$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماماً على $] -\infty; 1[$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = -\infty$

لدينا: $f(0, 45) = 0.027 > 0$ و $f(0, 46) = -0.015 < 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha) = 0$ حيث $\alpha \in]0, 45; 0, 46[$.

استنتاج ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حداً آخر β يطلب تعيين حصراً له

*بما أن المنحنى (C_f) يقبل النقطة ω كمركز تناظر له نسنتج أن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حداً آخر β على المجال $]2; +\infty[$ حيث $\alpha + \beta = 2(\frac{3}{2})$

لأن النقطة التي احداثياها $(\alpha; 0)$ نظيرة النقطة التي احداثياها $(\beta; 0)$ بالنسبة للنقطة ω لدينا: $\alpha + \beta = 3$ ومنه $\beta = 3 - \alpha$

وبما أن $\alpha \in]0, 45; 0, 46[$ فإن $\beta \in]3 - 0, 46; 3 - 0, 45[$ أي $\beta \in]2, 54; 2, 55[$.

5) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -2x + 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -2x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

$$\text{لدينا: } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right) = \ln 1 = 0$$

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

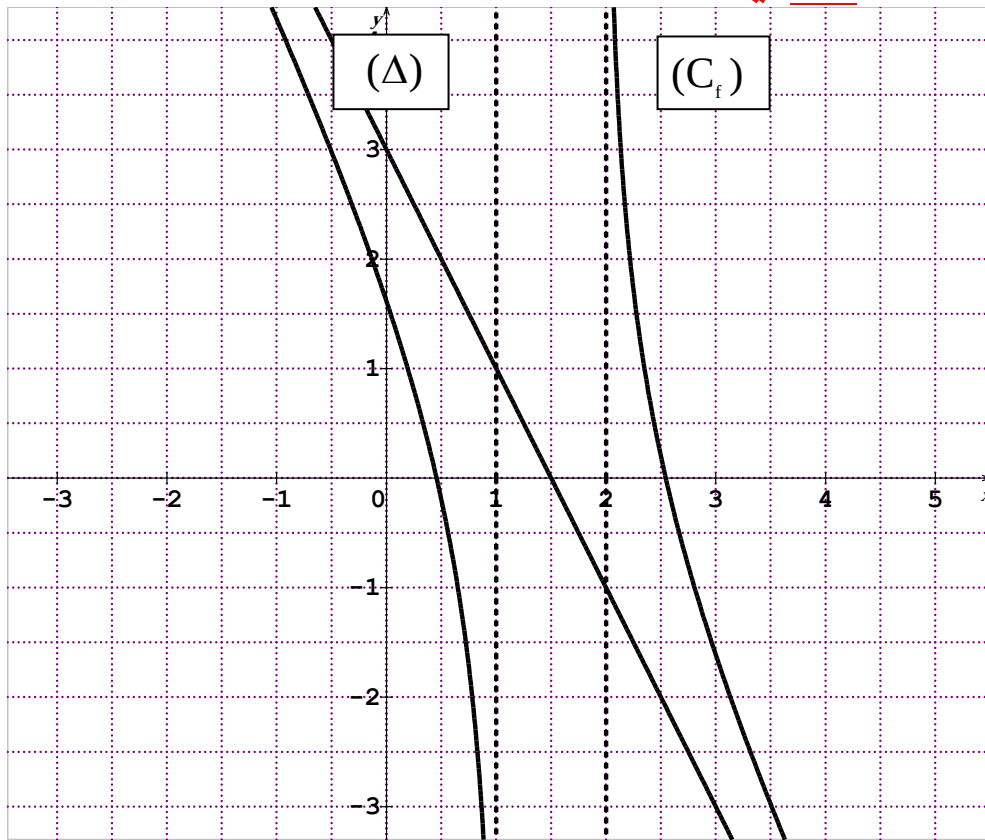
لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = 2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right)$

لدينا: $f(x) - y < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ لأن $\frac{x-1}{x-2} < 1$

: $f(x) - y > 0$ من أجل كل $x \in]2; +\infty[$ لأن $\frac{x-1}{x-2} > 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x) - y$	-			+
الوضع	(Δ) تحت (C_f)			(Δ) فوق (C_f)

ب) رسم (Δ) والمنحنى (C) في آخر الحل



التمرين 27: دورة 2017 الإستدراكية

1-I) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

لدينا: الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2 - \ln x}{x^2}$

* $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\frac{1}{2}$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ حيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ شهيرة

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(x^2) - 2x(2 - \ln x)}{x^4} = \frac{-5 + 2 \ln x}{x^3}$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $-5 + 2 \ln x$ لأن المقام موجب تماما

$$x = e^{\frac{5}{2}} = e^2 \sqrt{e} \text{ معناه } -5 + 2 \ln x = 0$$

$$x \in]e^2 \sqrt{e}; +\infty[\text{ معناه } -5 + 2 \ln x > 0 \text{ و } x \in]0; e^2 \sqrt{e}[\text{ معناه } -5 + 2 \ln x < 0$$

وعليه جدول التغيرات يكون كما يلي

x	0	$e^2 \sqrt{e}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	$+\infty$	$g(e^2 \sqrt{e})$	$-\frac{1}{2}$

2-أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,71 < \alpha < 1,72$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $x \in]0; e^2 \sqrt{e}[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $g(e^2 \sqrt{e}) < 0$

لدينا: $g(1,71) = 1,31$ و $g(1,72) = -0,07$ أي $g(1,71) \times g(1,72) < 0$

وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $1,71 < \alpha < 1,72$ حسب مبرهنة كوشي

ب) استنتاج إشارة $g(x)$

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن: $g(x) > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) < 0$

1-II) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

لدينا: الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 + \frac{-1 + \ln x}{x}$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \ln x}{x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{1}{2}x + 2) = 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2}x + 2) = -\infty$

2-أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{x})(x) - 1(-1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{2 - \ln x}{x^2} = g(x)$

ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

2-أ) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \ln x}{x} = 0 \text{ لدينا:}$$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ينبغي دراسة إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{-1 + \ln x}{x}$

إشارة الفرق $f(x) - y$ هي حسب إشارة $-1 + \ln x$ وهي كمايلي:

$-1 + \ln x = 0$ معناه $x = e$ ومعناه (C_f) يقطع (Δ) في نقطة إحداثيها $(e; f(e))$

$-1 + \ln x < 0$ معناه $x \in]0; e[$ ومعناه (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

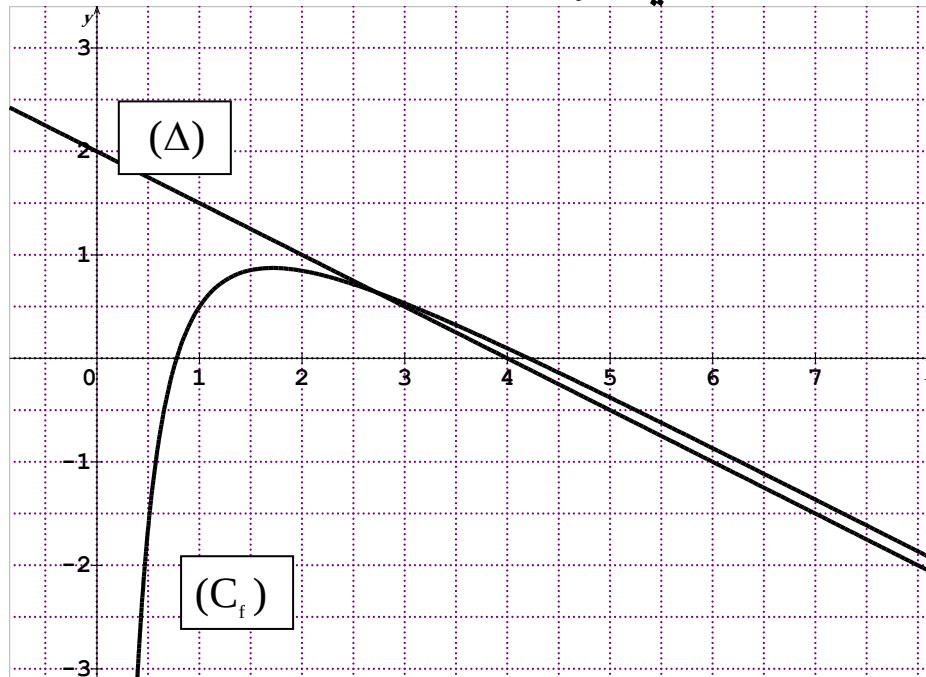
$-1 + \ln x > 0$ معناه $x \in]e; +\infty[$ ومعناه (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

3) انشاء في المعلم السابق المستقيم (Δ) المنحنى (C_f) .

من المعطيات لدينا: $f(\beta) = f(\gamma) = 0$ حيث $0,76 < \beta < 0,77$ و $4,19 < \gamma < 4,22$

ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما β و γ .

رسم المستقيم (Δ) المنحنى (C_f) في آخر الحل.



التمرين 28: دورة 2016 م 1

1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

لدينا: الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty^*$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها
حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

$$\text{لدينا: } g'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' + (\ln(x+1))' = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{(x+1)^2}$$

نستنتج أن: $g'(x) > 0$ لأن: $x > -1$ وعليه جدول التغيرات يكون كم يلي

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2-أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$$\text{لدينا: } g(0,4) = -\frac{3}{7} + \ln 1,4 \text{ و } g(0,5) = -\frac{1}{3} + \ln 1,5 \text{ أي } g(0,5) \times g(0,4) < 0$$

وعليه: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $0,4 < \alpha < 0,5$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-1; \alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) > 0$

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانيا ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)\ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x)\ln(x) = +\infty$

2-أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $]-1; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها

$$\text{لدينا: } f'(x) = (x-1)' \cdot (\ln(x+1))' = 1 \cdot \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} = g(x)$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f يكون كما يلي

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

ب) تبين أن $f(\alpha) = -\alpha + 4 - \frac{4}{\alpha + 1}$ وإعطاء حصر لـ $f(\alpha)$

*لدينا: $f(\alpha) = 1 + (\alpha - 1)\ln(\alpha + 1)$ ولدينا أيضا: $g(\alpha) = 0$ ومعناه $-\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \ln(\alpha + 1)$

ومنه: $f(\alpha) = 1 - (\alpha - 1)\frac{(\alpha - 1)}{(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha + 1) - (\alpha - 1)^2}{(\alpha + 1)} = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha}{(\alpha + 1)} = -\alpha + 4 - \frac{4}{(\alpha + 1)}$

*الحصر لدينا: $0,4 < \alpha < 0,5$ تكافئ $3,5 < -\alpha + 4 < 3,6$(1)

ولدينا: $0,4 < \alpha < 0,5$ وتكافئ $1,4 < \alpha + 1 < 1,5$ وتكافئ $\frac{4}{1,5} < \frac{4}{\alpha + 1} < \frac{4}{1,4}$...(2)

بطرح (2) من (1) نجد: $0,64 < f(\alpha) < 0,93$

3-أ) التحقق أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = f'(x) - f'(a)$

لدينا: $h'(x) = f'(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]' = f'(x) - f'(a)$ لأن $(x - a)' = 1$ و $f'(a) = 0$

ب) تعيين إشارة $h'(x)$ باستعمال اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $h'(x) = f'(x) - f'(a) = g(x) - g(a) < 0$ من أجل $x < a$ لأن g متزايدة تماما

لدينا: $h'(x) = f'(x) - f'(a) = g(x) - g(a) > 0$ من أجل $x > a$ لأن g متزايدة تماما

ومنه إشارة $h'(x)$ هي حسب الجدول التالي

x	-1	a	$+\infty$
إشارة $h'(x)$	-	0	+

استنتاج اتجاه تغير الدالة h

من الجدول السابق والذي يوضح إشارة $h'(x)$ نستنتج أن:

من أجل كل $x \in]-1; a[$ فإن h متناقصة تماما ومن أجل كل $x \in]a; +\infty[$ فإن h متزايدة تماما

والدالة h تقبل 0 كقيمة حدية صغرى من أجل a لأن: $h(a) = f(a) - f(a) = 0$ وعليه $h(x) \geq 0$

ج) تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T_a)

(T_a) له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

لتحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T_a) ندرس إشارة الفرق $f(x) - y = h(x)$

بما أن $h(x) \geq 0$ فإن المنحنى (C) يكون دائما فوق المماس (T_a) ويمسه في النقطة ذات الفاصلة a

4-أ) تبين وجود مماسين (T_a) يشملان النقطة $A(1; 0)$ وتعيين معادلتيهما.

لدينا: (T_a) له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

المماس (T_a) يشمل النقطة $A(1;0)$ معناه $0 = f'(a)(1-a) + f(a)$

ولدينا: $0 = g(a)(1-a) + f(a)$ تكافئ $0 = f'(a)(1-a) + f(a)$

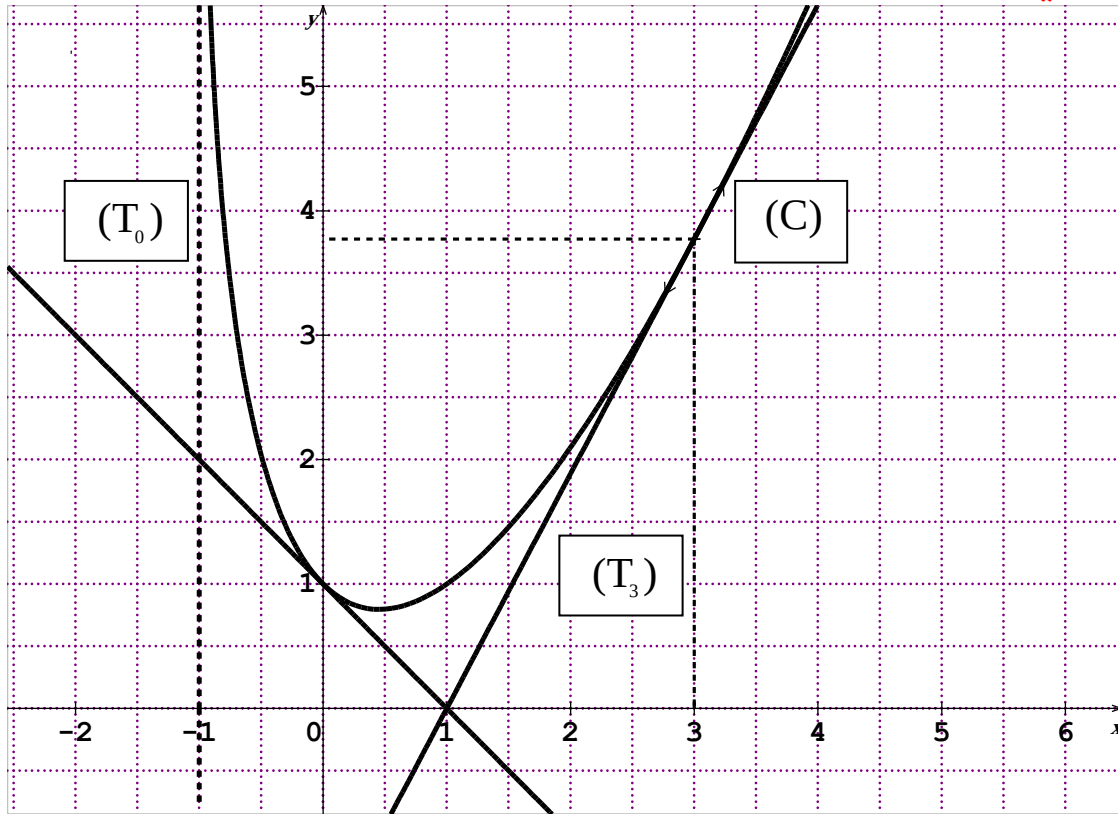
معناه $\frac{(1-a)(a-1)}{(a+1)} + 1 = 0$ وعليه $(a-1)^2 = a+1$ أي $a^2 - 3a = 0$ ومنه $a = 0$ أو $a = 3$

ومنه يوجد مماسين (T_a) لـ (C) الأول عند النقطة $(0;1)$ والثاني عند النقطة $(3;2\ln 4)$

معادلة المماس الأول (T_0) هي: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي: $y = -x + 1$

معادلة المماس الثاني (T_3) هي: $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ أي: $y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)x - \frac{1}{2} - \ln 4$

(ب) رسم المماسين والمنحنى (C)



التمرين 29: دورة 2016 م 2

(I) 1- أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ نهاية شهيرة. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0$

حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x \ln x)$

إزالة حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيرها.

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ $g'(x) = 1 - (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = -\ln x$

إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $-\ln x$ وهي حسب الجدول التالي

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كالتالي

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	1	$-\infty$

(2) تبين ان المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3,5 < \alpha < 3,6$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$

لدينا: $g(3,5) = -0,88$ و $g(3,6) = -1,01$ أي $g(3,6) < -1 < g(3,5)$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = -1$ حيث $3,5 < \alpha < 3,6$.

(3) استنتاج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا: $g(x) + 1 = 0$ تكافئ $g(\alpha) = -1$ ومن الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x) + 1$ هي:

من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن: $g(x) + 1 > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) + 1 < 0$

(1-II) تبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty^*$ ومعناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 0^*$ ومعناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = 0$

(2-I) البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

لدينا: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - 1 \cdot \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x - x \ln x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

(ب) تبين أن الدالة f متزايدة على $]0; \alpha[$ ومتناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x) + 1$ لأن المقام موجب تماما

من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن: $g(x) + 1 > 0$ ومنه f متزايدة على $]0; \alpha[$

ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) + 1 < 0$ ومنه f ومتناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$ وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

(ج) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(T) له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

ومنه $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ أي $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

(د) حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، تفسير النتيجة هندسيا.

بأن الدالة f قابلة للإشتقاق عند α لأنها قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ فإن:

$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = 0$ ومعناه المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α

المماس عند النقطة ذات الفاصلة α يوازي حامل محور الفواصل وله معادلة من الشكل $y = f(\alpha)$

(3) -تبيان أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

لدينا: (1) $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha + 1}$ ولدينا أيضا $g(\alpha) = -1$ ومعناه $\alpha - \alpha \ln \alpha = -1$ أي $\ln \alpha = \frac{1 + \alpha}{\alpha}$

بعد تعويض قيمة $\ln \alpha$ في العبارة (1) نجد: $f(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{\alpha(\alpha + 1)} = \frac{1}{\alpha}$

ب- استنتاج حصر العدد $f(\alpha)$ (وتدوير النتائج إلى 10^{-2})

لدينا: $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha + 1}$ ولدينا $3,5 < \alpha < 3,6$ وتكافئ (1) $4,5 < \alpha + 1 < 4,6$ و (2) $1,25 < \ln \alpha < 1,28$...

من المتابعتين (1) و (2) نجد: $0,27 < f(\alpha) < 0,28$

ج- رسم (C_f) . (في آخر الحل)

4- أ- التحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

لدينا: (E) $x^2 + x - 2m(x + 1) = \ln(x^2)$ تكافئ $x(x + 1) - 2m(x + 1) = 2 \ln x$

وبعد قسمة الطرفين على $\frac{1}{2}(x + 1)$ نجد $\frac{1}{2}x - m = \frac{\ln x}{x + 1}$ أي $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

ب- تعين بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متميزين.

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x - m$ والمنحنى (C_f) من البيان يكون للمعادلة (E) حلين متميزين معناه $m > \frac{1}{2}$.

5-أ- تبين أن h زوجية.

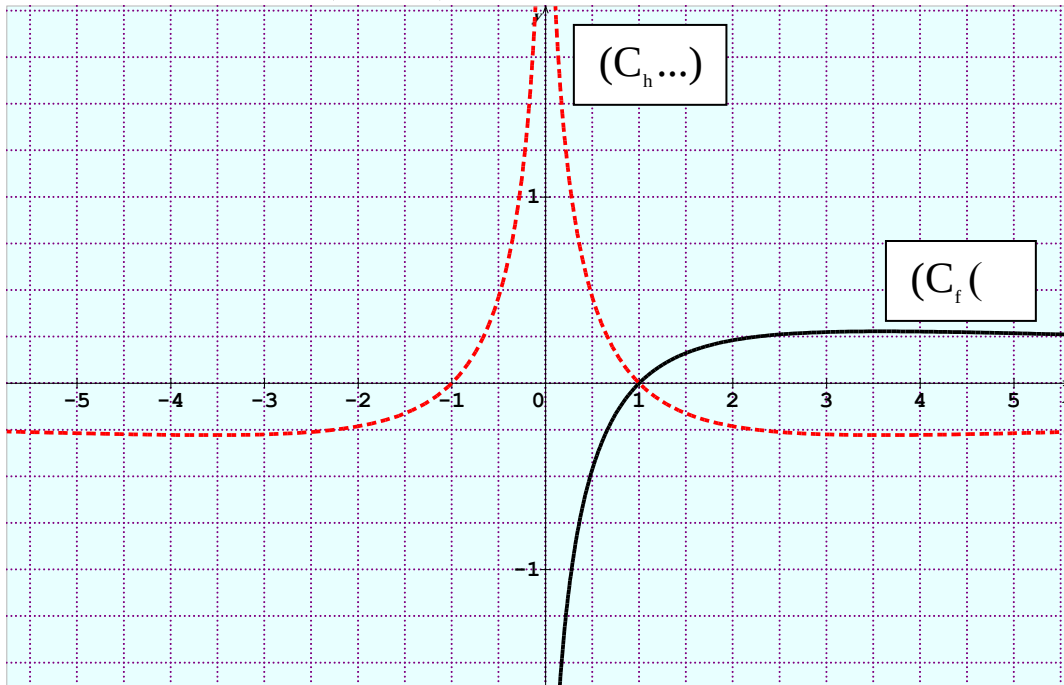
h دالة زوجية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ و $-x \in \mathbb{R}^*$: $h(-x) = h(x)$

لدينا: $h(-x) = \frac{\ln|-x|}{-|-x|-1} = \frac{\ln|x|}{-|x|-1} = h(x)$ لأن $|-x| = |x|$ ومنه h زوجية.

ب- رسم في نفس المعلم المنحنى (C_f) و (C_h) .

* (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل من أجل $x \in \mathbb{R}_+^*$

* (C_h) نظير (C_f) بالنسبة للمبدأ من أجل $x \in \mathbb{R}_-^*$ (أونتم الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب)



التمرين 30: دورة 2015

1- I حساب $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

لدينا: $h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$ و المعرفة على $]-2; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -2} (-2\ln(x+2)) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$ حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \left[(x+2) + \frac{2}{x+2} - 2 \frac{\ln(x+2)}{(x+2)} \right] = +\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x+2} \right] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x+2)}{(x+2)} \right] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$

2) دراسة اتجاه تغير h وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2h\ln(x+2)$ و $D_h =]-2; +\infty[$

ومنه: $h'(x) = 2(x+2) - \frac{2}{x+2} = \frac{2(x+2)^2 - 2}{x+2} = \frac{2[(x+2)-1][(x+2)+1]}{(x+2)}$

أي: $h'(x) = \frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)}$

$h'(x) = 0$ معناه $(x+1)(x+3) = 0$ معناه $x = -1$ أو $x = -3 \notin D_h$ مرفوض

$h'(x) < 0$ معناه $(x+1)(x+3) < 0$ معناه $x \in]-2; -1[$

$h'(x) > 0$ معناه $(x+1)(x+3) > 0$ معناه $x \in]-1; +\infty[$

وعليه جدول تغيرات الدالة h كمايلي:

x	-2	-1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$h(-1)$	$+\infty$

3) استنتاج أنه من أجل كل x من $]-2; +\infty[$: $h(x) > 0$

من جدول التغيرات للدالة h لدينا: $h(-1) = 3 > 0$ ومنه $h(x) > 0$

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

لدينا: $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2} \ln(x+2)$ والمعرفة على $]-2; +\infty[$.

* $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x+2} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -2} \ln(x+2) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ معناه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = -2$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x+2)}{x+2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$

2) تبيان أنه من أجل كل x من $]-2; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+2)^2} \ln(x+2) + \frac{2}{(x+2)} \times \frac{1}{(x+2)} = \frac{(x+2)^2 - 2 \ln(x+2) + 2}{(x+2)^2} = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$

2) دراسة اتجاه تغير f على $]-2; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $h(x)$ وعليه تكون الدالة f متزايدة تماماً على $]-2; +\infty[$ لأن $h(x) > 0$

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) أ) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$y = x + 1$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x + 2)}{x + 2} = 0 \text{ نهاية شهيرة}$$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - (x + 1)$

$$\text{من الجواب السابق لدينا: } f(x) - (x + 1) = \frac{2 \ln(x + 2)}{(x + 2)}$$

إشارة الفرق هي من إشارة $\ln(x + 2)$ لأن $(x + 2) > 0$ من أجل كل $x \in]-2; +\infty[$

$\ln(x + 2) = 0^*$ ومنه $x = -1$ معناه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياتها $(-1; 0)$

$\ln(x + 2) < 0^*$ ومنه $x < -1$ معناه (C_f) تحت (Δ) في المجال $]-2; -1[$

$\ln(x + 2) > 0^*$ ومنه $x > -1$ معناه (C_f) فوق (Δ) في المجال $]-1; +\infty[$

4- أ) اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها.

المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف معناه الدالة f'' تنعدم وتغير إشارتها

$$\text{لدينا: } f'(x) = \frac{h(x)}{(x + 2)^2} \text{ ومنه } f''(x) = \frac{h'(x)(x + 2)^2 - 2(x + 2)h(x)}{(x + 2)^4}$$

$$\text{ومنه: } f''(x) = \frac{h'(x)(x + 2) - 2h(x)}{(x + 2)^3} = \frac{4 \ln(x + 2) - 6}{(x + 2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \text{ معناه } \ln(x + 2) = \frac{3}{2} \text{ أي } x + 2 = e^{\frac{3}{2}} \text{ ومنه } x = \sqrt{e^3} - 2$$

$$f''(x) < 0 \text{ معناه } x < \sqrt{e^3} - 2 \text{ و } f''(x) > 0 \text{ معناه } x > \sqrt{e^3} - 2$$

ومنه (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A إحداثياتها $(\sqrt{e^3} - 2; \sqrt{e^3} - 1 + \frac{3}{4\sqrt{e^3}})$

ب) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) (في آخر الحل)

III-1) حساب $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1}$ والاستنتاج بالنسبة لـ g

كتابة العبارة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ، وذلك حسب قيم x

$$g(x) = - \left[(x + 1) + \frac{2}{x + 2} \ln(x + 2) \right] = -f(x) : x \in]-2; -1[$$

$$g(x) = \left[(x + 1) + \frac{2}{x + 2} \ln(x + 2) \right] = f(x) : x \in]-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} - \frac{f(x)}{x + 1} = -1 - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y} \cdot \frac{\ln(y + 1)}{(y + 1)} = -3 \text{ وعليه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1} = 1 + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y} \cdot \frac{\ln(y + 1)}{(y + 1)} = +3$$

نستنتج أن الدالة g غير قابلة للإشتقاق عند -1 لأن $-3 \neq +3$

2) إعطاء تفسير هندسي للنتيجة

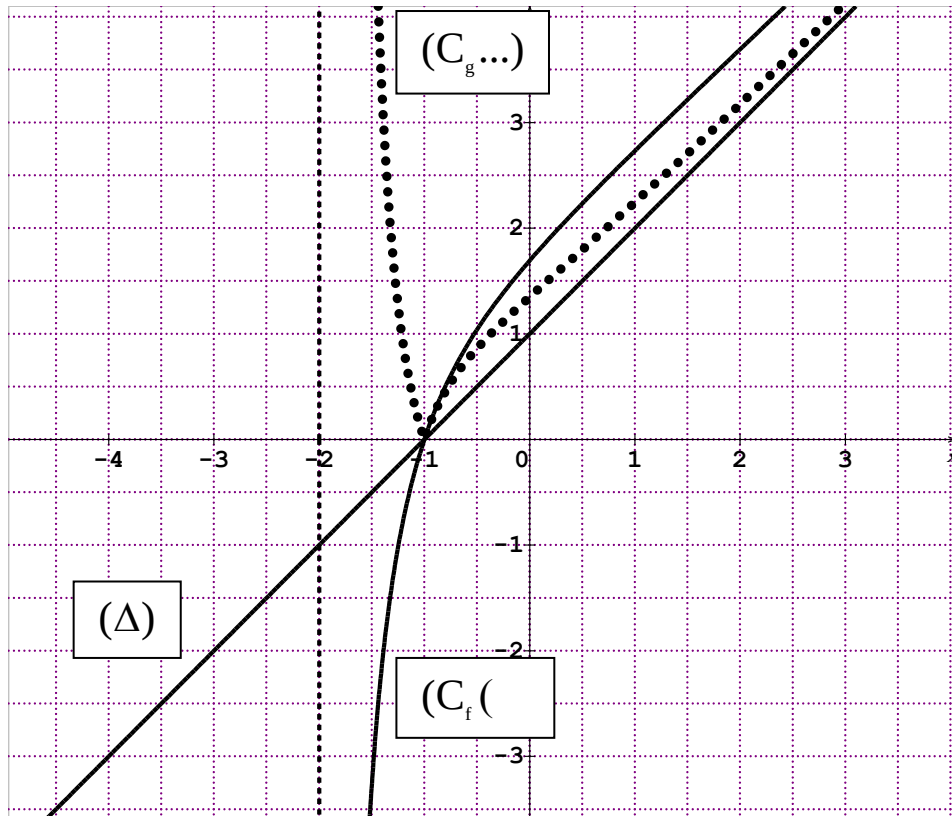
بأن العدد المشتق من اليسار لا يساوي العدد المشتق من اليمين للدالة g عند -1 .
فإن منحنى الدالة (C_g) يقبل نصفي مماسين عند النقطة التي أحدثهاها $(-1; 0)$.

3) رسم المنحنى (C_g) إنطلاقاً من المنحنى (C_f)

من الجواب السابق لدينا:

$g(x) = -f(x) : x \in]-2; -1[$ ومعناه (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

$g(x) = f(x) : x \in]-1; +\infty[$ ومعناه $(C_g) = (C_f)$



I-1) ادرس تغيرات الدالة g

لدينا: دالة معرفة على $]0; 3]$ ب: $g(x) = x \ln x + x$.

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + x) = 0$$

$$g(3) = 3 \ln 3 + 3 \text{ نهاية شهيقة و}$$

اتجاه التغير

$$g'(x) = (x \ln x + x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2$$

$$g'(x) = 0 \text{ معناه } \ln x + 2 = 0 \text{ أي } x = e^{-2}$$

$$g'(x) > 0 \text{ معناه } \ln x + 2 > 0 \text{ أي } x > e^{-2} \text{ و } g'(x) < 0 \text{ معناه } \ln x + 2 < 0 \text{ أي } x < e^{-2}$$

جدول التغيرات

x	2	e^{-2}	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0	$g(e^{-2})$	$g(3)$

2-أ) نبيان أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; 3]$ ثم تحقق أن $1,45 < \alpha < 1,46$.

* المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; 3]$ لأن:

f متزايدة على $]e^{-2}; 3]$ ولدينا: $g(e^{-2}) = -e^{-2}$ و $g(3) = 3 \ln 3 + 3$ أي: $g(e^{-2}) < 2 < g(3)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $g(\alpha) = 2$

* لدينا: $g(1,45) = 1,99$ و $g(1,46) = 2,01$ ومنه $1,45 < \alpha < 1,46$

ب) استنتج إشارة $g(x) - 2$.

$$g(\alpha) = 2 \text{ معناه } g(\alpha) - 2 = 0$$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن إشارة

$g(x) - 2$ هي حسب الجدول التالي

x	0	α	3
$g(x) - 2$	-	0	+

II-1) وضع تخمين حول قابلية اشتقاق للدالة f عند 2

باستعمال المنحنى (C_f) نؤمن أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 لأنها تقبل نصفي مماسين

2) أثبات صحة تخمينك.

توضيح: $f(x) = |x-2|\ln x = \begin{cases} -(x-2)\ln x; x \in]0;2[\\ (x-2)\ln x; x \in]2;3[\end{cases}$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)\ln 2}{(x-2)} = -\ln 2 = f'_g(2)$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)\ln 2}{(x-2)} = \ln 2 = f'_d(2)$

ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 لأن: $f'_g(2) \neq f'_d(2)$.

(3) دراسة تغيرات الدالة f

f والمعرفة على المجال $]0;3[$ ب: $f(x) = |x-2|\ln x$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ نهاية شهيرة. و $f(3) = \ln 3$

اتجاه التغير: f قابلة للاشتقاق على كلا من المجالين $]0;2[$ و $]2;3[$ حيث:

$$f'(x) = \begin{cases} -\ln x - \frac{x-2}{x} = -\frac{g(x)-2}{x}; x \in]0;2[\\ \ln x + \frac{x-2}{x} = \frac{g(x)-2}{x}; x \in]2;3[\end{cases}$$

من الجواب (I-2) نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي:

نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]2;3[$ وعكس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;2[$.
وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

X	0	α	2	3
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0	$f(3)$

III-1) تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) .

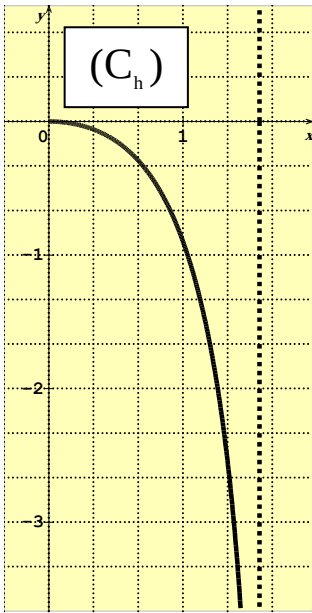
لدينا: h الدالة المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ كمايلي: $h(x) = (2 - \cos x) \ln(\cos x)$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) معناه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \infty$.

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\cos x) = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2 - \cos x) = 1$.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة h ، ثم تشكيل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h) .

توضيح: الدالة h هي تركيب الدالة $x \rightarrow \cos x$ متبوعة بالدالة f أي: $h(x) = f(\cos x)$



نعلم أن الدالة $x \rightarrow \cos x$ متناقصة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ والدالة f متزايدة على المجال $[0; 1]$ ومنه الدالة h متناقصة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

لأنها تركيب دالتين مختلفتين في اتجاه التغير وعليه جدول تغيرات الدالة h يكون كما يلي:

لدينا: $h(0) = f(\cos 0) = f(1) = 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	0	$-\infty$

التمرين 32: دورة 2013 م

1-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

$g(x)$ الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$

من اجل كل $x \in]-1; +\infty[$ فإن: $g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$

نلاحظ أن: من اجل كل $x \in]-1; +\infty[$ فإن: $g'(x) > 0$ وعليه تكون g متزايدة تماما.

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$

g^* متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$ ولدينا: $g(0,31) = 0$ و $g(0,32) < 0$ أي: $g(0,31) < 0 < g(0,32)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $g(\alpha) = 0$

* $g(\alpha) = 0$ معناه $(\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0$ أي $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$

3) استنتاج إشارة $g(x)$.

الدالة g تماما على $]-1; +\infty[$ والمعادلة $g(x) = 0$ تقبل

حلا وحيدا α فإن إشارة $g(x)$ حسب الجدول التالي:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II-1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$f(x)$ الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + [2 - \ln(x+1)]^2$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 + [2 - \ln(x+1)]^2 = 0 + \infty = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -1} -\ln(x+1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 + [2 - \ln(x+1)]^2 = +\infty + \infty = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-\ln(x+1)]^2 = +\infty$

2- تبين أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$

$$f'(x) = 2(x+1) - 2[2 - \ln(x+1)] \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{2[(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)]}{x+1} = \frac{2g(x)}{x+1}$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

من العبارة $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$ نستنتج أن إشارة

$f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

4- تبين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2[1 + (\alpha+1)^2]$

ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + [2 - \ln(\alpha+1)]^2$

ولدينا من جهة أخرى $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$ حسب 2-I.

ومنه: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + [(\alpha+1)^2]^2 = (\alpha+1)^2[1 + (\alpha+1)^2]$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

نضع: (1) $0,31 < \alpha < 0,32$ لدينا: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2[1 + (\alpha+1)^2]$

(1) تكافئ $1,31 < \alpha+1 < 1,32$ وتكافئ (2) $(1,31)^2 < (\alpha+1)^2 < (1,32)^2$

(2) تكافئ (3) $1 + (1,31)^2 < 1 + (\alpha+1)^2 < 1 + (1,32)^2$

بضرب (2) و (3) لطرف لطرف نجد: $(1 + (1,31)^2)(1,31)^2 < f(\alpha) < (1 + (1,32)^2)(1,32)^2$

بعد الحساب نجد: $< f(\alpha) <$

5- تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

ملاحظة: $f(2) = 3^2 + (2 - \ln(3))^2 = 9$

III-1- أثبات أن المسافة $AM = \sqrt{f(x)}$

لدينا: $A(-1; 2)$ و $M(x; h(x))$

ومنه: $AM = \sqrt{(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2} = \sqrt{f(x)}$

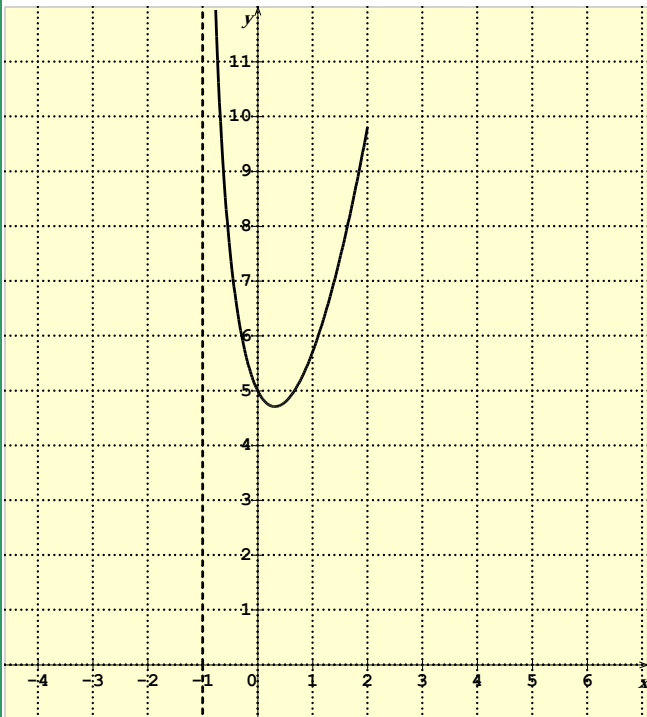
k معرفة على $]-1; +\infty[$ بالعبارة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

2- أثبات أن k و f نفس اتجاه التغير على $]-1; +\infty[$

الدالة k معرفة على $]-1; +\infty[$ بالعبارة

: $k(x) = \sqrt{f(x)}$ قابلة للأشتقاق على

$]-1; +\infty[$ حيث: $k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$



من العبارة $k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ نستنتج أن العبارتين $k'(x)$ و $f'(x)$ لهما نفس الإشارة ومنه للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- تعيين إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا: $AM = \sqrt{f(x)} = k(x)$

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما تقبل الدالة k قيمة حدية محلية صغرى
الدالة k متناقصة على المجال $]-1; \alpha[$ و متزايدة على المجال $]\alpha; +\infty[$ و $k(\alpha) = \ln(\alpha + 1)$ أي
أي قيمة حدية محلية صغرى هي $\ln(\alpha + 1)$ عند α
ومنه احداثيتي النقطة B هي $(\alpha; \ln(\alpha + 1))$.

ج- تبيان أن: $AB = (\alpha + 1)\sqrt{(\alpha + 1)^2 + 1}$.

نضع: $M = B$ في العلاقة $AM = \sqrt{(x + 1)^2 + (2 - \ln(x + 1))^2}$

نجد: $AB = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + (2 - \ln(\alpha + 1))^2} = \sqrt{(\alpha + 1)^2 [1 + (\alpha + 1)^2]} = (\alpha + 1)\sqrt{1 + (\alpha + 1)^2}$

التمرين 33: دورة 2013 م 2

1- دراسة تغيرات الدالة g.

لدينا: g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (x - 1)e^x$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ نهاية شهيذة و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$

دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f'(x) = [(x - 1)e^x]' = 1 \cdot e^x + (x - 1) \cdot e^x = xe^x$ وشارته هي حسب إشارة x

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	0	-1	$+\infty$

2- بيّن أنه ، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $1 + (x - 1)e^x \geq 0$

من جدول التغيرات لدينا: $g(x) \geq -1$ لأن قيمة حدية صغرى للدالة g

ومنه: $g(x) + 1 \geq 0$ عليه $1 + (x - 1)e^x \geq 0$

1-II) - تبيان أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

$$\text{لدينا: } f \text{ الدالة المعرفة على } [0; +\infty[\text{ ب: } \begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

نعلم أن f مستمرة على $[0; +\infty[$ معناه أن f مستمرة على المجال $[0; +\infty[$ ومستمرة عند 0

- f مستمرة على المجال $[0; +\infty[$ لأنها حاصل قسمة دالتين مستمرتين على هذا المجال.
- f مستمرة عند 0 معناه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ نهاية شهيرة.}$$

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ نهاية شهيرة و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$2-أ-التحقق أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$$$

$$\text{لدينا: } f'(x) = \frac{e^x(x) - 1(e^x - 1)}{x^2} = \frac{1 + e^x(x-1)}{x^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من الجواب I-2) لدينا: $1 + (x-1)e^x \geq 0$

ومنه $f'(x) \geq 0$ وعليه تكون الدالة f متزايدة تماما و جدول تغيراتها يكون كمايلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$+\infty$

III-1-دراسة اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$.

$$f_n \text{ الدالة المعرفة على } [0; +\infty[\text{ ب: } f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$$

$$(n \ln x)' = n \left(\frac{1}{x} \right) \text{ لأن } f_n'(x) = \frac{1 + e^x(x-1)}{x^2} + \frac{n}{x}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ وعليه تكون الدالة } f \text{ متزايدة تماما لأن: } \frac{n}{x} > 0 \text{ و } \frac{1 + e^x(x-1)}{x^2} \geq 0$$

2-حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} n \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n \ln x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = +\infty$$

3- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) ندرس إشارة الفرق: $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + (n+1)\ln x - \frac{e^x - 1}{x} - n\ln x = \ln x$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $\ln x$ والجدول التالي يوضح إشارة $\ln x$ والوضع النسبي:

x	0	1	$+\infty$
إشارة الفرق	-	0	+
الوضع النسبي	(C_n) تحت (C_{n+1})	(C_n) فوق (C_{n+1})	(C_{n+1}) يقطع (C_n)

4- تبين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.

النقطة B نقطة تقاطع جميع المنحنيات تكون مستقلة عن العدد الطبيعي n من خلال الجواب 3 نستنتج أن $B(1; e-1)$ هي نقطة تقاطع (C_n) و (C_{n+1}) .

5-أ- تبين أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد من $\alpha_1 \in]0,3; 0,4[$ بحيث: $f_1(\alpha_1) = 0$.

لتبين وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha_1 \in]0,3; 0,4[$ بحيث: $f_1(\alpha_1) = 0$ نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة لدينا: الدالة f_1 (هي الدالة f) مستمرة ومتزايدة تماما (انظر جدول تغيرات f) ولدينا: $f_1(0,3) = -0,03$ و $f_1(0,4) = 0,31$ أي $f_1(0,3) \times f_1(0,4) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1 \in]0,3; 0,4[$ يحقق $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) \leq 0$

لتبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) \leq 0$

من الجواب 3 لدينا: $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ من أجل كل $x \in]0;1[$

إذن $f_n(x) \leq f_1(x)$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$.

ملاحظة: يمكن استعمال طريقة البرهان بالتراجع

البرهان أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $\alpha_n \in]\alpha_1; 1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n) = 0$.

لتبين وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha_n \in]\alpha_1; 1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n) = 0$ نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة لدينا: الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماما (أنظر الجواب III-1)

ولدينا: $f_n(\alpha_1) < 0$ و $f_n(1) = e-1 > 0$ أي $f_n(\alpha_1) \times f_n(1) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n \in]\alpha_1; 1[$ يحقق $f_n(\alpha_n) = 0$.

6-أ- تبين أنه ، من أجل كل x من $]0;1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e-1$

المترابحة $\frac{e^x - 1}{x} \leq e-1$ تكافئ $f_1(x) \leq f_1(1)$ محققة لأن الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$.

التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة A(1; -1) مماسا معامل توجييه 4 معناه $\begin{cases} g'(1) = 4 \\ g(1) = -1 \end{cases}$

لدينا: $g(1) = 1^2 + a + b \ln(1) = 1 + a = -1$ ومنه $a = -2$.

لدينا: $g'(x) = 2x + \frac{b}{x}$ ومنه $g'(1) = 2 + \frac{b}{1} = 4$ ومنه $b = 2$.

أ) دراسة تغيرات الدالة g، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $g(x) = x^2 - 2 + 2 \ln(x)$ والمعرفة على $]0; +\infty[$

النهايات

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ نهاية شهيرة. لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -2 - \infty = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ نهاية شهيرة. لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty + \infty = +\infty$

اتجاه التغير

f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث: $g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$

نلاحظ أن: $g'(x) > 0$ من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ وعليه الدالة g متزايدة تماما.

جدول تغيرات g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ب) تبين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ ومتزايدة تماما على

$]0; +\infty[$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد

حقيقي وحيد $\alpha \in]0; +\infty[$ بحيث: $g(\alpha) = 0$

استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

لدينا: $g(]0; \alpha[) =]-\infty; 0[$ معناه $g(x) < 0$ من أجل $x \in]0; \alpha[$.

$g(]\alpha; +\infty[) =]0; +\infty[$ معناه $g(x) > 0$ من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$.

II - 1 - أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x} = -2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln(x)}{x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ نهاية شهيرة. لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x} = +\infty$

ب) حساب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 - 2 \frac{\left(\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x \right)}{x^2} = \frac{x^2 - 2(1 - \ln x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ج) استنتاج إشارة $f'(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f

X	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ وعليه جدول التغيرات للدالة f يكون كما يلي:

2- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 2$ يقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

*المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 2$ يقارب لـ (C_f) معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2 \ln(x)}{x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ نهاية شهيرة.

*لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ندرس إشارة الفرق: $[f(x) - (x - 2)] = -2 \frac{\ln x}{x}$

نلخص إشارة الفرق والوضعية في الجدول التالي:

x	0	1	$+\infty$
إشارة الفرق		+ 0 -	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ) $\downarrow$ (C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)

ب) تبين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ثم ايجاد معادلة له و كتابة معادلة للمماس (T)

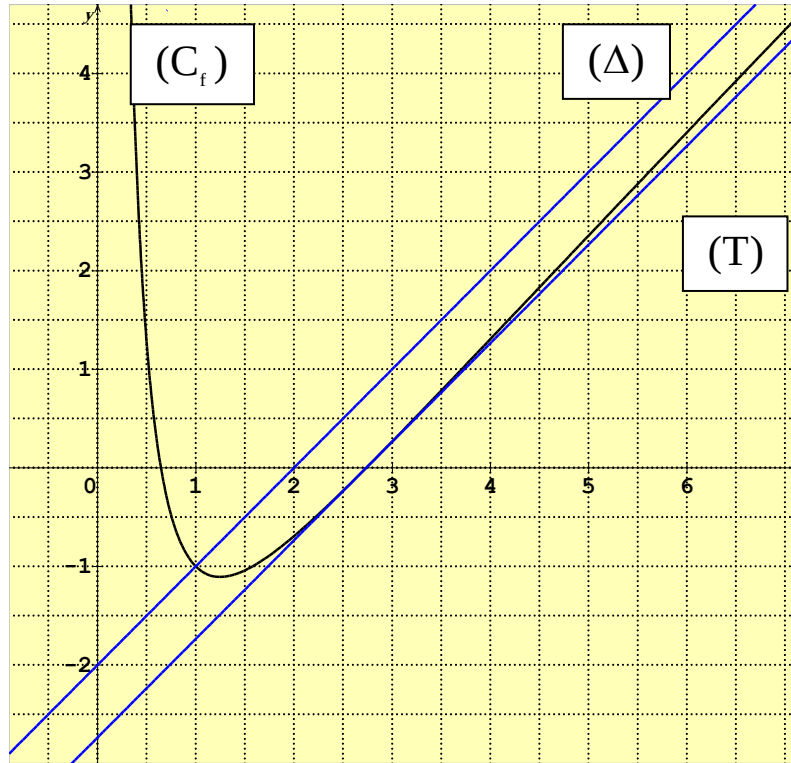
(C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه (T) يساوي 1 أي $f'(x_0) = 1$

$f'(x_0) = 1$ معناه $\frac{g(x_0)}{x_0^2} = 1$ أي $g(x_0) = x_0^2$ أي $-2 + 2 \ln(x_0) = 0$ ومنه $x_0 = e$

(T) له معادلة من الشكل : $y = f'(e)(x - e) + f(e)$ ومنه $y = x - 2 - \frac{2}{e}$

ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; \alpha[$ و $f(0,6) \times f(0,7) < 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α محصور بين 0,6 و 0,7 يحقق $f(x_1) = 0$
 الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$ و $f(2,7) \times f(2,8) < 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد β محصور بين 2,7 و 2,8 يحقق $f(x_2) = 0$
 *رسم كلا من (Δ) و (T) و (C_f) .



3- المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $(m+2)x + 2\ln(x) = 0 \dots (1)$

$$(1) \text{ تكافئ } m = -2 - \frac{2\ln(x)}{x} \text{ وتكافئ } x + m = f(x) \text{ وتكافئ الجملة: } \begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases}$$

حلول الجملة السابقة هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$ والمنحنى (C_f) من البيان نميز الحالات التالية:

(1) $m < -2 - \frac{2}{e}$ المعادلة (1) لا تقبل حلول ، (2) $m = -2 - \frac{2}{e}$ المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا

(3) $-2 - \frac{2}{e} < m < -2$ المعادلة (1) تقبل حلين ، (4) $m \geq -2$ المعادلة (1) لا تقبل حلا واحدا

$$\begin{cases} f'(\frac{1}{2}) = 0 \\ f(\frac{1}{2}) = -1 \end{cases} \quad \text{المماس في النقطة } A(\frac{1}{2}; 1) \perp (C_f) \text{ موازيا لحامل محور الفواصل معناه}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \cdot 4x^2 - 8x(a + b \ln(2x))}{(4x^2)^2} = \frac{b - 2(a + b \ln(2x))}{4x^3} \quad \text{ومنه } f(x) = \frac{a + b \ln(2x)}{4x^2} \quad \text{لدينا:}$$

$$f(\frac{1}{2}) = -1 \quad \text{معناه } f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{1} = 1 \quad \text{ومنه } a = 1$$

$$f'(\frac{1}{2}) = 0 \quad \text{معناه } b - 2a = 0 \quad \text{ومنه } b = 2a \quad \text{أي } b = 2$$

2- أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ وتفسير النتيجةين بيانيا

$$g(x) = \frac{1 + 2 \ln(2x)}{4x^2} \quad \text{الدالة المعرفة على }]0; +\infty[\text{ ب:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{(2x)^2} = 0 \quad \text{لأن نهاية شهيرة} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(2x)}{(2x)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^2 = 0^+ \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + 2 \ln(2x) = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2 \ln(2x)}{(2x)^2} = -\infty$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

حساب $g'(x)$ ودراسة إشارته

$$g'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot 4x^2 - 8x(1 + 2 \ln(2x))}{(4x^2)^2} = \frac{8x(1 - 1 - 2 \ln(2x))}{16x^4} = -\frac{\ln(2x)}{x^3}$$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $-\ln(2x)$

$$x < \frac{1}{2} \text{ معناه } g'(x) > 0 \text{ و } x > \frac{1}{2} \text{ معناه } g'(x) < 0 , x = \frac{1}{2} \text{ معناه } g'(x) = 0$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\frac{1}{2})$	0

جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

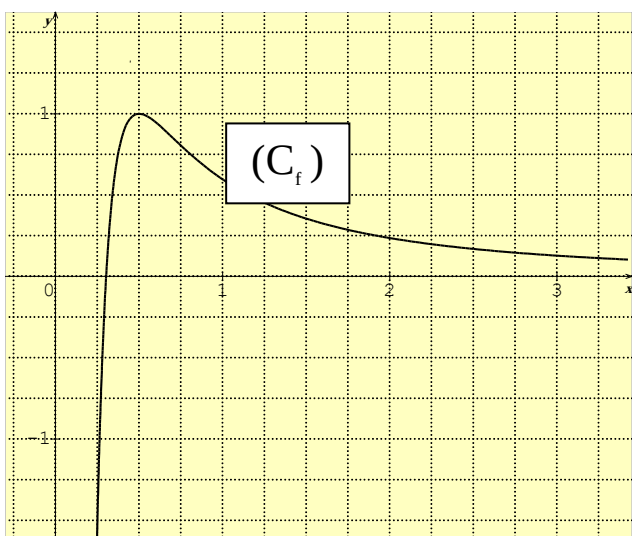
(ج) حل في $]0; +\infty[$ المعادلة: $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0 \text{ معناه } (1 + 2\ln(2x)) = 0$$

$$\text{معناه } \ln(2x) = -\frac{1}{2} \text{ ومعناه } x = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

من الجواب السابق نستنتج أن (C_f) يقطع محور

الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.



التمرين 36: دورة 2010

أ) احساب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

لدينا: دالة معرفة على $[1; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = 2x + \ln x$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ نهاية شهيرة.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g.

لدينا: $g'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ ، نلاحظ أن $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	2	$+\infty$

(ج) تبين أنه من أجل كل $x \in [1; +\infty[: g(x) \neq 0$.

من جدول تغيرات g لدينا صورة المجال $[1; +\infty[$ بالدالة g هو المجال $[2; +\infty[$ أي $g(x) \geq 2$ ومنه من أجل كل $x \in [1; +\infty[: g(x) \neq 0$.

$$f(x) = \frac{6 \ln x}{2 + \frac{\ln x}{x}} \quad \text{أ-2) تبين أن:}$$

$$f(x) = \frac{6 \ln x}{2 + \frac{\ln x}{x}} = \frac{6 \ln x}{\frac{2x + \ln x}{x}} = \frac{6 \ln x}{x} \cdot \frac{x}{2x + \ln x} = \frac{6 \ln x}{2x + \ln x} \quad \text{لدينا:}$$

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ والاستنتاج.

باستعمال العبارة السابقة لـ $f(x)$ نجد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0}{2+0} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ نهاية شهيرة

(ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيرات f .

$$f'(x) = \frac{\frac{6}{x}(2x + \ln x) - (2 + \frac{1}{x})(6 \ln x)}{(2x + \ln x)^2} = \frac{12 + \frac{6 \ln x}{x} - \frac{12 \ln x}{x} - \frac{6 \ln x}{x}}{(2x + \ln x)^2} = \frac{12(1 - \ln x)}{x(2 + \ln x)^2}$$

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	0	$f(e)$	0

من العبارة الأخيرة لـ $f'(x)$ نستنتج أن

إشارته هي حسب إشارة $1 - \ln x$.

$f'(x) = 0$ معناه $x = e$ ، $f'(x) < 0$

معناه $x > e$ و $f'(x) > 0$ معناه $x < e$

وعليه f متزايدة تماماً على $[1; +\infty[$ وجدول تغيراتها هو كالآتي

(د) تعيين قيمة k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متميزين

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن: $0 < f(x) < f(e)$ من أجل كل $x \in [1; +\infty[$

أي $0 < k < f(e)$ ومنه $k \in \left]0; \frac{6}{2e+1}\right]$ لاحظ: $f(e) = \frac{6}{2e+1}$.

هـ) إيجاد معادلة للمماس (Δ_1) لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1.

(Δ_1) له معادلة من الشكل: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه $y = 3(x-1)$ أي $y = 3x - 3$

3-أ) تشكل جدول تغيرات الدالة h .

لدينا: h دالة معرفة على $[1; +\infty[$ ب: $h(x) = f(e^x)$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^x) = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $h(1) = f(e) = \frac{6}{2e+1}$

اتجاه التغير: $h'(x) = e^x f'(e^x) = \frac{12(1-x)}{(2e^x + x)^2}$ وإشارة

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	0	-
$h(x)$	$h(1)$	0

$h'(x) < 0$ لأن $1-x < 0$ على $[1; +\infty[$

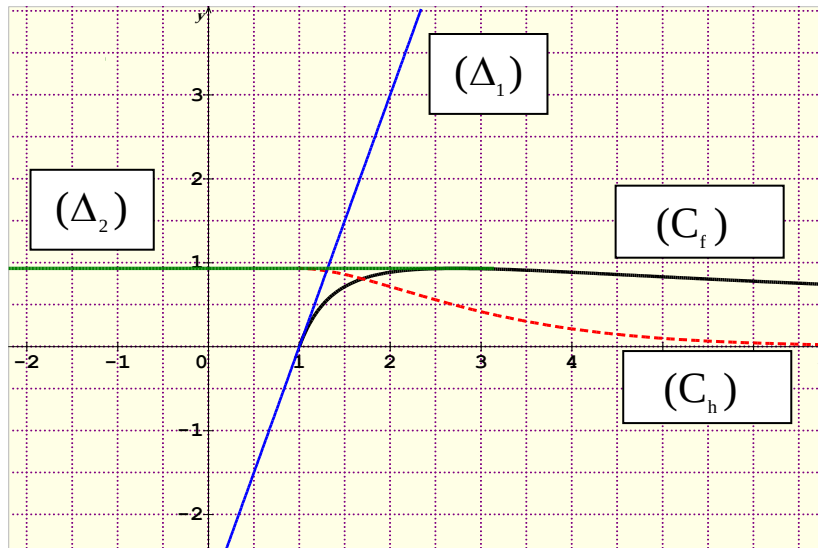
ومنه الدالة h متناقصة تماما على $[1; +\infty[$

جدول التغيرات:

ب) إيجاد معادلة للمماس (Δ_2) لـ (C_h)

(Δ_2) له معادلة من الشكل: $y = h'(1)(x-1) + h(1)$ ومنه $y = 0(x-1) + h(1)$ أي $y = \frac{6}{2e+1}$

ج) رسم كلا من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (C_f) و (C_h) في المعلم السابق.



الجزء الأول: تمارين البكالوريات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 11: دورة 2019

1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وتفسير النتائج بيانيا

لدينا: الدالة f المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \ln x = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \ln x = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + 2 = -\infty$$

** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الفواصل) مقارب لـ (C_f)

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب لـ (C_f)

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2) دراسة اتجاه تغير f على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2} :]0; 2[\cup]2; +\infty[\text{ من اجل كل}$$

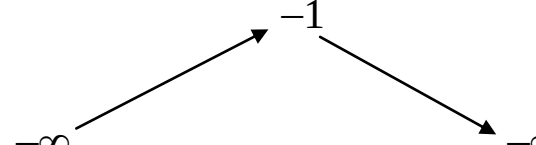
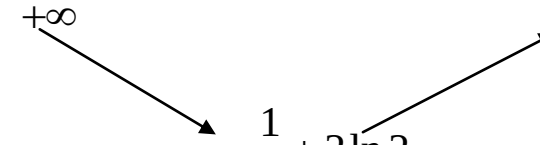
إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - 5x + 4$ لأن المقام موجب تماما

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \text{ معناه } x = 1 \text{ أو } x = 4 \text{ وإشارة } x^2 - 5x + 4 \text{ هي كما يلي}$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0 \text{ معناه }]0; 1[\cup]4; +\infty[\text{ و } x^2 - 5x + 4 < 0 \text{ معناه }]1; 2[\cup]2; 4[$$

$$\text{وعليه } f \text{ متزايدة على }]0; 1[\cup]4; +\infty[\text{ ومتناقصة على المجال }]1; 2[\cup]2; 4[$$

وجداول تغيرات الدالة f يكون كما يلي:

x	0	1	2	4	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)						

3-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ وتفسير النتيجة بيانيا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$ معناه المنحنى (Γ) الممثل للدالة "ln" مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ)

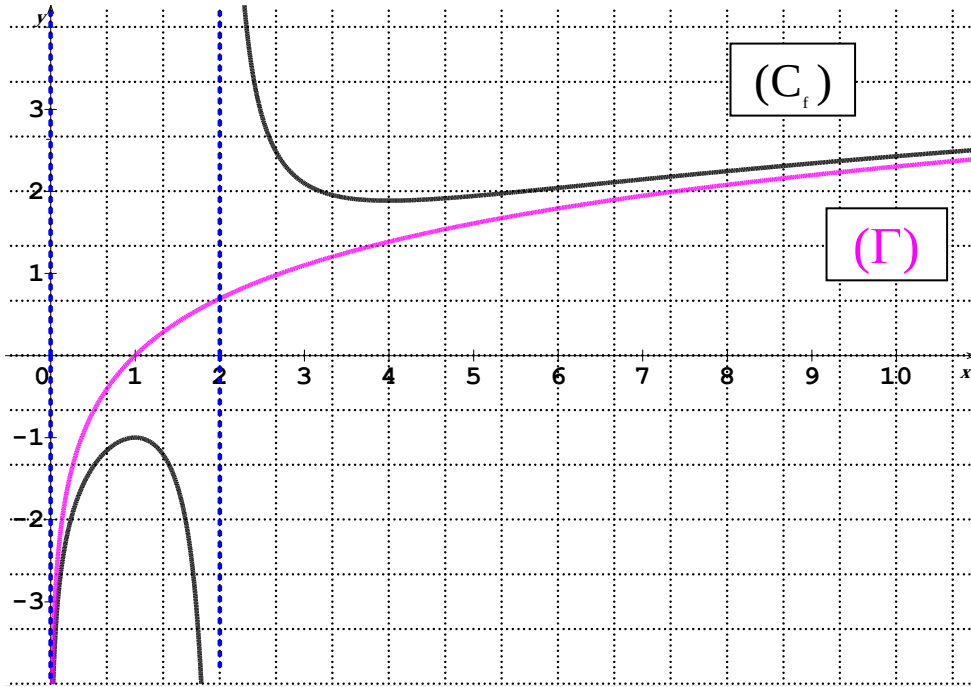
لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة لـ (Γ) ندرس إشارة الفرق $(f(x) - \ln x)$

لدينا: $(f(x) - \ln x) = \frac{1}{x-2}$ وعليه إشارة الفرق هي حسب إشارة $(x-2)$

ومنه : من أجل كل $]0; 2[$ يكون $(x-2) < 0$ ومعناه (C_f) تحت (Γ)

من أجل كل $]2; +\infty[$ يكون $(x-2) > 0$ ومعناه (C_f) فوق (Γ)

4) رسم كلا من المنحنيين (Γ) و (C_f) .



6) تحديد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها

لدينا: دالة معرفة على المجال $] -\infty; -1[\cup] -1; 0[$ ب: $g(x) = f(-2x)$

الدالة g هي تركيب الدالة $x \rightarrow (-2x)$ تألفية متبوعة بالدالة f

وعليه : من أجل كل x من $] -\infty; -1[\cup] -1; 0[$ $g'(x) = -2f'(-2x)$

$g'(x) = 0$ معناه $f'(-2x) = 0$ ومعناه $-2x = 1$ أو $-2x = 4$ أي: $x = -\frac{1}{2}$ و $x = -2$

$g'(x) < 0$ معناه $f'(-2x) > 0$ ومعناه $x \in] -2; -1[\cup] -1; -\frac{1}{2}[$ أي g متناقصة على هذا المجال

$g'(x) > 0$ معناه $f'(-2x) < 0$ ومعناه $x \in] -\infty; -2[\cup] -\frac{1}{2}; 0[$ أي g متزايدة على هذا المجال

التمرين 12: دورة 2018

I- حساب $g(1)$ ثم استنتاج حسب إشارة $g(x)$.

$g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$: ب. $]0; +\infty[$ المجال

لدينا: $g(1) = 0$ ومعناه (C_g) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1

(C_g) فوق حامل محور الفواصل من أجل كل $]0; 1[$ ومعناه $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]0; 1[$

(C_g) تحت حامل محور الفواصل من أجل كل $]1; +\infty[$ ومعناه $g(x) < 0$ من أجل كل $x \in]1; +\infty[$

II- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة ببيان.

$f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$: ب. $]0; +\infty[$ المجال

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ لأن $f(x) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} + \ln x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

التفسير الهندسي

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ معناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (حامل محور الفواصل)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ معناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ (حامل محور الترتيب)

2- أتبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}(1 + x \ln x) - (\ln x + 1)(1 + \ln x)\right)}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (\ln x)^2 - 2 \ln x - 1}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ نفس إشارة $g(x)$ وعليه الدالة f

متزايدة على المجال $]0; 1[$ ومتناقصية على المجال $]1; +\infty[$ وجدول تغيرات الدالة f هو كما يلي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$+\infty$	1	0

3) تبين أن: $y = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس لـ (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل

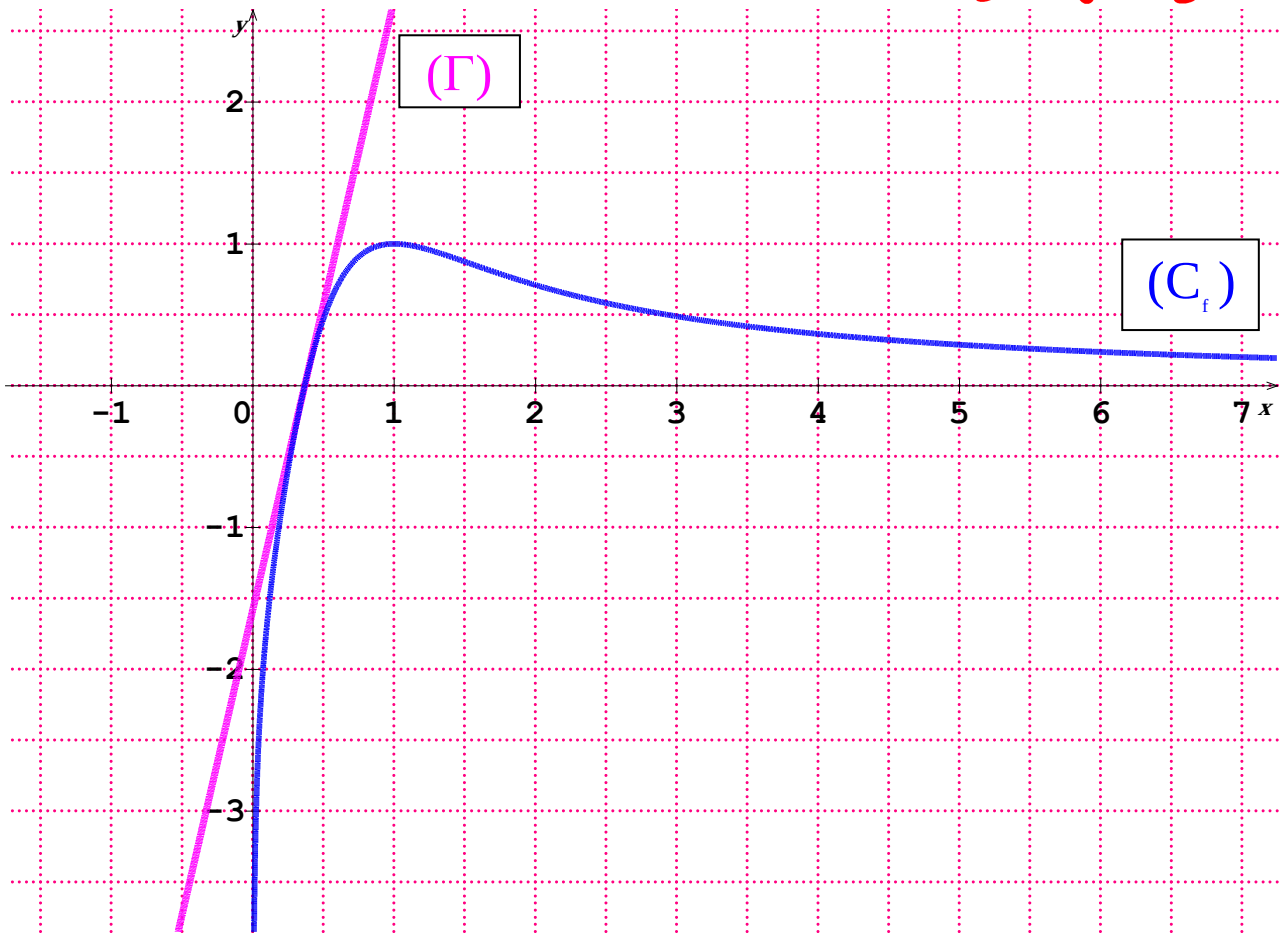
(C_f) يقطع محور الفواصل معناه $f(x) = 0$ ومعناه $1 + \ln x = 0$ أي $x_0 = \frac{1}{e}$

ومنه معادلة المماس (T) عند النقطة x_0 هي: $y = f'(\frac{1}{e})(x - \frac{1}{e}) + f(\frac{1}{e})$

$$f(\frac{1}{e}) = 0 \text{ و } f'(\frac{1}{e}) = \frac{g(e^{-1})}{(1 + e^{-1} \ln e^{-1})^2} = \frac{e-1}{(1-e^{-1})^2} = \frac{e^2}{e-1}$$

$$\text{وعليه: } y = \frac{e^2}{e-1}(x - \frac{1}{e}) = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$$

رسم المماس (T) والمنحنى (C_f)



4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - em$ حلين متميزين.

$$\text{المعادلة } (e-1)f(x) = e^2x - em \text{ تكافئ } f(x) = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}m$$

من اجل $m=1$ نجد: $f(x) = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$ ومعناه $f(x) = y$ حيث $y = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$ معادلة المماس (T)

وعليه المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - em$ تقبل حلين متميزين معناه $m > 1$

1) تبين ان الدالة f فردية وتفسير ذلك بيانيا

لدينا: f دالة معرفة على $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ حيث: $f(x) = \frac{2}{3}(x) + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

تذكير: f دالة فردية معناه من اجل كل $x \in D_f$: $f(-x) + f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= \frac{2}{3}(-x) + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) + \frac{2}{3}(x) + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) : x \in D_f \text{ من اجل كل} \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

التفسير البياني: المنحنى البياني للدالة f يقبل مبدأ الإحداثيات O كمرکز تناظر

2) حساب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0^+ \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{2}{3} + \lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0^- \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{3} + \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln 1 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln 1 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقارب موازيين لحامل محور الترتيب .
من النهايتين السابقتين: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ نستنتج أن يقبل:

* المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = -1$

* المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = 1$

3-أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D : $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D : $f(x) = \frac{2}{3}(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{3} + \frac{3.2}{3(x^2-1)} = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right) \text{ ومنه:}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ موجبة تماما لأن :

إشارة $x^2 - 1$ موجبة على المجال D وكذلك $x^2 + 2$ موجبة من أجل كل عدد حقيقي وعليه الدالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$			$-\infty$ ↗ $+\infty$

4) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

لدينا: $f(1,8) = -0.05 < 0$ و $f(1,9) = 0.08 > 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha) = 0$ حيث $1,8 < \alpha < 1,9$.

3) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

لدينا: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \ln 1 = 0$

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

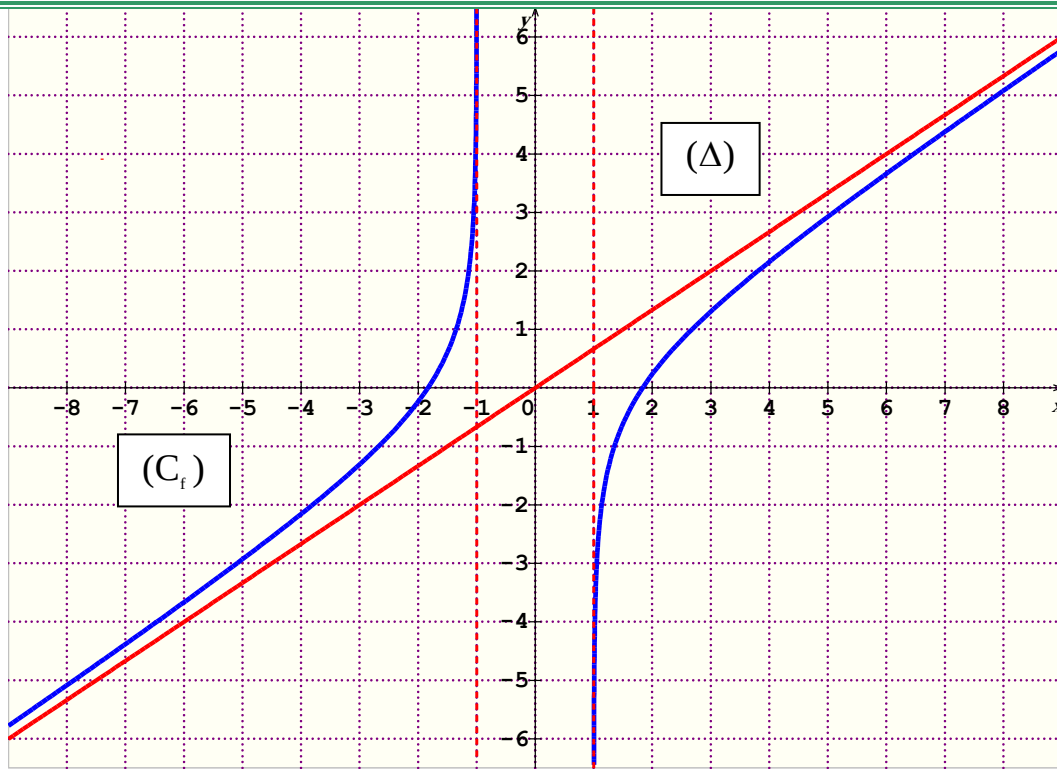
لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$

لدينا: $f(x) - y < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; -1[$ لأن $\frac{x-1}{x+1} < 1$

: $f(x) - y > 0$ من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ لأن $\frac{x-1}{x+1} > 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-			+
الوضع	(C_f) تحت (Δ)			(C_f) فوق (Δ)

6) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)



7 المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $(2 - 3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

نضع: $(2 - 3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \dots (*)$

المعادلة (*) تكافئ $(2 - 3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ وتكافئ $\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = |m|x$

أي $|m|x = f(x)$ وتكافئ بيانيا الجملة التالية: $\begin{cases} y = |m|x \\ y = f(x) \end{cases}$ وعليه حلول المعادلة (*) هي

فواصل نقط تقاطع (C) والمستقيم (Δ_m) ذا المعادلة $y = |m|x$ (مستقيم دوار يشمل المبدأ ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$ المعادلة تقبل حلين . 2) $m \geq \frac{2}{3}$ أو $m \leq -\frac{2}{3}$ المعادلة لاتقبل حلول.

التمرين 14: دورة 2017 الاستدراكية

I- 1) حساب النهايتن التاليتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ ثم تفسير النتيجة بيانيا.

لدينا: الدالة العددية f معرفة على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ كمايلي: $f(x) = \frac{1 + 2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} 1 + 2\ln(2x+1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (2x+1)^2 = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} = 0 \text{ علما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2x+1)^2} + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty \text{ معناه } (C_f) \text{ يقبل مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته } x = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ معناه } (C_f) \text{ يقبل مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل معادلته } y = 0.$$

$$2- \text{أثبت أن من أجل كل } x \text{ من } \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[: f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{2 \frac{2}{(2x+1)} (2x+1)^2 - 4(2x+1)(1+2\ln(2x+1))}{[(2x+1)^2]^2} \text{ لدينا:}$$

$$= \frac{4[1 - (1+2\ln(2x+1))]}{(2x+1)^3} = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

ب-دراسة إتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$$\text{من العبارة } f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3} \text{ نستنتج أن إشارة } f'(x) \text{ هي نفس إشارة } -\ln(2x+1)$$

لدينا: $-\ln(2x+1) = 0$ معناه $x = 0$ وعليه إشارة $f'(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	-

تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$+\infty$	1	0

$$3- \text{حل في المجال } \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ المعادلة } f(x) = 0 \text{ ثم استنتاج إشارة } f(x).$$

$$f(x) = 0 \text{ معناه } 1 + 2\ln(2x+1) = 0 \text{ ومعناه } x = \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{\sqrt{e}})$$

$$f(x) < 0 \text{ معناه } 1 + 2\ln(2x+1) < 0 \text{ ومعناه } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{\sqrt{e}}) \right[$$

$$x \in \left[\frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{e}} \right); +\infty \right[\text{ ومعناه } 1 + 2\ln(2x+1) > 0 \text{ ومعناه } f(x) > 0$$

ملاحظة: لتعيين إشارة $f(x)$ يمكن استعمال جدول تغيرات الدالة f .

4) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω وتعيين إحداثياتها

(C_f) يقبل نقطة إنعطاف $\omega(x_0; y_0)$ معناه المشتقة الثانية f'' تنعدم عند x_0 مغيرة اشارتها عندها

$$f''(x) = \frac{\frac{(-8)2}{2x+1} (2x+1)^3 - 6(2x+1)^2 (-8\ln(2x+1))}{(2x+1)^6} = \frac{16[-1+3\ln(2x+1)]}{(2x+1)^4} \text{ لدينا:}$$

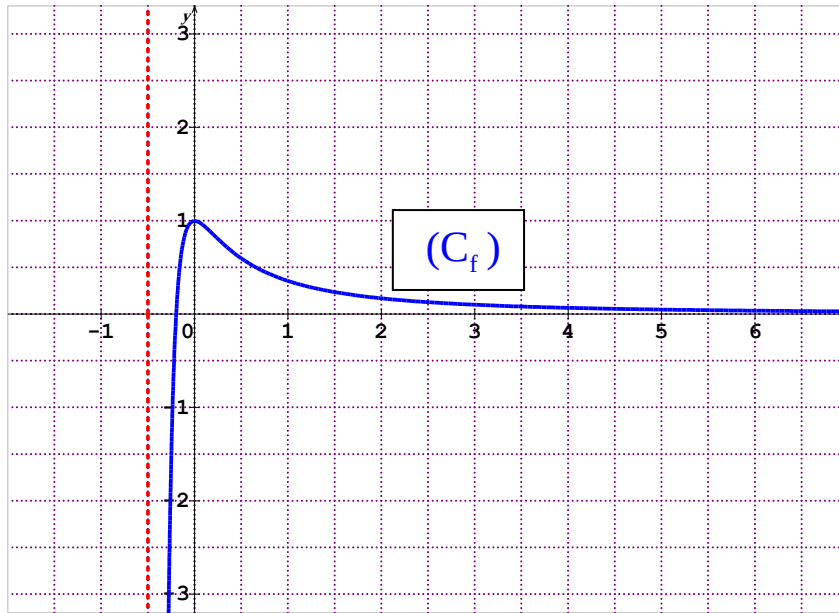
إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $(-1+3\ln(2x+1))$ والموضحة كما يلي:

$$(-1+3\ln(2x+1)) = 0 \text{ معناه } x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt[3]{e}) \text{ نلخص إشارة } f''(x) \text{ كالتالي}$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}(-1 + \sqrt[3]{e}); +\infty \right[\text{ معناه } f''(x) > 0, \quad x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}(-1 + \sqrt[3]{e}) \right[\text{ معناه } f''(x) < 0$$

نسنتج مما سبق أن النقطة $\omega(x_0; y_0)$ حيث $y_0 = f(x_0) = \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}$ نقطة انعطاف لـ (C_f) .

إنشاء المنحنى (C_f)



II-1-أ) دراسة إتجاه تغير الدالة g .

$$\text{الدالة العددية } g \text{ معرفة على } \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ كمايلي: } g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$$

دراسة إتجاه تغير الدالة g معناه حساب عبارة الدالة المشتقة $g'(x)$ وتعيين اشارتها

$$\text{لدينا: } g'(x) = 2 \left[-1 + \frac{2}{2x+1} \right] = 2 \left(\frac{-2x+1}{2x+1} \right)$$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $-2x+1$ وهي كمايلي:

$$x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\text{معناه } g'(x) < 0 \text{ و } x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[\text{معناه } g'(x) > 0 \text{ و } x = \frac{1}{2} \text{ معناه } g'(x) = 0$$

(ب) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$.

* الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ ولدينا: $g(1,2) = 0,047$ و $g(1,3) = -0,03$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $1,2 < \alpha < 1,3$

* المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل معدوم لأن $g(0) = 0$

استنتاج إشارة $g(x)$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in \left] -\frac{1}{2}; 0 \right[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن $g(x) < 0$

ومن أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن $g(x) > 0$

التمرين 15: دورة 2016

I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g

لدينا: الدالة g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

حساب $g'(x)$ ودراسة اشارته استنتاج اتجاه تغير الدالة g

$$\text{لدينا: } g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

لدينا: $g'(x) = 0$ معناه $2x^2 - 1 = 0$ ومعناه $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ مرفوض

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	-	0	+
اتجاه تغير g	متزايدة تماما		متناقصة تماما

2) حساب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ وتبين أن $g(x) > 0$ من أجل كل عدد $x \in]0; +\infty[$

$$\text{لدينا: } g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$$

من خلال اتجاه تغير g والقيمة الحدية المحلية الصغرى $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$

نستنتج أن $g(x) > 0$ من أجل كل عدد $x \in]0; +\infty[$

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ نهاية شهيرة لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$

2-أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

لدينا: $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' + 1 = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) كتابة معادلة المماس (T)

(T) له معادلة من الشكل: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ومنه: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه: $y = 2x - 2$

4-أ) تبيان أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل Δ حيث: $y = x - 1$ معادلة له

المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C) معناه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ نهاية شهيرة

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C) و Δ

لدراسة الوضع النسبي لـ (C) و Δ ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = \frac{\ln x}{x}$

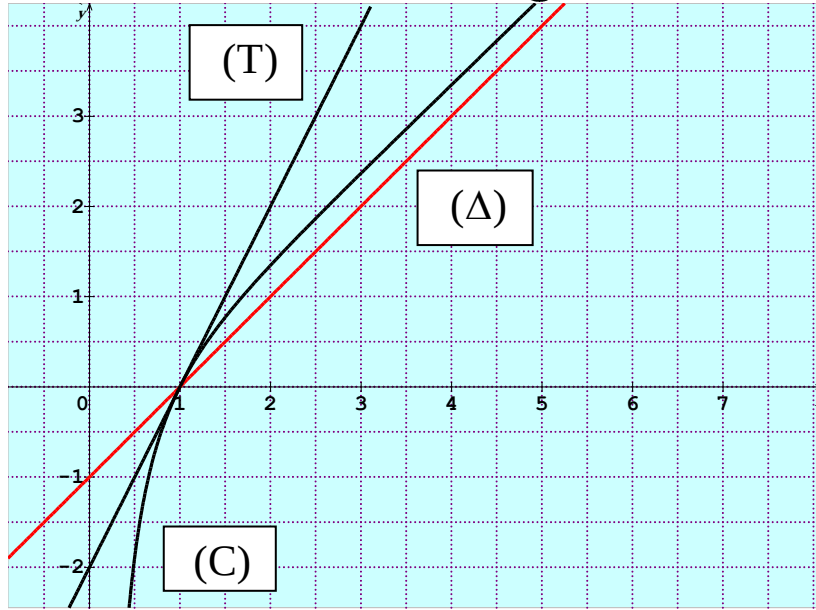
إشارة الفرق هي حسب إشارة $\ln x$ وهي حسب الجدول التالي

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع	(C) تحت Δ	(C) يقطع Δ	(C) فوق Δ

5) رسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحني (C)

(T) يشمل النقطة $A(1;0)$ شعاع توجيه له $\vec{u}(1;2)$

(Δ) يشمل النقطة $A(1;0)$ شعاع توجيه له $\vec{v}(1;1)$



6-أ) اثبات ان النقطة $A(1;0)$ تنتمي للمستقيم (Δ_m)

النقطة $A(1;0) \in (\Delta_m)$ لأن الثنائية $(1;0)$ تحقق صحة المعادلة $y = mx - m$.
من العبارة $y = mx - m$ أي $y = m(x - 1)$ نستنتج ان جميع المستقيمت (Δ_m) تمر من نقطة وحيدة هي النقطة $A(1;0)$.

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

لدينا: $f(x) = mx - m$ تكافئ الجملي التالية: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx - m \end{cases}$ وعليه حلول المعادلة

$f(x) = mx - m$ هي فواصل نقط تقاطع (C) والمستقيم (Δ_m) (مستقيم دوار يشمل النقطة $A(1;0)$) ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $m \leq 1$ المعادلة تقبل حلا وحيد ، 2) $1 < m < 2$ المعادلة تقبل حلين .

3) $m = 2$ المعادلة تقبل حلا مضاعف ، 4) $m > 2$ المعادلة تقبل حلا وحيد .

التمرين 16: دورة 2016 الاستدراكية

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها

لدينا: الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$
حساب النهايات عند -1 وعند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)e = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} 2\ln(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$$

حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

$$g'(x) = e + \frac{2}{x+1} > 0 \text{ لأنه } x \in]-1; +\infty[\text{ ومنه } g \text{ متزايدة تماما على }]-1; +\infty[$$

جدول تغيرات الدالة g

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

لدينا: $g(-0,34) = -0,03$ و $g(-0,33) = 0,02$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-1; \alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) > 0$

II-1-أ) تبين أن: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ وحساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسيا

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e(x+1) + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \ln(x+1) = +\infty(-\infty) = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \left[e + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} \right] = 0 \text{ لاحظ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} = 0 \text{ (ن ش)}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب هو حامل محور الفواصل (معادلته $y = 0$)

ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e}{x+1} \right)' + \left(\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right)' = -\frac{e}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} (x+1)^2 - 2(x+1) \ln(x+1) \\ &= -\left[\frac{e(x+1)}{(x+1)^3} - \frac{1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \right] = -\left[\frac{-1+e(x+1)+2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \right] = -\frac{g(x)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

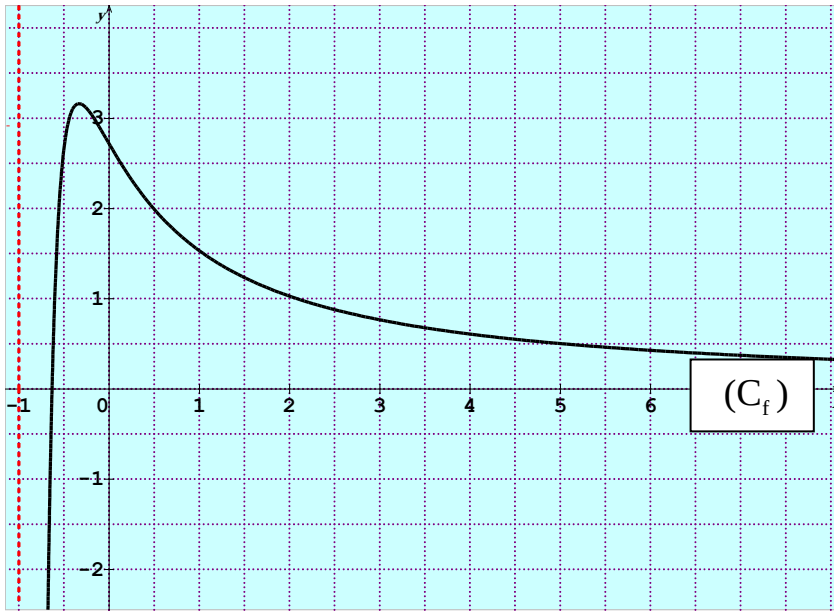
ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $-g(x)$

وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$-\infty$	$f(\alpha)$
			0

(د) رسم المنحنى (C_f)



3-أ) تبين أن الدالة k زوجية

لدينا : الدالة k معرفة على المجال $]-1; +1[$ ب: $k(x) = f(-|x|)$

الدالة k زوجية معناه من أجل كل $x \in]-1; +1[$ و $-x \in]-1; +1[$ $k(-x) = k(x)$

لدينا: $k(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = k(x)$ لأن $|-x| = |x|$ ومنه k زوجية

ب) تبين كيفية استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقاً من المنحنى (C_f) ثم رسم (C_k)

عبارة $k(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة هي كمايلي:

$$k(x) = \begin{cases} f(x); & -1 < x \leq 0 \\ f(-x); & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

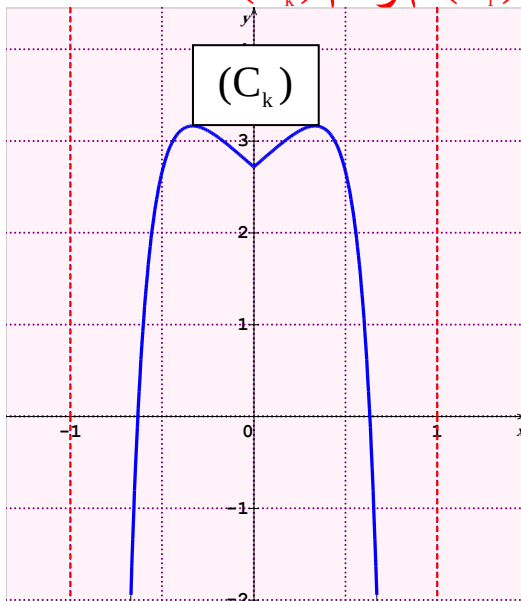
وعليه : $x \in]-1; 0]$ معناه (C_k) ينطبق على (C_f)

$x \in [0; 1[$ معناه (C_k) نظير (C_f)

بالنسبة لحامل محور الترتيب (لأن k زوجية)

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $k(x) = m$

لدينا: $k(x) = m$ تكافئ الجملي التالية : $\begin{cases} y = k(x) \\ y = m \end{cases}$



إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

وعليه حلول المعادلة $k(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_k) والمستقيم (Δ_m) (مستقيم يوازي حامل محور الفواصل) من البيان (C_k) نميز الحالات التالية:

- 1) $m < e$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة، $m = e$ المعادلة تقبل مضاعف معدوم.
- 3) $e < m < k(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين سالبين وحلين موجبين
- 4) $m = k(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين مضاعفين مختلفين في الإشارة
- 5) $m > k(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول.

التمرين 17: دورة 2015

I-1) تحديد وضعية المنحنى (γ) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

من البيان نلخص وضعية المنحنى (γ) بالنسبة للمستقيم (Δ) كمايلي:

- من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ يكون (γ) تحت (Δ)
- من أجل $x = \alpha$ يكون (γ) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة α .
- من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ يكون (γ) فوق (Δ)

2) استنتاج إشارة $g(x)$ وذلك حسب قيم x

لدينا: $g(x) = \ln x - (-x + 3)$ من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

- من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ تكون إشارة $g(x)$ سالبة
- من أجل $x = \alpha$ تكون إشارة $g(x)$ معدومة
- من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ تكون إشارة $g(x)$ موجبة.

3) التحقق أن : $2, 2 < \alpha < 2, 3$

g مستمرة (مجموع دالتين مستمرتين) ومتزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ لأن: $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ و $g(2; 2) = -0, 01$ و $g(2; 3) = 0, 13$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن: $2, 2 < \alpha < 2, 3$.

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (\ln x - 2) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (1 - \frac{1}{x}) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2) = +\infty$

2) إثبات أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln x - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(\ln x - 2) + (x - 1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$.
وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كالآتي.

(3) $f(\alpha) = \frac{-(1-\alpha)^2}{\alpha}$ واستنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$

* لدينا: $f(\alpha) = (1 - \frac{1}{\alpha})(\ln \alpha - 2)$ لكن $g(\alpha) = 0$ ومنه $\ln \alpha = 3 - \alpha$

ومنه: $f(\alpha) = (1 - \frac{1}{\alpha})(3 - \alpha - 2) = \frac{(\alpha - 1)(1 - \alpha)}{\alpha} = \frac{-(\alpha - 1)^2}{\alpha}$

(1) $2 < \alpha < 3$ تكافئ $1 < \alpha - 1 < 2$ تكافئ $(1, 2)^2 < (\alpha - 1)^2 < (2, 3)^2$

من (1) و (2) نجد: $\frac{(1, 2)^2}{2; 3} < \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} < \frac{(2, 3)^2}{2; 2}$ وأخيرا: $-0; 66 < f(\alpha) < -0; 73$

(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ندرس إشارة $f(x)$

$f(x) = 0$ معناه $(1 - \frac{1}{x})(\ln x - 2) = 0$ معناه $(\ln x - 2) = 0$ أو $(x - 1) = 0$

$(\ln x - 2) = 0$ تكافئ $x = e^2$ و $(x - 1) = 0$ تكافئ $x = 1$ وعليه إشارة $f(x)$ تكون كمايلي:

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x - 2$	-	-	+	+
$x - 1$	-	+	+	+
$f(x)$	+	-	+	+

من الجدول السابق نستنتج أن:

من أجل كل $x \in]0; 1[\cup]e^2; +\infty[$

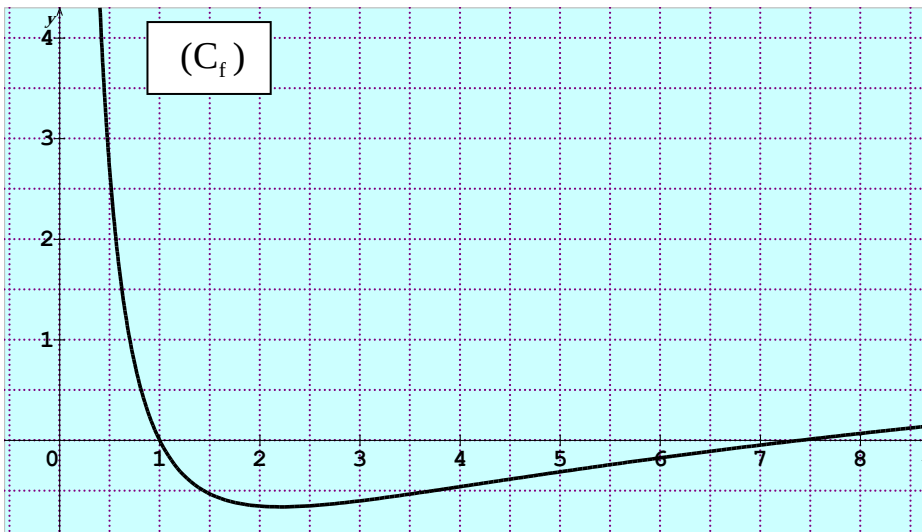
يكون (C_f) فوق حامل محور الفواصل

من أجل $x = 1$ أو $x = e^2$

يكون (C_f) يقطع محور الفواصل في القطين اللتين فاصلتهما $x = 1$ أو $x = e^2$.

من أجل كل $x \in]1; e^2[$ يكون (C_f) تحت حامل محور الفواصل.

إنشاء (C_f) في المجال $]0; e^2]$



التمرين 18: دورة جوان 2014

1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty: \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0: \text{ نهاية شهيرة لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 1$$

التفسير الهندسي

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ معناه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته: $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ معناه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته: $y = 1$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها.

$$f'(x) = 2 \frac{\left(\frac{1}{x} \cdot x - 1 \ln x\right)}{x^2} = 2 \frac{(1 - \ln x)}{x^2} \text{ و }]0; +\infty[\text{ الدالة } f \text{ قابلة للإشتقاق على المجال}$$

x	0	e	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)			

$f'(x) = 0$ معناه $1 - \ln x = 0$ ومنه $x = e$

$f'(x) < 0$ معناه $1 - \ln x < 0$ ومنه $x > e$

و $f'(x) > 0$ معناه $1 - \ln x > 0$ ومنه $x < e$

وعليه يكون جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

2-أ) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = 2 \frac{\ln x}{x}$ حيث $y = 1$

$f(x) - y = 0$ معناه $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$ معناه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيين (1;1)

$f(x) - y < 0$ معناه $\ln x < 0$ ومنه $x \in]0; 1[$ معناه (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

$f(x) - y > 0$ معناه $\ln x > 0$ ومنه $x \in]1; +\infty[$ معناه (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

ب) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 1.

معادلة المماس (T) هي: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه: $y = 2(x - 1) + 1$ أي: $y = 2x - 1$

ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0 < \alpha < 1$

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; e[$ و $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$ لأن: $f(e^{-0.4}) = -0,2$ و $f(e^{-0.3}) = 0,2$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha \in]e^{-0.4}; e^{-0.3}[$ يحقق $g(\alpha) = 0$

3) إنشاء (T) و (C_f) (تجد الرسم في آخر الحل)

4-أ) تبين أنه من أجل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$ والاستنتاج.

$$h(x) - h(-x) = 1 + 2 \frac{\ln|x|}{|x|} - 1 - 2 \frac{\ln|-x|}{|-x|} = 2 \frac{\ln|x|}{|x|} - 2 \frac{\ln|x|}{|x|} = 0 : x \in \mathbb{R}^*$$

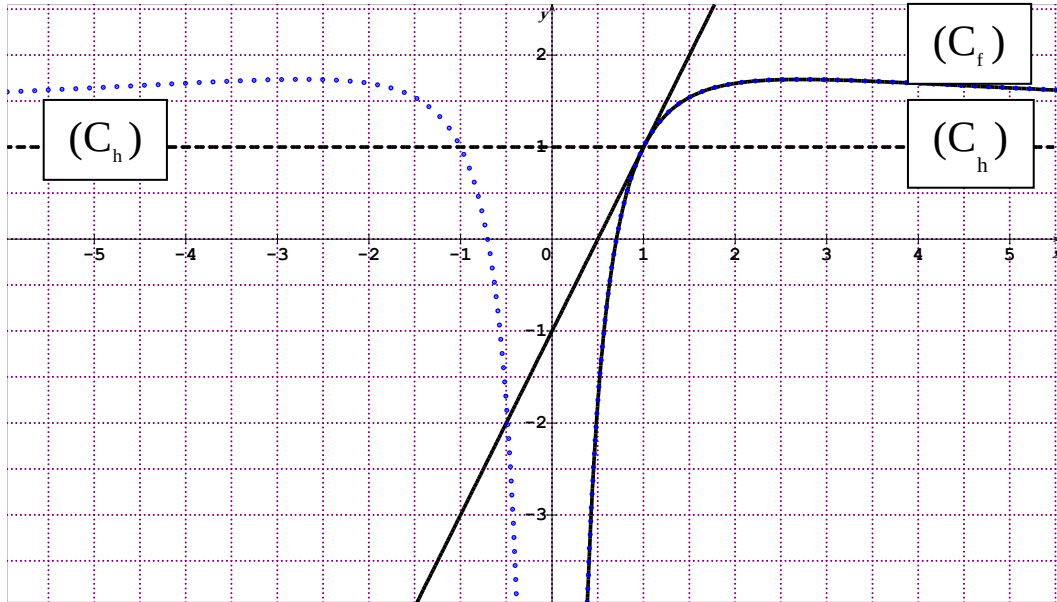
الاستنتاج من العبارة $h(x) - h(-x) = 0$ أي $h(x) = h(-x)$ نستنتج أن الدالة h زوجية

ب) إنشاء المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .

لدينا: $h(x) = f(x)$ معناه $(C_h) = (C_f)$ على المجال $x \in]0; +\infty[$.

$h(x) = f(-x)$ معناه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب $x \in]-\infty; 0[$.

ب) إنشاء (T) و (C_f) والمنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .



ج) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$

من أجل عدد حقيقي x غير معدوم المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$ تكافئ $m = h(x)$

وتكافئ : $\begin{cases} y = m \\ y = h(x) \end{cases}$ من الجملة السابقة نستنتج أن حلول المعادلة $\ln x^2 = (m-1)|x|$ بيانيا

هي فواصل نقط تقاطع (C_h) والمستقيم $y = m$ (Δ_m) معادلته من البيان لدينا:

(1) $m \leq 1$ معناه المعادلة تقبل حلين . (2) $1 < m < h(e)$ معناه المعادلة تقبل اربعة حلول .

(3) $m = h(e)$ معناه المعادلة تقبل حلين . (4) $m > h(e)$ معناه المعادلة لاتقبل حلول

التمرين 19: دورة جوان 2013

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها

$$g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1) \quad \text{و} \quad x \in]-1; +\infty[$$

حساب النهايات

$$\text{ح ع ت} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2\ln(x+1)) = +\infty$$

$$\text{ازالة ح ع ت} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(\frac{x^2}{(x+1)} - 2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-2\ln(x+1)) = -2(-\infty) = +\infty$$

اتجاه التغير

$$g'(x) = 2(x+1) - \frac{2}{(x+1)} = \frac{2[(x+1)^2 - 1]}{(x+1)} = \frac{2x(x+2)}{x+1} : x \in]-1; +\infty[$$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة x على $]-1; +\infty[$

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

جدول التغيرات

2- استنتاج أن $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$

الدالة g تقبل 4 كقيمة حدية صغرى أي $g(x) \geq 4$

من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ إذن: $g(x) > 0$

II-1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانياً

$$\text{لدينا} \quad f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} \quad \text{و} \quad x \in]-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \quad \text{معناه المستقيم ذي المعادلة: } x = -1 \text{ مقارب عمودي لـ } (C_f)$$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

$$\text{2-أ) تبين أنه من أجل كل } x \in]-1; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{-2}{(x+1)}(x+1) - 1(1 - 2\ln(x+1))}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$ أي $f'(x) > 0$

(ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و }]-1; +\infty[$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد

وحيد $\alpha \in]-1; +\infty[$ حيث $f(\alpha) = 0$

التحقق أن: $0 < \alpha < 0,5$

لدينا: $f(0) = -1$ و $f(0,5) = 0,37$ أي: $f(0) < 0 < f(0,5)$ ومنه $0 < \alpha < 0,5$

3- (أ) تبين أن المستقيم $(\Delta): y = x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

$(\Delta): y = x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

(ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة على (Δ)

$$\text{ندرس إشارة الفرق } f(x) - x = -\frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$$

$$f(x) - x = 0 \text{ معناه } 1 - 2\ln(x+1) = 0 \text{ معناه } x = \sqrt{e} - 1$$

$$\text{و } x \in]-1; \sqrt{e} - 1[\text{ معناه } f(x) - x < 0 \text{ و } x \in]\sqrt{e} - 1; +\infty[\text{ معناه } f(x) - x > 0$$

وعليه: (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e} - 1$

$$(C_f) \text{ تحت } (\Delta) \text{ في المجال }]-1; \sqrt{e} - 1[\text{ و } (C_f) \text{ فوق } (\Delta) \text{ في المجال }]\sqrt{e} - 1; +\infty[$$

4- (أ) حساب x_0 فاصلة نقط التماس لـ (C_f) و (T)

$$\text{لدينا: معادلة هي: } y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}} \text{ و } (T) \text{ مماس لـ } (C_f) \text{ معناه } f'(x_0) = 1$$

$$f'(x_0) = 1 \text{ معناه } \frac{g(x_0)}{(x_0 + 1)^2} = 1 \text{ معناه } g(x_0) = (x_0 + 1)^2 \text{ ومنه } x_0 = e\sqrt{e} - 1$$

(ب) رسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) و (C_f) في آخر الحل

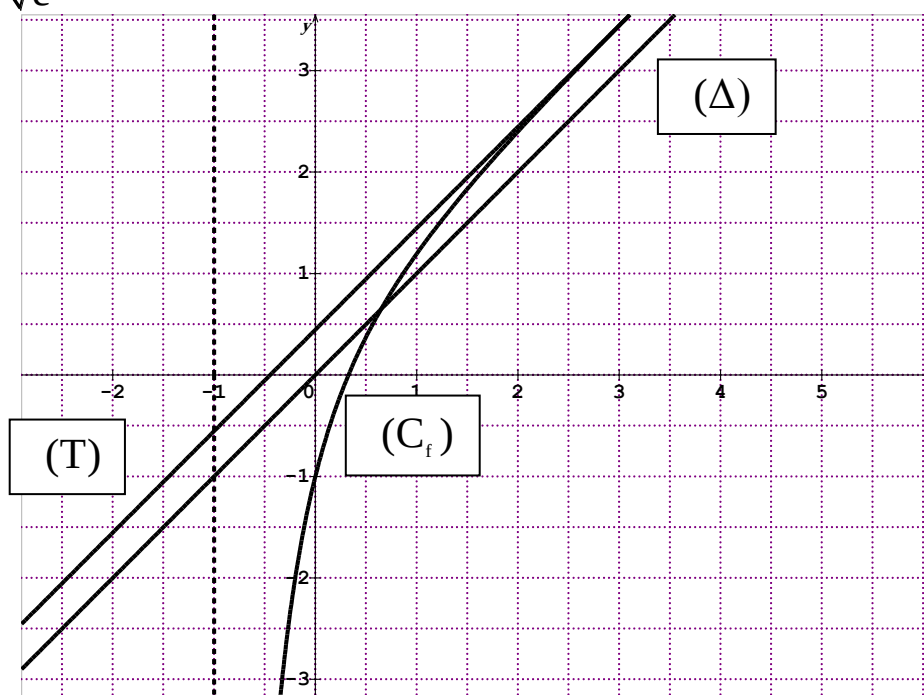
(ج) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m بيانيا حتى تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين

$$\text{المعادلة } f(x) = x + m \text{ تكافئ } \begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases} \text{ حيث } y = x + m \text{ معادلة مستقيم } (\Delta_m) \text{ ميله } 1$$

و $y = f(x)$ معادلة المنحنى (C_f)

$$\text{الحالة 1: } m = 0 \text{ يكون } (\Delta_m) = (\Delta) \text{ ، الحالة 2: } m = \frac{2}{\sqrt{e^3}} \text{ يكون } (\Delta_m) = (T)$$

وعليه نجد من البيان يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلان متميزان معناه $0 < m < \frac{2}{\sqrt{e^3}}$



التمرين 20: دورة جوان 2012

1) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 0} 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} (x+5) = 5 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5+6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)) = -\infty$$

2) تبين أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$: $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$

$$\text{لدينا: } f(x) = x + 5 + 6((\ln|x| - \ln|(x-1)|)) \text{ ومنه: } f'(x) = 1 + 6\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)} = 0 \text{ معناه } x^2 - x - 6 = 0 \text{ معناه } x = -2 \text{ أو } x = 3 \text{ مرفوض}$$

x	-	∞	-2	0
f'(x)		+	0	-

ومنه إشارة $f'(x)$ تكون كالآتي:

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$	$-\infty$

لدينا: $f(-2) = 3 - 6\ln(2) + 6\ln 3 = 0,56$

3-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته

$y = x + 5$ هو مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = 6 \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x}{x-1} = 0$

ومنه: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

لدينا: $(f(x) - y) = 6 \ln \frac{x}{x-1}$ ولدينا من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ $\frac{x}{x-1} \leq 1$

ومنه $\ln \frac{x}{x-1} \leq 0$ أي الفرق $(f(x) - y) < 0$ وعليه يكون (C_f) تحت (Δ)

4) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β

لدينا الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-2; 0[$ و $f(-1,1) = 0,02$ و $f(-1) = -0,15$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β يحقق $f(\beta) = 0$

لدينا الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -2[$ و $f(-3,5) = 1,33$ و $f(-3,4) = -0,15$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق $f(\alpha) = 0$.

5) إنشاء (C_f) و (Δ) .

6-أ) تبيان أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln \frac{3}{4}$ هي معادلة (AB)

لدينا $y_A = \frac{1}{2}x_A + \frac{7}{2} + 6\ln \frac{3}{4} = 3 + 6\ln \frac{3}{4}$

$y_B = \frac{1}{2}x_B + \frac{7}{2} + 6\ln \frac{3}{4} = \frac{5}{2} + 6\ln \frac{3}{4}$

ومنه $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln \frac{3}{4}$ هي معادلة (AB)

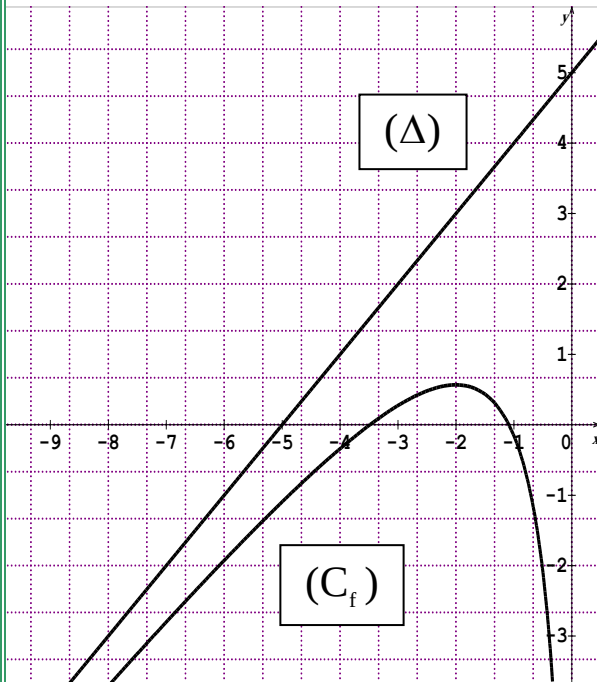
ب) تبيان أن M_0 يمس (C_f) في نقطة

M_0 يمس (C_f) معناه $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ حيث x_0 فاصلة M_0

$f'(x_0) = \frac{1}{2}$ معناه $\frac{x_0^2 - x_0 - 6}{x_0(x_0 - 1)} = \frac{1}{2}$

معناه $2x_0^2 - 2x_0 - 12 = x_0^2 - x_0 - 12 = 0$ ومنه: $x_0 = -3$ أو $x_0 = 4$ مرفوض

ولدينا $f(-3) = 2 + 6\ln \frac{3}{4}$ أي $M_0(-3; f(-3))$



التمرين 21: دورة جوان 2011

X	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$\nearrow$ $1 \rightarrow +\infty$		$\nearrow$ $-\infty \rightarrow 1$

I) بقراءة بيانية

أ) تشكيل جدول التغيرات للدالة g .

ب) حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$

من البيان $g(x) > 0$ تكافئ $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

ج) تعيين بيانيا قيم x والتي من أجلها يكون $0 < g(x) < 1$

من البيان لدينا: $0 < g(x) < 1$ تكافئ $x \in]1; +\infty[$

1-II) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 + 0 = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 - \infty = -\infty$$

التفسير الهندسي للنتيجتين

$(C_f)^*$ يقبل مقارب عمودي معادلته هي $x = 1$ و $(C_f)^*$ يقبل مقارب أفقي معادلته هي $y = 1$

2-I) تبين أن $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ من أجل كل $x \in]1; +\infty[$

$$g'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب) حساب $f'(x)$ ودراسة اشارتها وتشكيل جدول تغيراتها

$$f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} > 0 \quad \text{ولدينا: } f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

ومن الدالة f متزايدة تماما من أجل كل $x \in]1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

ج- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و

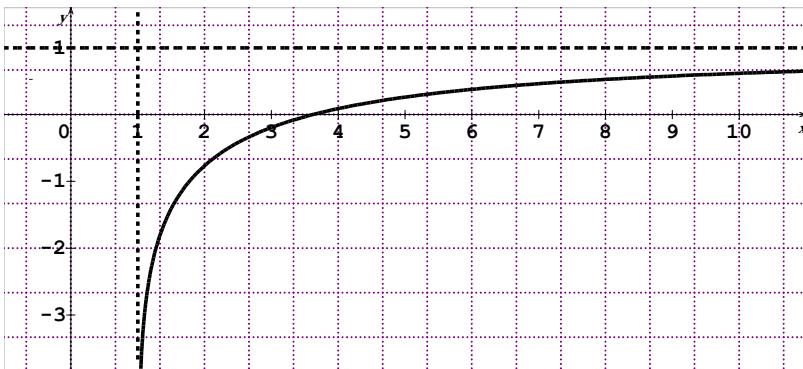
$$f(3,62) < 0 \quad \text{و} \quad f(3,63) > 0 \quad \text{ومنه وحسب مبرهنة القيم}$$

المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_0

حيث $x_0 \in]3,62; 3,63[$ يحقق $f(x_0) = 0$

د- رسم (C_f) .

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\nearrow$ $-\infty \rightarrow 1$	



3-أ) تعيين إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$

من الجزء I-ج) $g(x) < 1$ ومنه: $\ln[g(x)] < \ln 1$ أي: $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$

التمرين 22: دورة جوان 2010

I-1-أ) حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \ln(2x-1) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x-1) = +\infty$$

2) تبين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال I وتشكيل جدول التغيرات للدالة f

x	0,5	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		$+\infty$

$$f'(x) = 0 + \frac{2}{2x-1} > 0 \quad \text{لأن} \quad x > \frac{1}{2}$$

ومن الدالة f متزايدة تماماً على المجال I لأن $f'(x) > 0$.

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس يوازي (d)

$$(d) \text{ يوازي المماس معناه } f'(x_0) = 1 \text{ ومنه } x_0 = \frac{3}{2}$$

4-أ) إثبات أنه من أجل كل $x \in I$: $f(x) = \ln(x+a) + b$

$$f(x) = 1 + \ln(2x-1) = 1 + \ln\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = 1 + \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

ب) استنتاج رسم (C_f) انطلاقاً من (C) منحنى الدالة $\ln$

من العبارة $f(x) = 1 + \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$ نستنتج أن (C_f) صورة (C) بانسحاب شعاعه $\vec{V}\left(\frac{1}{2}; 1 + \ln 2\right)$

رسم (C_f) و (C) (في الجزء الثاني)

$$1-II) \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) \text{ وتبين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (f(x) - x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x-1} = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) \left[-\frac{x}{2x-1} + \frac{\ln(2x-1)}{2x-1} \right] = -\infty$$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{2x-1} - 1 = \frac{-2x+3}{2x-1}$$

و إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-2x+3$

جدول تغيرات الدالة g

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

لدينا: $g\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \ln(2) - \frac{3}{2} = 0,9$

3-أ) حساب $g(1)$ وتبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

لدينا: $g(1) = f(1) - 1 = 1 + \ln 1 - 1 = 0$

لدينا الدالة متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ و $g\left(\frac{3}{2}\right) = 0,9$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

لدينا: $g(2) = f(2) - 2 = -1 + \ln 3 = 0,38$ و $g(3) = f(3) - 3 = -2 + \ln 5 = -0,39$

التحقق أن $2 < \alpha < 3$

بما أن $g(3) < 0 < g(2)$ فإن $2 < \alpha < 3$.

ب) رسم المنحنى (C_g) على المجال $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

4) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال I.

من البيان أو جدول تغيرات الدالة g لدينا إشارة $g(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	$\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$	
g (x)	-	0	+	0	-

تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (d)

لدراسة وضعية (C_f) و (d) ندرس إشارة الفرق $f(x) - y = g(x)$ وهي حسب إشارة $g(x)$ إذا كانت $\alpha; +\infty[\cup]0,5; 1[$ فإن (C_f) تحت (d) وإذا كانت $\alpha; 1[$ فإن (C_f) فوق (d) إذا كانت $x = 1$ أو $x = \alpha$ فإن (C_f) يقطع (d).

5) البرهان أنه من أجل كل $x \in]1; \alpha[$ فإن $f(x) \in]1; \alpha[$.

لدينا: $g(1) = g(\alpha) = 0$ ومنه $f(1) = 1$ و $f(\alpha) = \alpha$

ولدينا: f متزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$ ومنه $f(1) < f(x) < f(\alpha)$ إذن: $1 < f(x) < \alpha$.

الجزء الأول:

1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

$$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1) \text{ معرفة على }]-1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (1 - 2 + \ln(x+1)) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = +\infty$$

2) تبين أن: $h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1} \text{ لدينا:}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة h وتشكيل جدول تغيراتها
بما أن: $x > -1$ فإن $h'(x) > 0$ ومنه h متزايدة تماماً

3) حساب $h(0)$ واستنتاج إشارة $h(x)$

$h(0) = 0$ وإشارة $h(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

ب) البرهان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

نضع: $t = \ln u$ ومنه $u = e^t$ إذا كان $u \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0 \text{ ومنه:}$$

ج) استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty - 0 = +\infty \text{ لدينا:}$$

د) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0 \text{ لدينا:}$$

استنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$ ومنه (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y = x - 1$ في جوار $+\infty$

هـ) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - (x-1)] = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1 > 0$

$-\ln(x+1) = 0$ معناه $\ln(x+1) = 0$ أي: $x = 0$ معناه (C_f) يقطع المقارب المائل في النقطة $(0; -1)$

$-\ln(x+1) \geq 0$ معناه $\ln(x+1) \leq 0$ أي: $-1 < x \leq 0$ معناه (C_f) فوق المقارب المائل

$-\ln(x+1) \leq 0$ معناه $\ln(x+1) \geq 0$ أي: $x \geq 0$ معناه (C_f) تحت المقارب المائل

2) تبين أن $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \frac{(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

تشكيل جدول التغيرات

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $h(x)$

جدول التغيرات

x	-1	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

3) تبين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم: $y = 2$

(C_f) يقطع المستقيم: $y = 2$ معناه المعادلة $f(x) = 2$

تقبل حالا وحيدا α محصورا بين 3,3 و 3,4

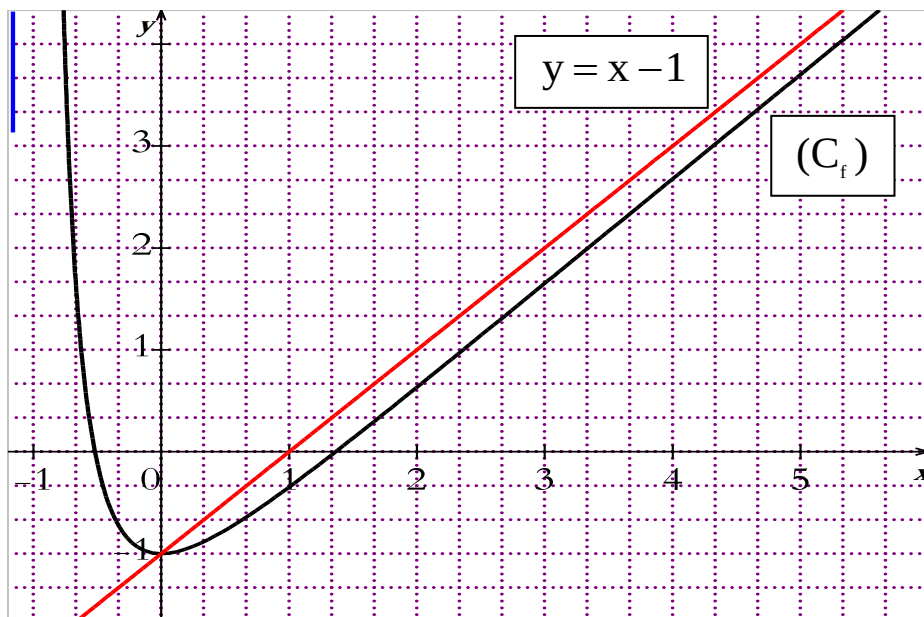
f متزايدة على المجال $[3,3; 3,4]$

ولدينا: $f(3,3) = 1,96$ و $f(3,4) = 2,06$

ونلاحظ أن: $f(3,3) < 2 < f(3,4)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $f(\alpha) = 2$

4) رسم المنحنى (C_f)



I- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ، ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

g الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ب:

$$g(x) = (x+1)(x+e) - e(x \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = e \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ نهاية شهيرة ، } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)(x+e) = e$$

بأن g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = e$ فإن $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$

II- 1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln(x+1) + \frac{e \ln x}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ex}{x+1} \cdot \frac{\ln x}{x} = +\infty + e(0) = +\infty$$

ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{-e}{(x+1)^2} \ln x + \frac{e}{x(x+1)} = \frac{(x+1)(x+e) - ex \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ لأن المقام موجب وعليه الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها و جدول تغيراتها يكون كما يلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

معادلة المماس الأول (T) هي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي: $y = \frac{e+1}{2}x - \frac{e+1}{2} + \ln 2$

3- أ) تبين أن المنحنى يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α .

نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

من جدول تغيرات الدالة f الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0; +\infty[$ يحقق: $f(\alpha) = 0$ ومنه المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α .

(ب) التحقق أن: $0,7 \leq \alpha \leq 0,8$

لدينا: $f(0,7) < 0 < f(0,8)$ ومنه $0,7 \leq \alpha \leq 0,8$

-4 أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)]$ ، ثم تفسير النتيجة بيانياً.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1} \cdot \frac{\ln x}{x} = e \cdot 0 = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)] = 0$ ومعناه المنحنى (T) مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$

(ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (Γ) و (C_f)

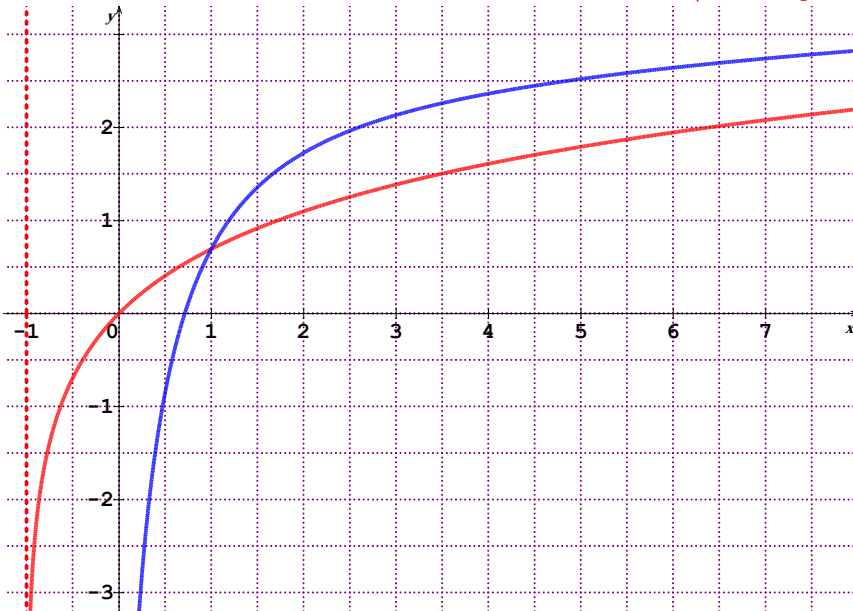
لدينا: $[f(x) - \ln(x+1)] = \frac{e}{x+1} \ln x$ وعليه إشارة الفرق هي حسب إشارة $\ln x$ وهي كما يلي

من أجل كل $0 < x < 1$ يكون المنحنى (C_f) يقع تحت (Γ)

من أجل $x = 1$ يكون المنحنى (C_f) يقطع (Γ) احداشيها $(1; \ln 2)$

من أجل كل $x > 1$ يكون المنحنى (C_f) يقع فوق (Γ) .

(ج) رسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f)



ملاحظة: المنحنى (Γ) هو صورة منحنى الدالة $x \rightarrow \ln x$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}_0^{-1}$

التمرين 25: دورة 2018

I-1- دراسة اتجاه تغير الدالة g المجال $]0; 1[$.

الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; 1[$ كمايلي: $g(x) = 2 - x + \ln x$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;1[$ حيث: $g'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$

من أجل كل $x \in]0;1[$ يكون $g'(x) > 0$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

2- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α حيث $0,15 \leq \alpha \leq 0,16$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على $]0;1[$ ولدينا: $g(0,15) =$ و $g(0,16) =$

وعليه: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $0,15 \leq \alpha \leq 0,16$.

3- استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;1[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha;1[$ فإن: $g(x) > 0$.

II- 1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

الدالة العددية f المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1-2x+\ln x}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 1} (1-2x+\ln x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{x-1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \cdot \frac{\ln x}{x} = -2 + 1 \cdot 0 = -2$$

تفسير النتيجةين بيانياً

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الترتيب

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ معناه المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الفواصل

2- أ، تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(-2 + \frac{1}{x})(x-1) - 1(1-2x+\ln x)}{(x-1)^2} = \frac{2 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{2 - \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}}{(x-1)^2} = \frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$$

ب، تبين أن f متزايدة تماماً على $[\frac{1}{\alpha}; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $[\frac{1}{\alpha}; 1]$ ثم تشكيل جدول تغيراتها

من عبارة $f'(x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(\frac{1}{x})$ لأن المقام موجب

لدينا: من أجل كل $x \in]\alpha;1[$ فإن: $g(x) > 0$ وعليه من أجل كل $x \in]1;\frac{1}{\alpha}[$ فإن $g(\frac{1}{x}) > 0$

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ وعليه من أجل كل $x \in]\frac{1}{\alpha};+\infty[$ فإن $g(\frac{1}{x}) < 0$

عليه f متزايدة تماماً على $\left[1; \frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماماً على $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$ وجدول تغيرات g يكون كما يلي

x	1	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty \xrightarrow{\quad} f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \xrightarrow{\quad} -2$		

3) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = -2$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{1 - 2x + \ln x}{x - 1} + 2 = \frac{-1 + \ln x}{x - 1}$

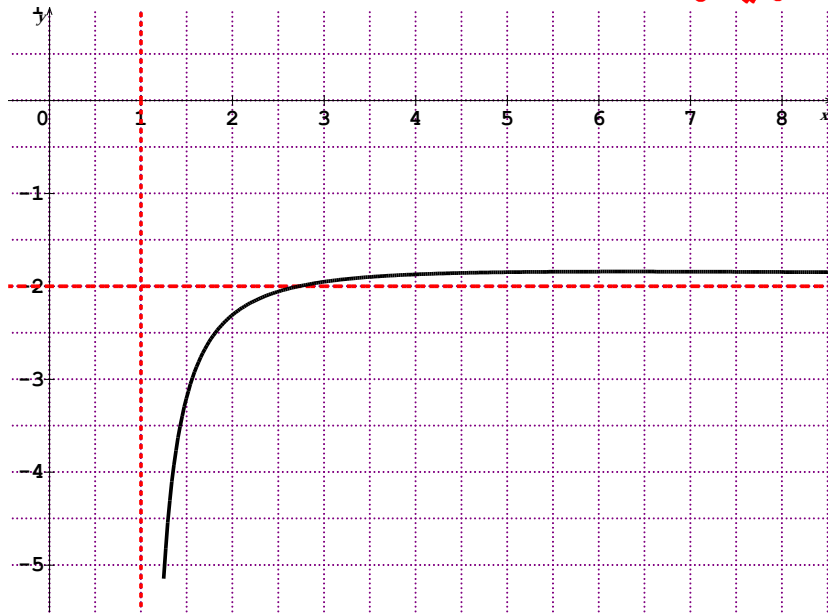
من العبارة السابقة نستنتج ان إشارة الفرق هي نفس إشارة $-1 + \ln x$ وهي كما يلي

(1) $-1 + \ln x = 0$ ومعناه $x = e$ ومعناه (C_f) يقطع (Δ) في نقطة إحداثيها $(e; -2)$

(2) $-1 + \ln x > 0$ ومعناه $x > e$ ومعناه (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]e; +\infty[$

(3) $-1 + \ln x < 0$ ومعناه $x < e$ ومعناه (C_f) يقع تحت (Δ) في المجال $]0; e[$.

4- رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f)



5- تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متميزين.

حلول المعادلة $|f(x)| = m$ بيانها هي فواصل نقاط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = m$ ومنحنى

الدالة ذو المعادلة $y = |f(x)|$ وهو نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

لدينا: المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين متميزين معناه $-2 < m < f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

وعليه $|f(x)| = m$ تقبل حلين متميزين معناه $-f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < m < 2$

التمرين 26: دورة 2017

1-أ) حساب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ وتفسير النتيجة ببيان

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $] -\infty; 1[\cup] 2; +\infty [$ ب: $f(x) = -2x + 3 + 2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 3) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 3) = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty^*$ معناه للحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ معناه للحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = 2$.

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \ln 1 = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 3) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \ln 1 = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D : $f'(x) = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$.

لدينا: $f(x) = -2x + 3 + 2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ أي $f(x) = -2x + 3 + 2[\ln(x-1) - \ln(x-2)]$

$$\text{ومنه: } f'(x) = -2 + 2\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right] = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

لدينا: $f'(x) = -2\left[1 + \frac{1}{(x-1)(x-2)}\right] < 0$ فنستنتج أن إشارة $f'(x)$ سالبة تماما:

وعليه الدالة f متناقصة تماما على مجالي تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كما يلي

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			-
$f(x)$	$+\infty \rightarrow -\infty$			$+\infty \rightarrow -\infty$

3) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $(3-x) \in D_f$: $f(3-x) + f(x) = 0$

أولاً: من أجل كل $x \in D_f$ فإن $(-x) \in]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$ ومنه $(3-x) \in D_f$

$$f(3-x) + f(x) = -2(3-x) + 3 + 2 \left[\ln \frac{(2-x)}{(1-x)} \right] - 2x + 3 + 2 \left[\ln \frac{(x-1)}{(x-2)} \right]$$

ثانياً:

$$= 2 \left[\ln \frac{(x-1)(2-x)}{(x-2)(1-x)} \right] = 2 \left[\ln \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-1)} \right] = 2 \ln 1 = 0$$

(ب) استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه

من العبارة $f(3-x) + f(x) = 0$ والتي تكافئ $f(2 \cdot \frac{3}{2} - x) + f(x) = 2(0)$

نسنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر احداثياها $\omega(\frac{3}{2}; 0)$.

4) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α على المجال $]0, 45; 0, 46[$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماماً على $] -\infty; 1[$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = -\infty$

لدينا: $f(0, 45) = 0.027 > 0$ و $f(0, 46) = -0.015 < 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha) = 0$ حيث $\alpha \in]0, 45; 0, 46[$.

استنتاج ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حداً آخر β يطلب تعيين حصراً له

*بما أن المنحنى (C_f) يقبل النقطة ω كمركز تناظر له نسنتج أن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حداً آخر β على المجال $]2; +\infty[$ حيث $\alpha + \beta = 2(\frac{3}{2})$

لأن النقطة التي احداثياها $(\alpha; 0)$ نظيرة النقطة التي احداثياها $(\beta; 0)$ بالنسبة للنقطة ω لدينا: $\alpha + \beta = 3$ ومنه $\beta = 3 - \alpha$

وبما أن $\alpha \in]0, 45; 0, 46[$ فإن $\beta \in]3 - 0, 46; 3 - 0, 45[$ أي $\beta \in]2, 54; 2, 55[$.

5) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -2x + 3$ مقارب مائلاً للمنحنى (C_f) .

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -2x + 3$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

لدينا: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right) = \ln 1 = 0$

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

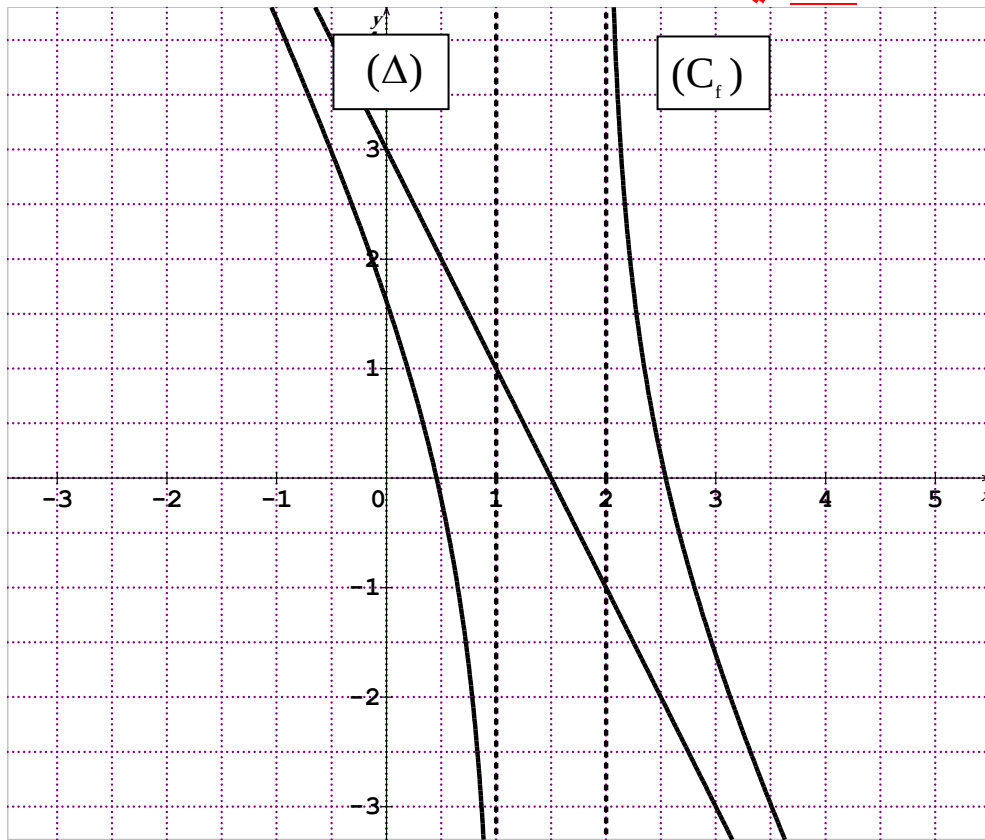
لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = 2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right)$

لدينا: $f(x) - y < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ لأن $\frac{x-1}{x-2} < 1$

: $f(x) - y > 0$ من أجل كل $x \in]2; +\infty[$ لأن $\frac{x-1}{x-2} > 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x) - y$	-			+
الوضع	(Δ) تحت (C_f)			(Δ) فوق (C_f)

ب) رسم (Δ) والمنحنى (C) في آخر الحل



التمرين 27: دورة 2017 الإستدراكية

1-I) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

لدينا: الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2 - \ln x}{x^2}$

* $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\frac{1}{2}$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ حيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(x^2) - 2x(2 - \ln x)}{x^4} = \frac{-5 + 2 \ln x}{x^3}$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $-5 + 2 \ln x$ لأن المقام موجب تماما

$$x = e^{\frac{5}{2}} = e^2 \sqrt{e} \text{ معناه } -5 + 2 \ln x = 0$$

$$x \in]e^2 \sqrt{e}; +\infty[\text{ معناه } -5 + 2 \ln x > 0 \text{ و } x \in]0; e^2 \sqrt{e}[\text{ معناه } -5 + 2 \ln x < 0$$

وعليه جدول التغيرات يكون كما يلي

x	0	$e^2 \sqrt{e}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(e^2 \sqrt{e})$	$-\frac{1}{2}$

2-أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,71 < \alpha < 1,72$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $x \in]0; e^2 \sqrt{e}[$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ و $g(e^2 \sqrt{e}) < 0$

لدينا: $g(1,71) = 1,31$ و $g(1,72) = -0,07$ أي $g(1,71) \times g(1,72) < 0$

وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $1,71 < \alpha < 1,72$ حسب مبرهنة كوشي

ب) استنتاج إشارة $g(x)$

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن: $g(x) > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) < 0$

1-II) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا: الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 + \frac{-1 + \ln x}{x}$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \ln x}{x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{1}{2}x + 2) = 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2}x + 2) = -\infty$

2-أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{x})(x) - 1(-1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{2 - \ln x}{x^2} = g(x)$

ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

2-أ) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \ln x}{x} = 0 \text{ لدينا:}$$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ينبغي دراسة إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{-1 + \ln x}{x}$

إشارة الفرق $f(x) - y$ هي حسب إشارة $-1 + \ln x$ وهي كمايلي:

$-1 + \ln x = 0$ معناه $x = e$ ومعناه (C_f) يقطع (Δ) في نقطة إحداثيها $(e; f(e))$

$-1 + \ln x < 0$ معناه $x \in]0; e[$ ومعناه (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

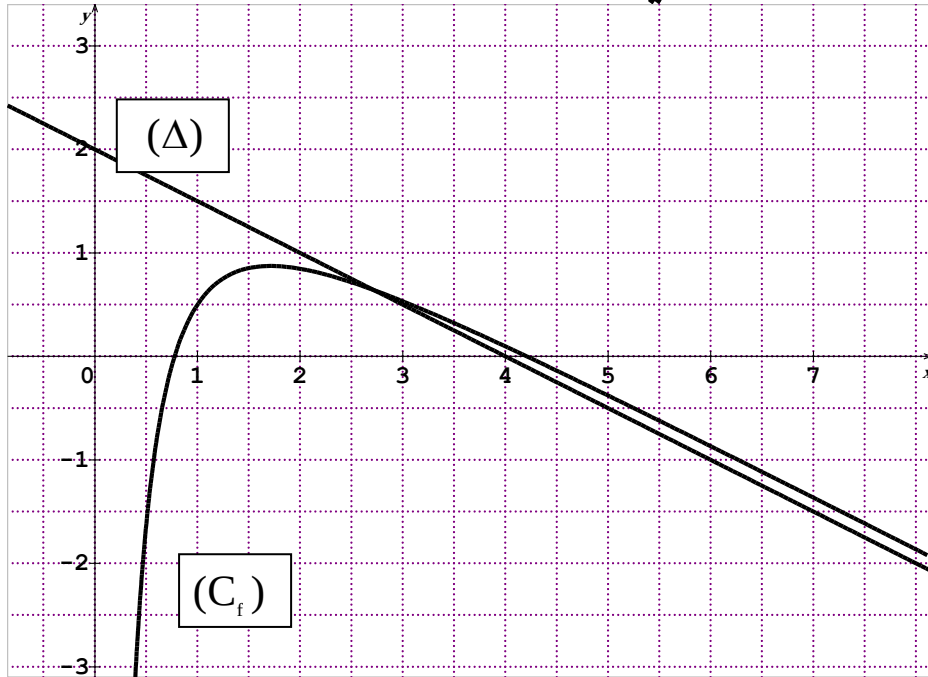
$-1 + \ln x > 0$ معناه $x \in]e; +\infty[$ ومعناه (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

3) انشاء في المعلم السابق المستقيم (Δ) المنحنى (C_f) .

من المعطيات لدينا: $f(\beta) = f(\gamma) = 0$ حيث $0,76 < \beta < 0,77$ و $4,19 < \gamma < 4,22$

ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما β و γ .

رسم المستقيم (Δ) المنحنى (C_f) في آخر الحل.



التمرين 28: دورة 2016 م 1

1-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

لدينا: الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty^*$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها
حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

$$\text{لدينا: } g'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' + (\ln(x+1))' = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{(x+1)^2}$$

نستنتج أن: $g'(x) > 0$ لأن: $x > -1$ وعليه جدول التغيرات يكون كم يلي

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2-أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$$\text{لدينا: } g(0,4) = -\frac{3}{7} + \ln 1.4 \text{ و } g(0,5) = -\frac{1}{3} + \ln 1.5 \text{ أي } g(0,5) \times g(0,4) < 0$$

وعليه: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $0,4 < \alpha < 0,5$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]-1; +\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-1; \alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) > 0$

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانيا ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب معادلته $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)\ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x)\ln(x) = +\infty$$

2-أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $]-1; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها

$$\text{لدينا: } f'(x) = (x-1)' \cdot (\ln(x+1))' = 1 \cdot \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} = g(x)$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f يكون كما يلي

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

ب) تبين أن $f(\alpha) = -\alpha + 4 - \frac{4}{\alpha+1}$ وإعطاء حصر لـ $f(\alpha)$

*لدينا: $f(\alpha) = 1 + (\alpha - 1)\ln(\alpha + 1)$ ولدينا أيضا: $g(\alpha) = 0$ ومعناه $-\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = \ln(\alpha+1)$

ومنه: $f(\alpha) = 1 - (\alpha - 1)\frac{(\alpha-1)}{(\alpha+1)} = \frac{(\alpha+1) - (\alpha-1)^2}{(\alpha+1)} = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha}{(\alpha+1)} = -\alpha + 4 - \frac{4}{(\alpha+1)}$

*الحصر لدينا: $0,4 < \alpha < 0,5$ تكافئ $0,4 < -\alpha + 4 < 3,6$(1)

ولدينا: $0,4 < \alpha < 0,5$ وتكافئ $1,4 < \alpha + 1 < 1,5$ وتكافئ $\frac{4}{1,5} < \frac{4}{\alpha+1} < \frac{4}{1,4}$...(2)

بطرح (2) من (1) نجد: $0,64 < f(\alpha) < 0,93$

3-أ) التحقق أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ $h'(x) = f'(x) - f'(a)$

لدينا: $h'(x) = f'(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]' = f'(x) - f'(a)$ لأن $(x-a)' = 1$ و $f'(a) = 0$

ب) تعيين إشارة $h'(x)$ باستعمال اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $h'(x) = f'(x) - f'(a) = g(x) - g(a) < 0$ من أجل $x < a$ لأن g متزايدة تماما

لدينا: $h'(x) = f'(x) - f'(a) = g(x) - g(a) > 0$ من أجل $x > a$ لأن g متزايدة تماما

ومنه إشارة $h'(x)$ هي حسب الجدول التالي

x	-1	a	$+\infty$
إشارة $h'(x)$	-	0	+

استنتاج اتجاه تغير الدالة h

من الجدول السابق والذي يوضح إشارة $h'(x)$ نستنتج أن:

من أجل كل $x \in]-1; a[$ فإن h متناقصة تماما ومن أجل كل $x \in]a; +\infty[$ فإن h متزايدة تماما

والدالة h تقبل 0 كقيمة حدية صغرى من أجل a لأن: $h(a) = f(a) - f(a) = 0$ وعليه $h(x) \geq 0$

ج) تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T_a)

(T_a) له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

لتحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T_a) ندرس إشارة الفرق $f(x) - y = h(x)$

بما أن $h(x) \geq 0$ فإن المنحنى (C) يكون دائما فوق المماس (T_a) ويمسه في النقطة ذات الفاصلة a

4-أ) تبين وجود مماسين (T_a) يشملان النقطة $A(1;0)$ وتعيين معادلتيهما.

لدينا: (T_a) له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

المماس (T_a) يشمل النقطة $A(1;0)$ معناه $0 = f'(a)(1-a) + f(a)$

ولدينا: $0 = g(a)(1-a) + f(a)$ تكافئ $0 = f'(a)(1-a) + f(a)$

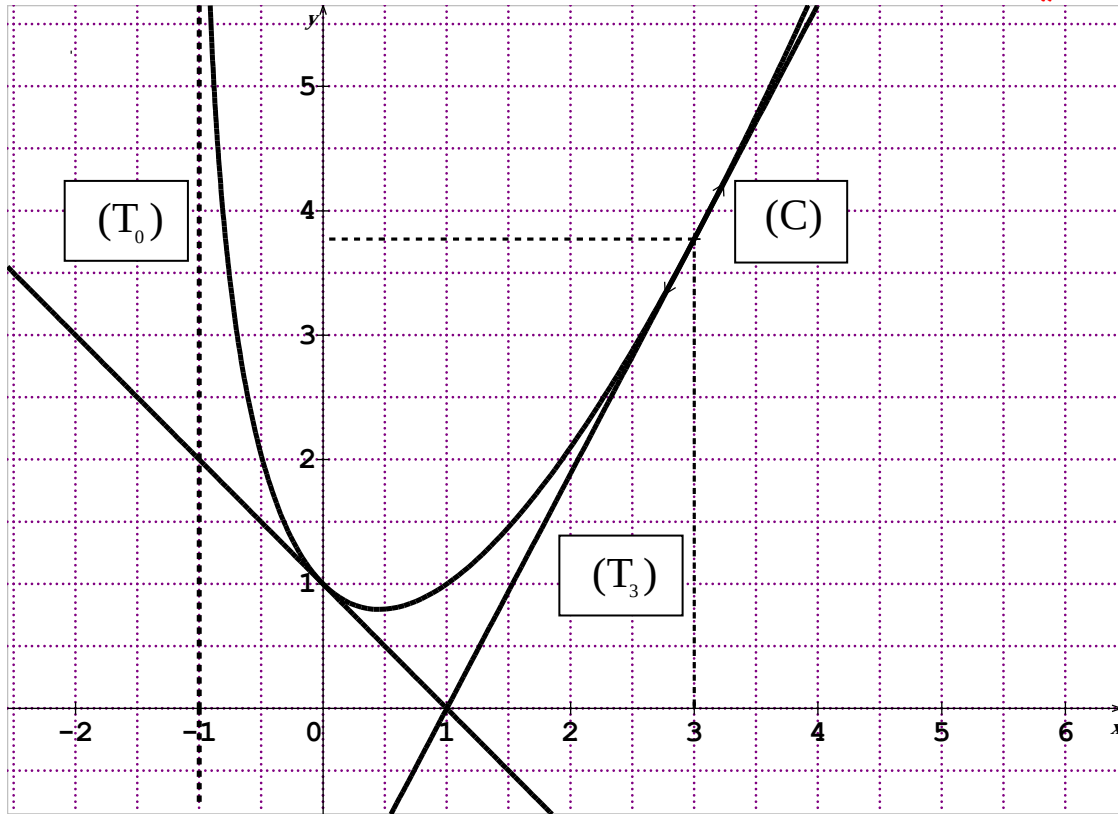
معناه $\frac{(1-a)(a-1)}{(a+1)} + 1 = 0$ وعليه $(a-1)^2 = a+1$ أي $a^2 - 3a = 0$ ومنه $a = 0$ أو $a = 3$

ومنه يوجد مماسين (T_a) لـ (C) الأول عند النقطة $(0;1)$ والثاني عند النقطة $(3;2\ln 4)$

معادلة المماس الأول (T_0) هي: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي: $y = -x + 1$

معادلة المماس الثاني (T_3) هي: $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ أي: $y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)x - \frac{1}{2} - \ln 4$

(ب) رسم المماسين والمنحنى (C)



التمرين 29: دورة 2016 م 2

(I) 1- أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ نهاية شهيرة. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0$

حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x \ln x)$

إزالة حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيرها.

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ $g'(x) = 1 - (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = -\ln x$

إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $-\ln x$ وهي حسب الجدول التالي

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كالتالي

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	1	$-\infty$

(2) تبين ان المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3,5 < \alpha < 3,6$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$

لدينا: $g(3,5) = -0,88$ و $g(3,6) = -1,01$ أي $g(3,6) < -1 < g(3,5)$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = -1$ حيث $3,5 < \alpha < 3,6$.

(3) استنتاج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا: $g(x) + 1 = 0$ تكافئ $g(\alpha) = -1$ ومن الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x) + 1$ هي:

من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن: $g(x) + 1 > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) + 1 < 0$

(1-II) تبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty^*$ ومعناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 0^*$ ومعناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = 0$

(2-I) البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

لدينا: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - 1 \cdot \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x - x \ln x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

(ب) تبين أن الدالة f متزايدة على $]0; \alpha[$ ومتناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x) + 1$ لأن المقام موجب تماما

من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن: $g(x) + 1 > 0$ ومنه f متزايدة على $]0; \alpha[$

ومن أجل كل $x \in [\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) + 1 < 0$ ومنه f ومتناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$ وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

(ج) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(T) له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

ومنه $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ أي $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

(د) حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ، تفسير النتيجة هندسيا.

بأن الدالة f قابلة للإشتقاق عند α لأنها قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ فإن:

$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = 0$ ومعناه المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α

المماس عند النقطة ذات الفاصلة α يوازي حامل محور الفواصل وله معادلة من الشكل $y = f(\alpha)$

(3) -تبيان أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

لدينا: (1) $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha + 1}$ ولدينا أيضا $g(\alpha) = -1$ ومعناه $\alpha - \alpha \ln \alpha = -1$ أي $\ln \alpha = \frac{1 + \alpha}{\alpha}$

بعد تعويض قيمة $\ln \alpha$ في العبارة (1) نجد: $f(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{\alpha(\alpha + 1)} = \frac{1}{\alpha}$

ب- استنتاج حصر العدد $f(\alpha)$ (وتدوير النتائج إلى 10^{-2})

لدينا: $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha + 1}$ ولدينا $3,5 < \alpha < 3,6$ وتكافئ (1) $4,5 < \alpha + 1 < 4,6$ و (2) $1,25 < \ln \alpha < 1,28$...

من المتباينتين (1) و (2) نجد: $0,27 < f(\alpha) < 0,28$

ج- رسم (C_f) . (في آخر الحل)

4- أ- التحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

لدينا: (E) $x^2 + x - 2m(x + 1) = \ln(x^2)$ تكافئ $x(x + 1) - 2m(x + 1) = 2 \ln x$

وبعد قسمة الطرفين على $\frac{1}{2}(x + 1)$ نجد $\frac{1}{2}x - m = \frac{\ln x}{x + 1}$ أي $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

ب- تعين بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متميزين.

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x - m$ والمنحنى (C_f) من البيان يكون للمعادلة (E) حلين متميزين معناه $m > \frac{1}{2}$.

5-أ- تبين أن h زوجية.

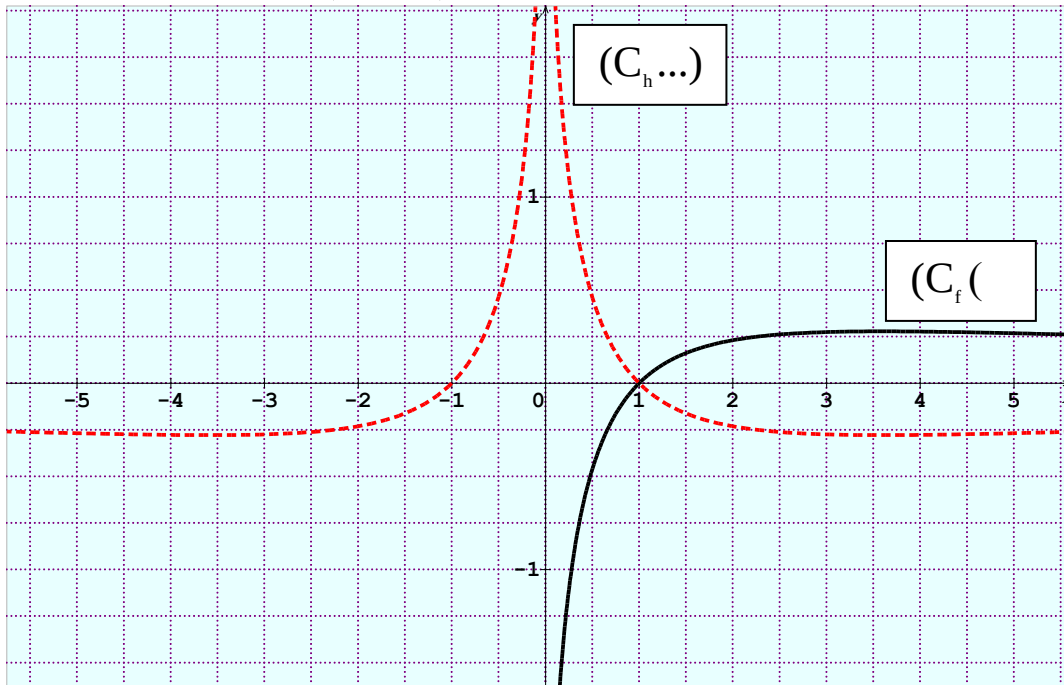
h دالة زوجية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ و $-x \in \mathbb{R}^*$: $h(-x) = h(x)$

لدينا: $h(-x) = \frac{\ln|-x|}{-|-x|-1} = \frac{\ln|x|}{-|x|-1} = h(x)$ لأن $|-x| = |x|$ ومنه h زوجية.

ب- رسم في نفس المعلم المنحنى (C_f) و (C_h) .

* (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل من أجل $x \in \mathbb{R}_+^*$

* (C_h) نظير (C_f) بالنسبة للمبدأ من أجل $x \in \mathbb{R}_-^*$ (أونتم الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب)



التمرين 30: دورة 2015

1- I حساب $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

لدينا: $h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$ و المعرفة على $]-2; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -2} (-2\ln(x+2)) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2} ((x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2))$ حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \left[(x+2) + \frac{2}{x+2} - 2 \frac{\ln(x+2)}{(x+2)} \right] = +\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x+2} \right] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x+2)}{(x+2)} \right] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$

2) دراسة اتجاه تغير h وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2h\ln(x+2)$ و $D_h =]-2; +\infty[$.

ومنه: $h'(x) = 2(x+2) - \frac{2}{x+2} = \frac{2(x+2)^2 - 2}{x+2} = \frac{2[(x+2)-1][(x+2)+1]}{(x+2)}$

أي: $h'(x) = \frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)}$

$h'(x) = 0$ معناه $(x+1)(x+3) = 0$ معناه $x = -1$ أو $x = -3 \notin D_h$ مرفوض

$h'(x) < 0$ معناه $(x+1)(x+3) < 0$ معناه $x \in]-2; -1[$

$h'(x) > 0$ معناه $(x+1)(x+3) > 0$ معناه $x \in]-1; +\infty[$

وعليه جدول تغيرات الدالة h كمايلي:

x	-2	-1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$h(-1)$	$+\infty$

3) استنتاج أنه من أجل كل x من $]-2; +\infty[$: $h(x) > 0$

من جدول التغيرات للدالة h لدينا: $h(-1) = 3 > 0$ ومنه $h(x) > 0$

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

لدينا: $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2} \ln(x+2)$ والمعرفة على $]-2; +\infty[$.

* $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x+2} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -2} \ln(x+2) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ معناه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = -2$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x+2)}{x+2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$

2) تبيان أنه من أجل كل x من $]-2; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+2)^2} \ln(x+2) + \frac{2}{(x+2)} \times \frac{1}{(x+2)} = \frac{(x+2)^2 - 2 \ln(x+2) + 2}{(x+2)^2} = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$

2) دراسة اتجاه تغير f على $]-2; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $h(x)$ وعليه تكون الدالة f متزايدة تماماً على $]-2; +\infty[$ لأن $h(x) > 0$

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) أ) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$y = x + 1$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x + 2)}{x + 2} = 0$ نهاية شهيرة

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - (x + 1)$

من الجواب السابق لدينا: $f(x) - (x + 1) = \frac{2 \ln(x + 2)}{(x + 2)}$

إشارة الفرق هي من إشارة $\ln(x + 2)$ لأن $\ln(x + 2) > 0$ من أجل كل $x \in]-2; +\infty[$

$\ln(x + 2) = 0^*$ ومنه $x = -1$ معناه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياتها $(-1; 0)$

$\ln(x + 2) < 0^*$ ومنه $x < -1$ معناه (C_f) تحت (Δ) في المجال $]-2; -1[$

$\ln(x + 2) > 0^*$ ومنه $x > -1$ معناه (C_f) فوق (Δ) في المجال $]-1; +\infty[$

4- أ) اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها.

المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف معناه الدالة f'' تنعدم وتغير إشارتها

لدينا: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x + 2)^2}$ ومنه $f''(x) = \frac{h'(x)(x + 2)^2 - 2(x + 2)h(x)}{(x + 2)^4}$

ومنه: $f''(x) = \frac{h'(x)(x + 2) - 2h(x)}{(x + 2)^3} = \frac{4 \ln(x + 2) - 6}{(x + 2)^3}$

$f''(x) = 0$ معناه $\ln(x + 2) = \frac{3}{2}$ أي $x + 2 = e^{\frac{3}{2}}$ ومنه $x = \sqrt{e^3} - 2$

$f''(x) < 0$ معناه $x < \sqrt{e^3} - 2$ و $f''(x) > 0$ معناه $x > \sqrt{e^3} - 2$

ومنه (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A إحداثياتها $(\sqrt{e^3} - 2; \sqrt{e^3} - 1 + \frac{3}{4\sqrt{e^3}})$

ب) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) (في آخر الحل)

III-1) حساب $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1}$ والاستنتاج بالنسبة لـ g

كتابة العبارة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ، وذلك حسب قيم x

$$g(x) = - \left[(x + 1) + \frac{2}{x + 2} \ln(x + 2) \right] = -f(x) : x \in]-2; -1[\text{ من أجل كل }$$

$$g(x) = \left[(x + 1) + \frac{2}{x + 2} \ln(x + 2) \right] = f(x) : x \in]-1; +\infty[\text{ من أجل كل }$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} - \frac{f(x)}{x + 1} = -1 - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y} \cdot \frac{\ln(y + 1)}{(y + 1)} = -3 \text{ وعليه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1} = 1 + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y} \cdot \frac{\ln(y + 1)}{(y + 1)} = +3$$

نستنتج أن الدالة g غير قابلة للإشتقاق عند -1 لأن $-3 \neq +3$

2) إعطاء تفسير هندسي للنتيجة

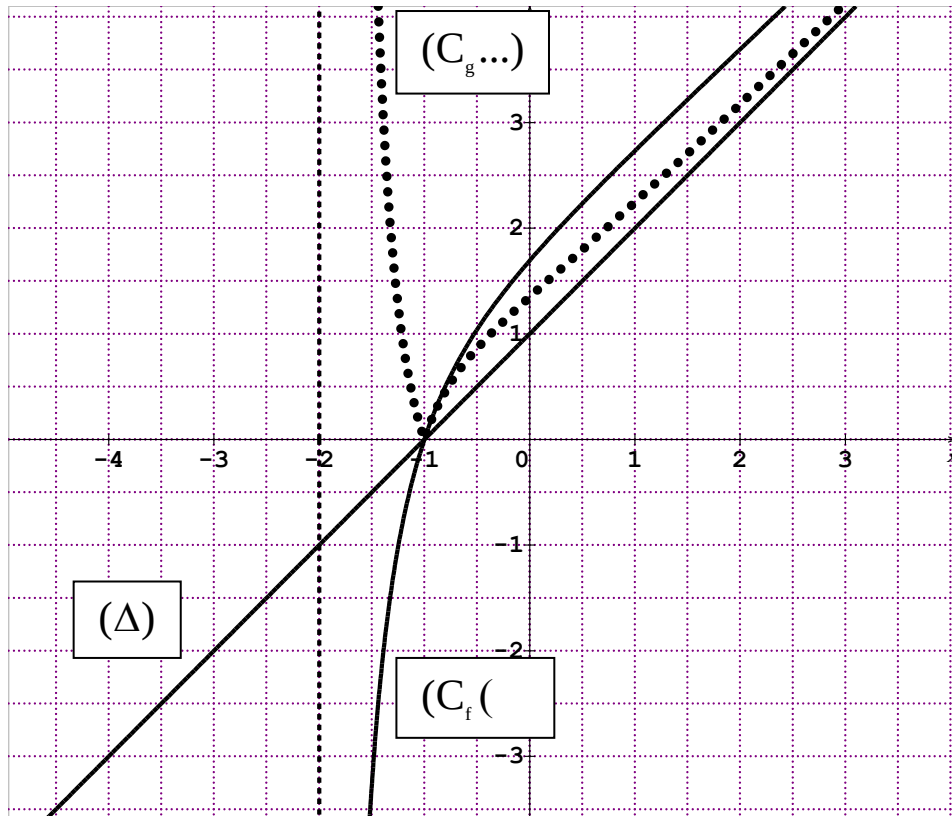
بأن العدد المشتق من اليسار لا يساوي العدد المشتق من اليمين للدالة g عند -1 .
فإن منحنى الدالة (C_g) يقبل نصفي مماسين عند النقطة التي أحدثها $(-1; 0)$.

3) رسم المنحنى (C_g) إنطلاقاً من المنحنى (C_f)

من الجواب السابق لدينا:

$g(x) = -f(x) : x \in]-2; -1[$ ومعناه (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

$g(x) = f(x) : x \in]-1; +\infty[$ ومعناه $(C_g) = (C_f)$



I-1) ادرس تغيرات الدالة g

لدينا: دالة معرفة على $]0; 3]$ ب: $g(x) = x \ln x + x$.

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + x) = 0$$

$$g(3) = 3 \ln 3 + 3 \text{ نهاية شهيبة و}$$

اتجاه التغير

$$g'(x) = (x \ln x + x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2$$

$$g'(x) = 0 \text{ معناه } \ln x + 2 = 0 \text{ أي } x = e^{-2}$$

$$g'(x) > 0 \text{ معناه } \ln x + 2 > 0 \text{ أي } x > e^{-2} \text{ و } g'(x) < 0 \text{ معناه } \ln x + 2 < 0 \text{ أي } x < e^{-2}$$

جدول التغيرات

x	2	e^{-2}	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0	$g(e^{-2})$	$g(3)$

2-أ) نبيان أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; 3]$ ثم تحقق أن $1,45 < \alpha < 1,46$.

* المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; 3]$ لأن:

f متزايدة على $]e^{-2}; 3]$ ولدينا: $g(e^{-2}) = -e^{-2}$ و $g(3) = 3 \ln 3 + 3$ أي: $g(e^{-2}) < 2 < g(3)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $g(\alpha) = 2$

* لدينا: $g(1,45) = 1,99$ و $g(1,46) = 2,01$ ومنه $1,45 < \alpha < 1,46$

ب) استنتج إشارة $g(x) - 2$.

$$g(\alpha) = 2 \text{ معناه } g(\alpha) - 2 = 0$$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن إشارة

$g(x) - 2$ هي حسب الجدول التالي

x	0	α	3
$g(x) - 2$	-	0	+

II-1) وضع تخمين حول قابلية اشتقاق للدالة f عند 2

باستعمال المنحنى (C_f) نؤمن أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 لأنها تقبل نصفي مماسين

2) أثبات صحة تخمينك.

توضيح: $f(x) = |x-2|\ln x = \begin{cases} -(x-2)\ln x; x \in]0; 2[\\ (x-2)\ln x; x \in]2; 3[\end{cases}$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)\ln 2}{(x-2)} = -\ln 2 = f'_g(2)$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)\ln 2}{(x-2)} = \ln 2 = f'_d(2)$

ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 لأن: $f'_g(2) \neq f'_d(2)$.

(3) دراسة تغيرات الدالة f

f والمعرفة على المجال $]0; 3[$ ب: $f(x) = |x-2|\ln x$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ نهاية شهيرة. و $f(3) = \ln 3$

اتجاه التغير: f قابلة للاشتقاق على كلا من المجالين $]0; 2[$ و $]2; 3[$ حيث:

$$f'(x) = \begin{cases} -\ln x - \frac{x-2}{x} = -\frac{g(x)-2}{x}; x \in]0; 2[\\ \ln x + \frac{x-2}{x} = \frac{g(x)-2}{x}; x \in]2; 3[\end{cases}$$

من الجواب (I-2) نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي:

نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]2; 3[$ وعكس إشارة $g(x)$ على المجال $]0; 2[$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

X	0	α	2	3
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0	$f(3)$

III-1) تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) .

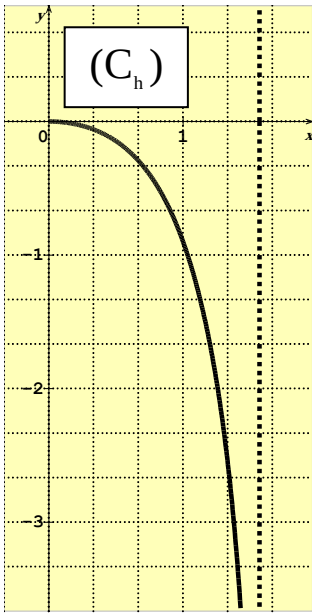
لدينا: h الدالة المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ كمايلي: $h(x) = (2 - \cos x) \ln(\cos x)$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) معناه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \infty$.

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\cos x) = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2 - \cos x) = 1$.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة h ، ثم تشكيل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h) .

توضيح: الدالة h هي تركيب الدالة $x \rightarrow \cos x$ متبوعة بالدالة f أي: $h(x) = f(\cos x)$



نعلم أن الدالة $x \rightarrow \cos x$ متناقصة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ والدالة f متزايدة على المجال $[0; 1]$ ومنه الدالة h متناقصة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

لأنها تركيب دالتين مختلفتين في اتجاه التغير وعليه جدول تغيرات الدالة h يكون كمايلي:

لدينا: $h(0) = f(\cos 0) = f(1) = 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	0	$-\infty$

التمرين 32: دورة 2013 م

1-I) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

$g(x)$ الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$

من اجل كل $x \in]-1; +\infty[$ فإن: $g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$

نلاحظ أن: من اجل كل $x \in]-1; +\infty[$ فإن: $g'(x) > 0$ وعليه تكون g متزايدة تماما.

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$

g^* متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$ ولدينا: $g(0,31) = 0$ و $g(0,32) < 0$ أي: $g(0,31) < 0 < g(0,32)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $g(\alpha) = 0$

* $g(\alpha) = 0$ معناه $(\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0$ أي $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$

3) استنتاج إشارة $g(x)$.

الدالة g تماما على $]-1; +\infty[$ والمعادلة $g(x) = 0$ تقبل

حلا وحيدا α فإن إشارة $g(x)$ حسب الجدول التالي:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II-1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$f(x)$ الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + [2 - \ln(x+1)]^2$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 + \infty = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -1} -\ln(x+1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-\ln(x+1)]^2 = +\infty$

2- تبين أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$

$$f'(x) = 2(x+1) - 2[2 - \ln(x+1)] \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{2[(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)]}{x+1} = \frac{2g(x)}{x+1}$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

من العبارة $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$ نستنتج أن إشارة

$f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

4- تبين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2[1 + (\alpha+1)^2]$

ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + [2 - \ln(\alpha+1)]^2$

ولدينا من جهة أخرى $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$ حسب 2-1.

ومنه: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + [(\alpha+1)^2]^2 = (\alpha+1)^2[1 + (\alpha+1)^2]$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

نضع: (1) $0,31 < \alpha < 0,32$ ولدينا: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2[1 + (\alpha+1)^2]$

(1) تكافئ $1,31 < \alpha+1 < 1,32$ وتكافئ (2) $(1,31)^2 < (\alpha+1)^2 < (1,32)^2$

(2) تكافئ (3) $1 + (1,31)^2 < 1 + (\alpha+1)^2 < 1 + (1,32)^2$

بضرب (2) و (3) لطرف لطرف نجد: $(1 + (1,31)^2)(1,31)^2 < f(\alpha) < (1 + (1,32)^2)(1,32)^2$

بعد الحساب نجد: $< f(\alpha) <$

5- تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

ملاحظة: $f(2) = 3^2 + (2 - \ln(3))^2 = 9$

III-1- أثبات أن المسافة $AM = \sqrt{f(x)}$

لدينا: $A(-1; 2)$ و $M(x; h(x))$

ومنه: $AM = \sqrt{(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2} = \sqrt{f(x)}$

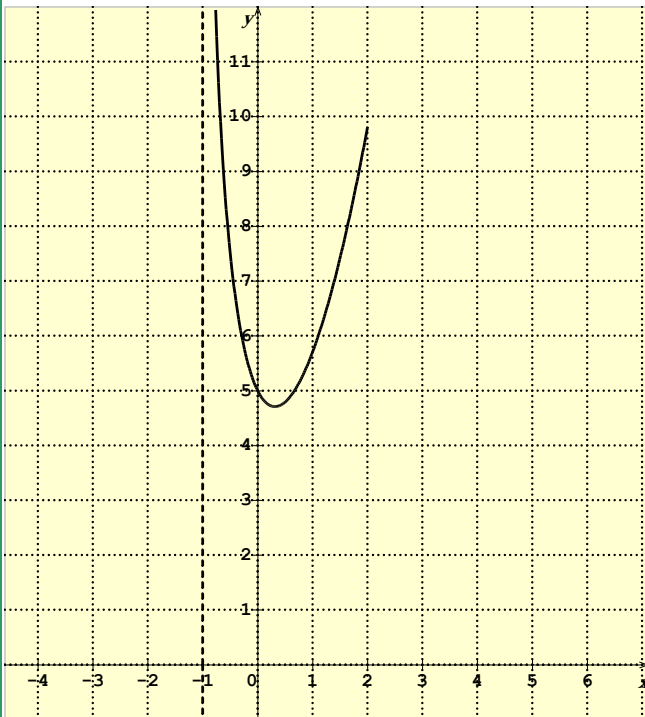
k معرفة على $]-1; +\infty[$ بالعبارة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$

2- أثبات أن k و f نفس اتجاه التغير على $]-1; +\infty[$

الدالة k معرفة على $]-1; +\infty[$ بالعبارة

: $k(x) = \sqrt{f(x)}$ قابلة للأشتقاق على

$]-1; +\infty[$ حيث: $k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$



من العبارة $k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ نستنتج أن العبارتين $k'(x)$ و $f'(x)$ لهما نفس الإشارة ومنه للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- تعيين إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا: $AM = \sqrt{f(x)} = k(x)$

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما تقبل الدالة k قيمة حدية محلية صغرى
الدالة k متناقصة على المجال $]-1; \alpha[$ و متزايدة على المجال $]\alpha; +\infty[$ و $k(\alpha) = \ln(\alpha + 1)$ أي
أي قيمة حدية محلية صغرى هي $\ln(\alpha + 1)$ عند α
ومنه احداثيتي النقطة B هي $(\alpha; \ln(\alpha + 1))$.

ج- تبيان أن: $AB = (\alpha + 1)\sqrt{(\alpha + 1)^2 + 1}$.

نضع: $M = B$ في العلاقة $AM = \sqrt{(x + 1)^2 + (2 - \ln(x + 1))^2}$

نجد: $AB = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + (2 - \ln(\alpha + 1))^2} = \sqrt{(\alpha + 1)^2 [1 + (\alpha + 1)^2]} = (\alpha + 1)\sqrt{1 + (\alpha + 1)^2}$

التمرين 33: دورة 2013 م 2

1- دراسة تغيرات الدالة g.

لدينا: g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (x - 1)e^x$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ نهاية شهيرة و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$

دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f'(x) = [(x - 1)e^x]' = 1 \cdot e^x + (x - 1) \cdot e^x = xe^x$ وشارته هي حسب إشارة x

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	0	-1	$+\infty$

2- بيّن أنه ، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $1 + (x - 1)e^x \geq 0$

من جدول التغيرات لدينا: $g(x) \geq -1$ لأن -1 قيمة حدية صغرى للدالة g

ومنه: $g(x) + 1 \geq 0$ عليه $1 + (x - 1)e^x \geq 0$

1-II) - تبيان أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

$$\text{لدينا: } f \text{ الدالة المعرفة على } [0; +\infty[\text{ ب: } \begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

نعلم أن f مستمرة على $[0; +\infty[$ معناه أن f مستمرة على المجال $[0; +\infty[$ ومستمرة عند 0

• f مستمرة على المجال $[0; +\infty[$ لأنها حاصل قسمة دالتين مستمرتين على هذا المجال.

• f مستمرة عند 0 معناه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ نهاية شهيرة.}$$

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ نهاية شهيرة و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$2-أ-التحقق أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$$$

$$\text{لدينا: } f'(x) = \frac{e^x(x) - 1(e^x - 1)}{x^2} = \frac{1 + e^x(x-1)}{x^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من الجواب 2-أ) لدينا: $1 + (x-1)e^x \geq 0$

ومنه $f'(x) \geq 0$ وعليه تكون الدالة f

متزايدة تماما و جدول تغيراتها يكون

كمايلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$+\infty$

III-1-دراسة اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$.

$$f_n \text{ الدالة المعرفة على } [0; +\infty[\text{ ب: } f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$$

$$(n \ln x)' = n \left(\frac{1}{x} \right) \text{ لأن } f_n'(x) = \frac{1 + e^x(x-1)}{x^2} + \frac{n}{x}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ وعليه تكون الدالة } f \text{ متزايدة تماما لأن: } \frac{n}{x} > 0 \text{ و } \frac{1 + e^x(x-1)}{x^2} \geq 0$$

2-حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} n \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n \ln x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = +\infty$$

3- دراسة الوضع النسبي للمنحنين (C_n) و (C_{n+1}) .

لدراسة الوضع النسبي للمنحنين (C_n) و (C_{n+1}) ندرس إشارة الفرق: $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + (n+1)\ln x - \frac{e^x - 1}{x} - n\ln x = \ln x$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $\ln x$ والجدول التالي يوضح إشارة $\ln x$ والوضع النسبي:

x	0	1	$+\infty$
إشارة الفرق	-	0	+
الوضع النسبي	(C_n) تحت (C_{n+1})	(C_n) فوق (C_{n+1})	(C_{n+1}) يقطع (C_n)

4- تبين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين احداثيتها.

النقطة B نقطة تقاطع جميع المنحنيات تكون مستقلة عن العدد الطبيعي n من خلال الجواب 3 نستنتج أن $B(1; e-1)$ هي نقطة تقاطع (C_n) و (C_{n+1}) .

5-أ- تبين أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد من $\alpha_1 \in]0,3; 0,4[$ بحيث: $f_1(\alpha_1) = 0$.

لتبين وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha_1 \in]0,3; 0,4[$ بحيث: $f_1(\alpha_1) = 0$ نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة لدينا: الدالة f_1 (هي الدالة f) مستمرة ومتزايدة تماما (انظر جدول تغيرات f) ولدينا: $f_1(0,3) = -0,03$ و $f_1(0,4) = 0,31$ أي $f_1(0,3) \times f_1(0,4) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1 \in]0,3; 0,4[$ يحقق $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) \leq 0$

لتبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) \leq 0$

من الجواب 3 لدينا: $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ من أجل كل $x \in]0;1[$

إذن $f_n(x) \leq f_1(x)$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$.

ملاحظة: يمكن استعمال طريقة البرهان بالتراجع

البرهان أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $[\alpha_1; 1]$ بحيث: $f_n(\alpha_n) = 0$.

لتبين وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha_n \in [\alpha_1; 1]$ بحيث: $f_n(\alpha_n) = 0$ نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة

لدينا: الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماما (أنظر الجواب III-1)

ولدينا: $f_n(\alpha_1) < 0$ و $f_n(1) = e-1 > 0$ أي $f_n(\alpha_1) \times f_n(1) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n \in [\alpha_1; 1]$ يحقق $f_n(\alpha_n) = 0$.

6-أ- تبين أنه ، من أجل كل x من $]0;1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$

المترابحة $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$ تكافئ $f_1(x) \leq f_1(1)$ محققة لأن الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$.

التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة A(1; -1) مماسا معامل توجييه 4 معناه $\begin{cases} g'(1) = 4 \\ g(1) = -1 \end{cases}$

لدينا: $g(1) = 1^2 + a + b \ln(1) = 1 + a = -1$ ومنه $a = -2$.

لدينا: $g'(x) = 2x + \frac{b}{x}$ ومنه $g'(1) = 2 + \frac{b}{1} = 4$ ومنه $b = 2$.

أ) دراسة تغيرات الدالة g، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $g(x) = x^2 - 2 + 2 \ln(x)$ والمعرفة على $]0; +\infty[$

النهايات

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ نهاية شهيرة. لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -2 - \infty = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ نهاية شهيرة. لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty + \infty = +\infty$

اتجاه التغير

f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ حيث: $g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$

نلاحظ أن: $g'(x) > 0$ من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ وعليه الدالة g متزايدة تماما.

جدول تغيرات g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ب) تبيان أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ ومتزايدة تماما على

$]0; +\infty[$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد

حقيقي وحيد $\alpha \in]0; +\infty[$ بحيث: $g(\alpha) = 0$

استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

لدينا: $g(]0; \alpha[) =]-\infty; 0[$ معناه $g(x) < 0$ من أجل $x \in]0; \alpha[$.

$g(]\alpha; +\infty[) =]0; +\infty[$ معناه $g(x) > 0$ من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$.

II-1 أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x} = -2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln(x)}{x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ نهاية شهيرة. لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x} = +\infty$

ب) حساب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 - 2 \frac{\left(\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x \right)}{x^2} = \frac{x^2 - 2(1 - \ln x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ج) استنتاج إشارة $f'(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f

X	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ وعليه جدول التغيرات للدالة f يكون كمايلي:

2-أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 2$ يقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

*المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 2$ يقارب لـ (C_f) معناه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2 \ln(x)}{x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ نهاية شهيرة.

*لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ندرس إشارة الفرق: $[f(x) - (x - 2)] = -2 \frac{\ln x}{x}$

نلخص إشارة الفرق والوضعية في الجدول التالي:

x	0	1	$+\infty$
إشارة الفرق		+ 0 -	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ) (C_f) تحت (Δ) (C_f) يقطع (Δ)	

ب) تبين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ثم ايجاد معادلة له و كتابة معادلة للمماس (T)

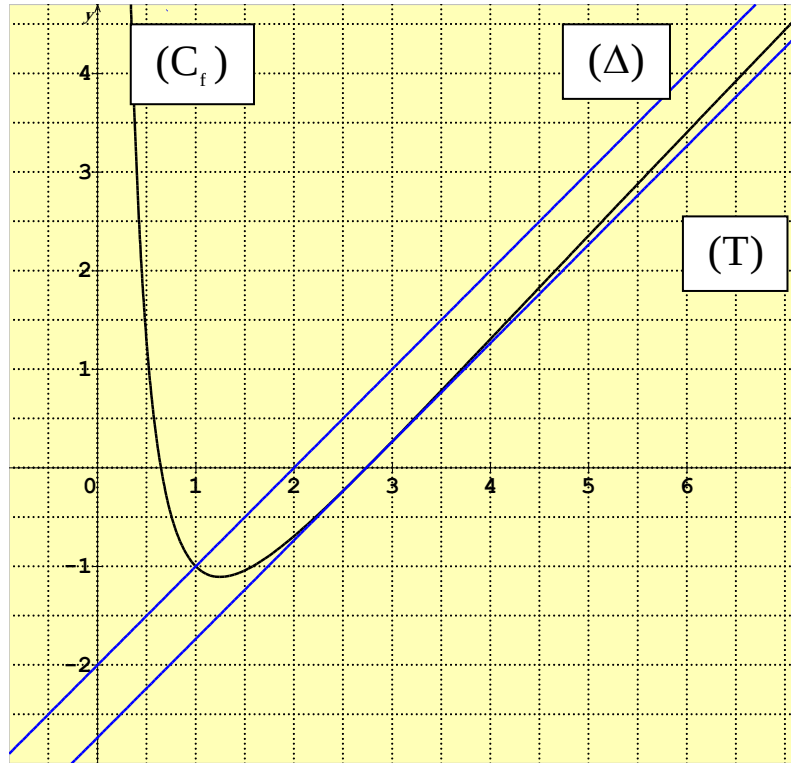
(C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه (T) يساوي 1 أي $f'(x_0) = 1$

$f'(x_0) = 1$ معناه $\frac{g(x_0)}{x_0^2} = 1$ أي $g(x_0) = x_0^2$ أي $-2 + 2 \ln(x_0) = 0$ ومنه $x_0 = e$

(T) له معادلة من الشكل : $y = f'(e)(x - e) + f(e)$ ومنه $y = x - 2 - \frac{2}{e}$

ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; \alpha[$ و $f(0,6) \times f(0,7) < 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α محصور بين 0,6 و 0,7 يحقق $f(x_1) = 0$
 الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$ و $f(2,7) \times f(2,8) < 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد β محصور بين 2,7 و 2,8 يحقق $f(x_2) = 0$
 *رسم كلا من (Δ) و (T) و (C_f) .



3- المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $(m+2)x + 2\ln(x) = 0 \dots (1)$

$$(1) \text{ تكافئ } m = -2 - \frac{2\ln(x)}{x} \text{ وتكافئ } x + m = f(x) \text{ وتكافئ الجملة: } \begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases}$$

حلول الجملة السابقة هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$ والمنحنى (C_f) من البيان نميز الحالات التالية:

(1) $m < -2 - \frac{2}{e}$ المعادلة (1) لا تقبل حلول ، (2) $m = -2 - \frac{2}{e}$ المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا

(3) $-2 - \frac{2}{e} < m < -2$ المعادلة (1) تقبل حلين ، (4) $m \geq -2$ المعادلة (1) لا تقبل حلا واحدا

$$\begin{cases} f'(\frac{1}{2}) = 0 \\ f(\frac{1}{2}) = -1 \end{cases} \quad \text{المماس في النقطة } A(\frac{1}{2}; 1) \perp (C_f) \text{ موازيا لحامل محور الفواصل معناه}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \cdot 4x^2 - 8x(a + b \ln(2x))}{(4x^2)^2} = \frac{b - 2(a + b \ln(2x))}{4x^3} \quad \text{ومنه } f(x) = \frac{a + b \ln(2x)}{4x^2} \quad \text{لدينا:}$$

$$f(\frac{1}{2}) = -1 \quad \text{معناه } f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{1} = 1 \quad \text{ومنه } a = 1$$

$$f'(\frac{1}{2}) = 0 \quad \text{معناه } b - 2a = 0 \quad \text{ومنه } b = 2a \quad \text{أي } b = 2$$

2- أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ وتفسير النتيجةين بيانيا

$$g(x) = \frac{1 + 2 \ln(2x)}{4x^2} \quad \text{الدالة المعرفة على }]0; +\infty[\text{ ب:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{(2x)^2} = 0 \quad \text{لأن نهاية شهيرة} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(2x)}{(2x)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^2 = 0^+ \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + 2 \ln(2x) = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2 \ln(2x)}{(2x)^2} = -\infty$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

حساب $g'(x)$ ودراسة إشارته

$$g'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot 4x^2 - 8x(1 + 2 \ln(2x))}{(4x^2)^2} = \frac{8x(1 - 1 - 2 \ln(2x))}{16x^4} = -\frac{\ln(2x)}{x^3}$$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $-\ln(2x)$

$$x < \frac{1}{2} \text{ معناه } g'(x) > 0 \text{ و } x > \frac{1}{2} \text{ معناه } g'(x) < 0 , x = \frac{1}{2} \text{ معناه } g'(x) = 0$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	$f(\frac{1}{2})$	0

جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

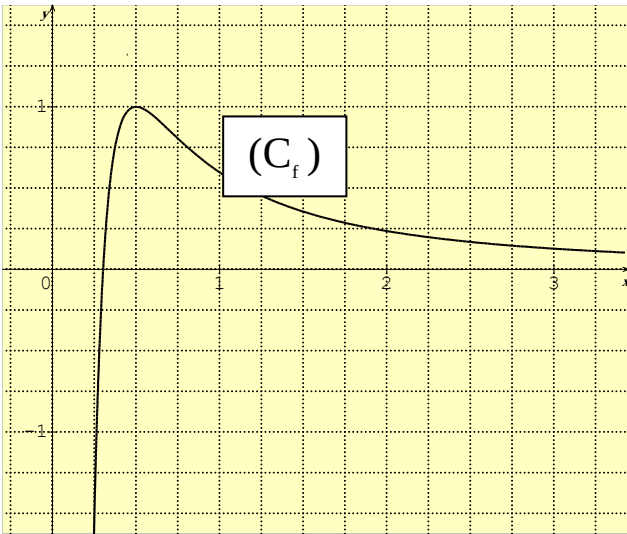
(ج) حل في $]0; +\infty[$ المعادلة: $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0 \text{ معناه } (1 + 2\ln(2x)) = 0$$

$$\text{معناه } \ln(2x) = -\frac{1}{2} \text{ ومعناه } x = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

من الجواب السابق نستنتج أن (C_f) يقطع محور

الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.



التمرين 36: دورة 2010

أ) احساب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

لدينا: دالة معرفة على $[1; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = 2x + \ln x$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ نهاية شهيرة.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g.

لدينا: $g'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ ، نلاحظ أن $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

x	1	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	2	$+\infty$

(ج) تبين أنه من أجل كل $x \in [1; +\infty[: g(x) \neq 0$.

من جدول تغيرات g لدينا صورة المجال $[1; +\infty[$ بالدالة g هو المجال $[2; +\infty[$ أي $g(x) \geq 2$ ومنه من أجل كل $x \in [1; +\infty[: g(x) \neq 0$.

$$f(x) = \frac{6 \ln x}{2 + \frac{\ln x}{x}} \quad \text{أ-2) تبين أن:}$$

$$f(x) = \frac{6 \ln x}{2 + \frac{\ln x}{x}} = \frac{6 \ln x}{\frac{2x + \ln x}{x}} = \frac{6 \ln x}{x} \cdot \frac{x}{2x + \ln x} = \frac{6 \ln x}{2x + \ln x} \quad \text{لدينا:}$$

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ والاستنتاج.

باستعمال العبارة السابقة لـ $f(x)$ نجد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0}{2+0} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ نهاية شهيرة

(ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيرات f .

$$f'(x) = \frac{\frac{6}{x}(2x + \ln x) - (2 + \frac{1}{x})(6 \ln x)}{(2x + \ln x)^2} = \frac{12 + \frac{6 \ln x}{x} - \frac{12 \ln x}{x} - \frac{6 \ln x}{x}}{(2x + \ln x)^2} = \frac{12(1 - \ln x)}{x(2 + \ln x)^2}$$

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$f(e)$	
	0		0

من العبارة الأخيرة لـ $f'(x)$ نستنتج أن

إشارته هي حسب إشارة $1 - \ln x$.

$f'(x) = 0$ معناه $x = e$ ، $f'(x) < 0$

معناه $x > e$ و $f'(x) > 0$ معناه $x < e$

وعليه f متزايدة تماماً على $[1; +\infty[$ وجدول تغيراتها هو كالآتي

(د) تعيين قيمة k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متميزين

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن: $0 < f(x) < f(e)$ من أجل كل $x \in [1; +\infty[$

أي $0 < k < f(e)$ ومنه $k \in \left]0; \frac{6}{2e+1}\right]$ لاحظ: $f(e) = \frac{6}{2e+1}$.

هـ) إيجاد معادلة للمماس (Δ_1) لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1.

(Δ_1) له معادلة من الشكل: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه $y = 3(x-1)$ أي $y = 3x - 3$

3-أ) تشكل جدول تغيرات الدالة h.

لدينا: h دالة معرفة على $[1; +\infty[$ ب: $h(x) = f(e^x)$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^x) = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $h(1) = f(e) = \frac{6}{2e+1}$

اتجاه التغير: $h'(x) = e^x f'(e^x) = \frac{12(1-x)}{(2e^x + x)^2}$ وإشارة

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	0	-
$h(x)$	$h(1)$	0

$h'(x) < 0$ لأن $1-x < 0$ على $[1; +\infty[$

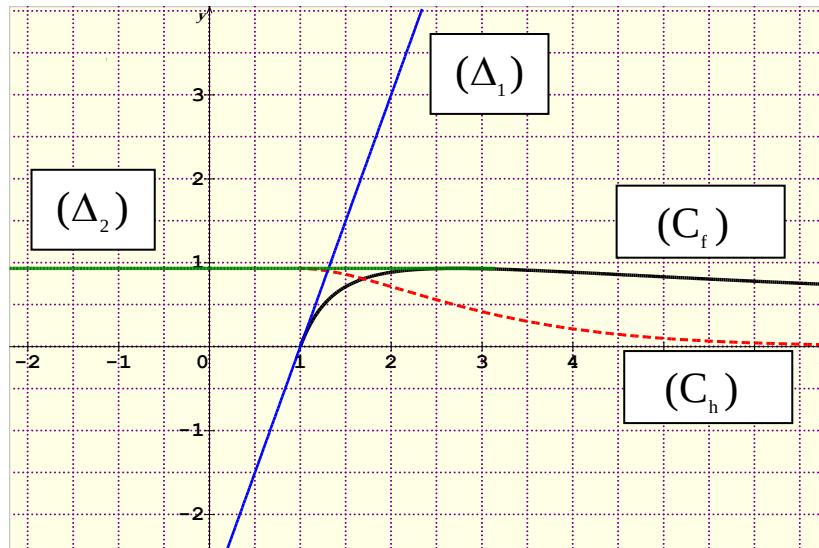
ومنه الدالة h متناقصة تماما على $[1; +\infty[$

جدول التغيرات:

ب) إيجاد معادلة للمماس (Δ_2) لـ (C_h)

(Δ_2) له معادلة من الشكل: $y = h'(1)(x-1) + h(1)$ ومنه $y = 0(x-1) + h(1)$ أي $y = \frac{6}{2e+1}$

ج) رسم كلا من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (C_f) و (C_h) في المعلم السابق.



شعبة : الرياضيات

التمرين 37: دورة 2019

1) برهن أن: - إذا كان $x > 1$ فإن: $1 - x - 2x \ln x < 0$ - وإذا كان $0 < x < 1$ فإن: $1 - x - 2x \ln x > 0$.

من أجل كل $x > 1$ فإن $\ln x > 0$ ومنه $-2x \ln x < 0$ و $1 - x < 0$ وعليه $1 - x - 2x \ln x < 0$
من أجل كل $0 < x < 1$ فإن $\ln x < 0$ ومنه $-2x \ln x > 0$ و $1 - x > 0$ وعليه $1 - x - 2x \ln x > 0$

2- أ) أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين .

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x \ln x) = 1 = f'_d(0)$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ ن. هـ

كتابة معادلة لنصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم.

معادلة معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة 0 هي من الشكل: $y = f'_d(0)(x - 0) + f(0) = x$

ب) دراسة الوضع النسبي للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) .

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق $f(x) - x = -x^2 \ln x$ وهي عكس إشارة $\ln x$ أي:

من أجل كل $0 < x < 1$ فإن $\ln x > 0$ وعليه يكون (C_f) يقع فوق (Δ)

من أجل كل $x > 1$ فإن $\ln x < 0$ وعليه يكون (C_f) يقع تحت (Δ)

من أجل كل $x = 1$ فإن $\ln x = 0$ وعليه يكون (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياتها (1;1)

من أجل كل $x = 0$ فإن $x^2 = 0$ وعليه يكون (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياتها (0;0)

ج) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - x \ln x) = -\infty$$

د) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ حيث: $f'(x) = 1 - 2x \ln x - x$

حسب ما ورد في الجواب 1) نستنتج أن الدالة f :

من أجل كل $x > 1$ فإن $1 - x - 2x \ln x < 0$ وعليه تكون f متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$

من أجل كل $0 < x < 1$ فإن $1 - x - 2x \ln x > 0$ وعليه تكون f متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	0	1	$-\infty$

4- أ) كتابة معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) الموازي للمستقيم (Δ)

معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) الموازي للمستقيم (Δ) من الشكل: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

حيث $f'(a) = 1$ لأن معامل توجيه (Δ) هو 1 حيث a فاصلة نقطة التماس .

$$f'(a) = 1 \text{ معناه } a(-2\ln a - 1) = 0 \text{ ومعناه } -2\ln a - 1 = 0 \text{ لأن } a = 0 \text{ مرفوض أي } a = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\text{وعليه: } y = x + \frac{1}{2e} \text{ أي } y = f'(e^{\frac{1}{2}})(x - e^{\frac{1}{2}}) + f(e^{\frac{1}{2}})$$

ب) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[1; +\infty[$ حلا وحيدا α ، ثم تحقق أن $1,76 < \alpha < 1,77$.

* الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[1; +\infty[$ و $f(1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ و $0 \in]-\infty; 1[$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha) = 0$

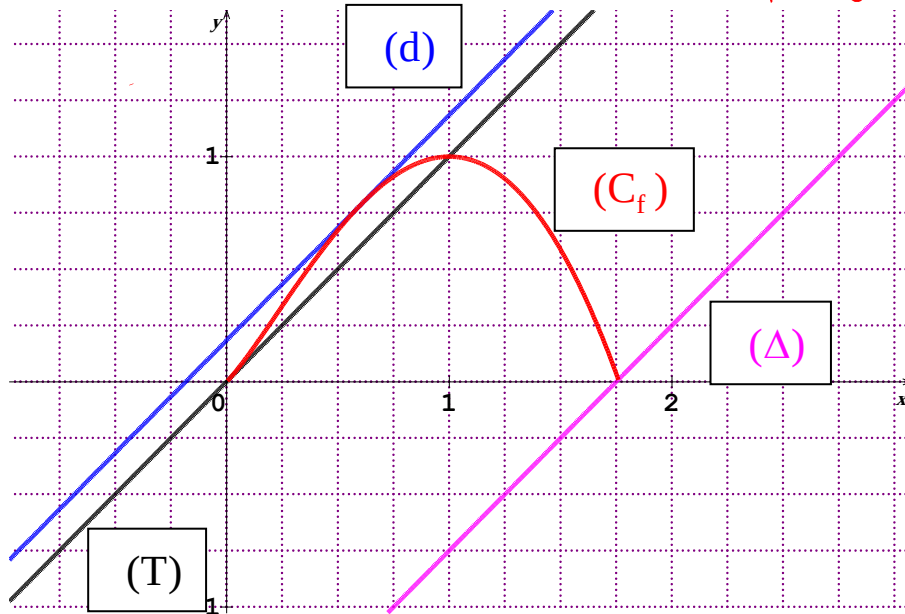
لدينا: $f(1,76) \cdot f(1,77) < 0$ لأن: $f(1,76) = 0,9$ و $f(1,77) = -0,01$ ومنه $1,76 < \alpha < 1,77$

ج) كتابة معادلة للمستقيم (d) الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة ذات الاحداثين $(\alpha; 0)$

المستقيم (d) الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة ذات الاحداثين $(\alpha; 0)$

له معادلة من الشكل: $y = 1(x - \alpha) + f(\alpha)$ أي $y = x - \alpha$

رسم كلا من (T)، (d) و (Δ) ثم المنحنى (C_f) .



5) تعيين عدد حلول المعادلة: $x^2 \ln x + m = 0$ في المجال $[0; \alpha]$

$$\begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases} \text{ المعادلة } x^2 \ln x + m = 0 \text{ تكافئ } x - x^2 \ln x = x + m \text{ وتكافئ } f(x) = x + m$$

حلول المعادلة بيانها هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم الذي له معادلة من الشكل $y = x + m$ حيث $m \in [0; \alpha]$ من البيان نميز الحالات التالية:

1) $0 \leq m \leq \alpha$ المعادلة تقبل حل واحد . 2) $0 < m < \frac{1}{2e}$ المعادلة تقبل حلين موجبين

3) $m = \frac{1}{2e}$ المعادلة تقبل مضاعف موجب . 4) $m > \frac{1}{2e}$ المعادلة لا تقبل حلول

1-أ) تبين أن f مستمرة عند 0 بقيم أكبر

f مستمرة عند 0 بقيم أكبر معناه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x + 1 - \frac{1}{\ln x} \right] = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} = 1$

ب) حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ ، ثم تفسير النتيجة بيانياً.

لأن $\lim_{h \rightarrow 0} \ln h = -\infty$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + 1 - \frac{1}{\ln h} - 1}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\ln h} = +\infty$

معناه المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس يوازي محور الترتيب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$

2-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = +\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} = -\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0^-$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} = +\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

الدالة f قابلة للاشتقاق على كلا من المجالين $]1; +\infty[$ و $]0; 1[$ حيث: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x(\ln x)}$

من هذه العبارة نستنتج أن f متزايدة تماماً على مجالي تعريفها و جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	1	$+\infty$	$+\infty$

3) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) و تعيين معادلة له

لدينا: $f(x) = x + 1 - \frac{1}{\ln x}$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

وعليه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مائل (Δ) له معادلة من الشكل: $y = x + 1$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق: $[f(x) - (x + 1)]$

إشارة الفرق $[f(x) - (x+1)] = \frac{-1}{\ln x}$ هي إشارة $-\ln x$ حيث:

من أجل كل $x \in]0;1[$ يكون $-\ln x > 0$ وعليه يكون (C_f) فوق (Δ)

من أجل كل $x \in]1;+\infty[$ يكون $-\ln x < 0$ وعليه يكون (C_f) تحت (Δ)

4) تبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α حيث $1,49 < \alpha < 1,5$

لتبين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α نبين أن المعادلة

$f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $1,49 < \alpha < 1,5$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة

من جدول التغيرات الدالة مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]1;+\infty[$

ولدينا $f(1,49) \cdot f(1,5) < 0$ لأن $f(1,49) = -0,01$ و $f(1,5) = 0,03$

وعليه وحسب باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث

$1,49 < \alpha < 1,5$ ومعناه المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α .

تبين أن معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ω هي من الشكل: $y = (\alpha + 3 + \frac{1}{\alpha})(x - \alpha)$

معادلة معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ω هي من الشكل: $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

ولدينا: $f(\alpha) = 0$ و $f'(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha(\ln \alpha)^2} = 1 + \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha} = \alpha + 3 + \frac{1}{\alpha}$

وعليه المماس عند النقطة ω من الشكل: $y = (\alpha + 3 + \frac{1}{\alpha})(x - \alpha)$

5) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) في آخر الحل

6- أتبين أن الدالة h متزايدة تماماً على المجال $]1;+\infty[$ وإشارة $h(x)$.

h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كمايلي: $h(x) = 1 - x + x \ln x$.

* من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$: $h'(x) = -1 + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x$

$h'(x) \geq 0$ من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ وعليه الدالة h متزايدة تماماً على $]1;+\infty[$.

** (1) الدالة h متزايدة تماماً على المجال $]1;+\infty[$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{1}{x} - 1 + \ln x) = +\infty$ و $h(1) = 0$

من (1) و (2) نستنتج أن $h(x) \geq 0$ من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$

ب) تبين أنه من أجل كل $x > 1$: $f(x) - x + \frac{1}{x \ln x} = \frac{h(x)}{x \ln x}$

لدينا: من أجل كل $x > 1$: $f(x) - x + \frac{1}{x \ln x} = 1 - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{x \ln x} = \frac{x \ln x - x + 1}{x \ln x} = \frac{h(x)}{x \ln x}$

استنتاج أنه من أجل كل $x > 1$: $x - \frac{1}{x \ln x} < f(x) < x+1$.

من أجل كل $x > 1$: $x - \frac{1}{x \ln x} < f(x) < x+1$ تكافئ $f(x) < x+1$ و $f(x) > x - \frac{1}{x \ln x}$

لدينا: $f(x) - (x+1) = -\frac{1}{\ln x} < 0$ من أجل كل $x > 1$ وعليه $f(x) < x+1$

$f(x) - x + \frac{1}{x \ln x} = \frac{h(x)}{x \ln x} > 0$ من أجل كل $x > 1$ وعليه $f(x) > x - \frac{1}{x \ln x}$

7, تبين أن : $\frac{1}{2}(e^2 - \alpha^2) - \ln(\alpha+1) < A < \frac{1}{2}(e - \alpha)(e + \alpha + 2)$

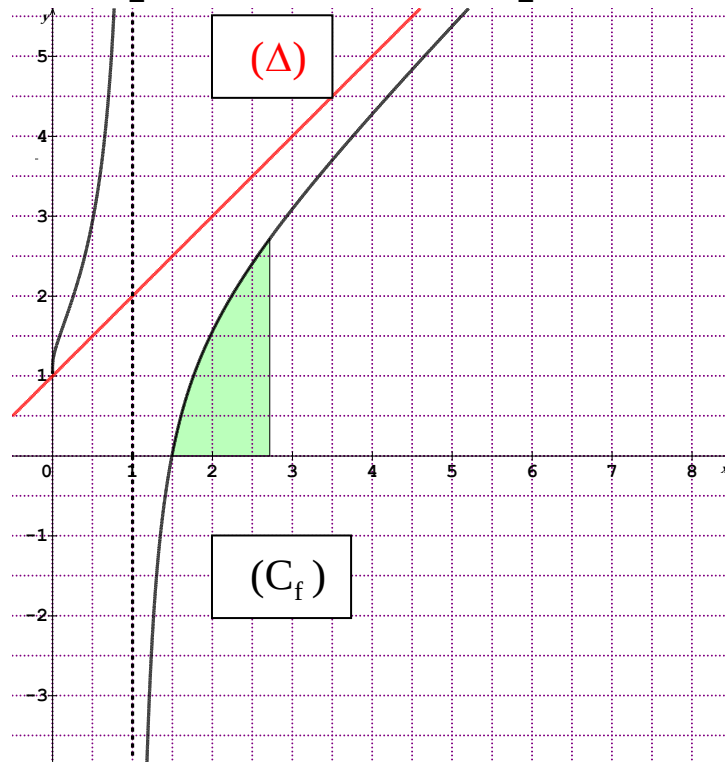
لدينا من أجل كل $x > 1$: $x - \frac{1}{x \ln x} < f(x) < x+1$ حسب الجواب السابق

وعليه : $\int_{\alpha}^e (x - \frac{1}{x \ln x}) dx < \int_{\alpha}^e f(x) dx < \int_{\alpha}^e (x+1) dx$ حسب خواص التكامل

$$\int_{\alpha}^e (x - \frac{1}{x \ln x}) dx = \int_{\alpha}^e (x - \frac{1}{x \ln x}) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - \ln(\ln x) \right]_{\alpha}^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \ln(\ln \alpha) = \frac{1}{2} (e^2 - \alpha^2) - \ln(\alpha+1)$$

$$\int_{\alpha}^e (x+1) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + x \right]_{\alpha}^e = \frac{1}{2} e^2 + e - \frac{1}{2} \alpha^2 - \alpha = \frac{1}{2} (e - \alpha)(e + \alpha + 2)$$

نستنتج مما سبق أن : $\frac{1}{2}(e^2 - \alpha^2) - \ln(\alpha+1) < A < \frac{1}{2}(e - \alpha)(e + \alpha + 2)$



I-1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

لدينا: $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ ونلاحظ أن $g'(x) < 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ وعليه تكون الدالة g متناقصة على المجال $]0; +\infty[$.

2- أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حداً وحيداً α من $]1,76; 1,77[$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على $]0; +\infty[$ و $g(1,76) = +0,0029$ و $g(1,77) = -0,006$ وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $1,76 < \alpha < 1,77$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:
من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن: $g(x) > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) < 0$.

II-1) اثبات أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 من اليمين.

لدينا الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x - \ln x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

f مستمرة عند العدد 0 من اليمين معناه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x - \ln x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$$

حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ وتفسير النتيجة بيانياً

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^2 - x \ln x} = 1$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ نهاية شهيرة.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 = f'(0) \quad \text{تكافئ}$$

أي أن f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين وأن (C_f) يقبل نصف مماساً ميله 1 عند المبدأ O .

2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - \ln x)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(x - \ln x) - (1 - \frac{1}{x})(x+1)}{x(x - \ln x)^2} = \frac{-\ln x + \frac{1}{x}}{(x - \ln x)^2} = \frac{g(x)}{(x - \ln x)^2} \quad \text{لدينا: } f(x) = \frac{x+1}{x - \ln x} \text{ ومنه}$$

3) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وتفسير ذلك بيانياً.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{\ln x}{x})} = 1$$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

مما سبق نستنتج أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f يكون كما يلي

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	1

(4) -تبيان أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $h(x) > 0$

h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي: $h(x) = x - \ln x$.

من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$ $h'(x) = \frac{x-1}{x}$

$h'(x) = 0$ معناه $x = 1$ ولدينا $h'(x) < 0$ معناه $x \in]0; 1[$ و $h'(x) > 0$ معناه $x \in]1; +\infty[$

لدينا: $h(1) = 1$ أي أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ $h(x) \geq 1$ وعليه $h(x) > 0$

استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = 1$.

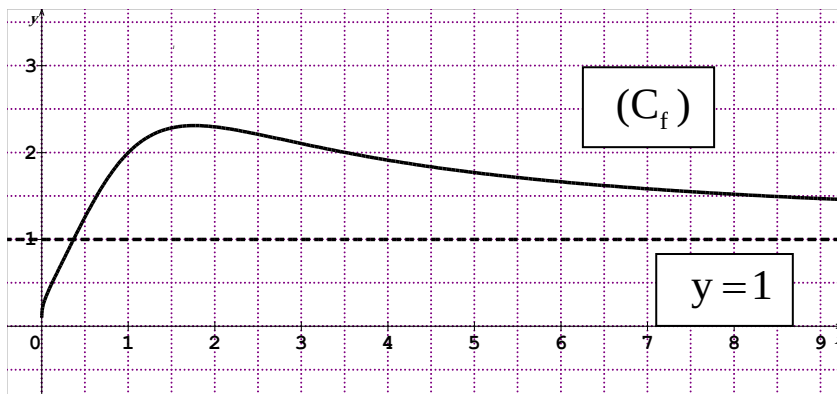
لتحديد وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = 1$. ندرس إشارة الفرق: $f(x) - 1$

$$f(x) - 1 = \frac{x+1}{x - \ln x} - 1 = \frac{1 + \ln x}{x - \ln x} = \frac{1 + \ln x}{h(x)}$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة البسط $1 + \ln x$ لأن $h(x) > 0$ وهي حسب الجدول التالي

x	0	e^{-1}	$+\infty$
إشارة $(1 + \ln x)$		-	+
الوضعية		(T) تحت (C_f)	(T) فوق (C_f)
		(T) يقطع (C_f)	

ب) رسم المنحنى (C_f) .



التمرين 40: دورة 2017 الإستدراكية

I) دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم استنتاج إشارة $g(x)$.

لدينا: الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = x + 2 - \ln x$
 * حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ وإشارته هي حسب إشارة $x-1$
 $g'(x) = 0$ من أجل $x = 1$

و $g'(x) < 0$ من أجل $x \in]0; 1[$ وتكون الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$.

$g'(x) > 0$ من أجل $x \in]1; +\infty[$ وتكون الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$

* لدينا: $g(1) = 3$ ومنه نستنتج انه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ يكون لدينا: $g(x) \geq 3$
 وعليه إشارة $g(x)$ تكون موجبة تماما من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

II-1) تبين أن: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f'(x) = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$

الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x) = \frac{1}{2} \left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x} \right)$

لدينا: $f'(x) = \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{\frac{2x}{x^2} - \ln(x^2)}{x^2} \right) = -\frac{1}{2} \left[\frac{x^2 + 2 - \ln(x^2)}{x^2} \right] = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

من العبارة $f'(x) = \frac{-g(x^2)}{2x^2}$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $-g(x^2)$ وهي كمايلي
 $-g(x^2) < 0$ لأن $g(x^2) > 0$ انظر إشارة $g(x)$ في الجواب السابق
 وعليه تكون الدالة f متناقصة تماما على مجالي تعريفها.

2-أ) حساب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x) + f(x)$ ثم تفسير النتيجة بيانيا

لدينا: $f(-x) + f(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + e + \frac{\ln(x^2)}{x} \right) + \left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x} \right) \right] = e$

من العبارة $f(-x) + f(x) = e$ والتي تكافئ $f(2(0) - x) + f(x) = 2(\frac{1}{2}e)$

نستنتج ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف إحداثيها $(0; \frac{1}{2}e)$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم استنتاج $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} \right) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + e) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} \right) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x} \right) = -\infty$

لدينا: $f(x) = e - f(-x)$ وعليه $f(-x) + f(x) = e$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = -\infty$

(ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-		-
f(x)	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

(3) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب لـ (C_f).

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$ مقارب مائل لـ معناه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{e}{2} \right) \right] = 0$

لدينا $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} \right) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{e}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{\ln(x^2)}{x} \right) = 0$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = -\frac{1}{2} \frac{\ln(x^2)}{x}$

معناه $x^2 = 1$ أي $x \in \{1; -1\}$ وعليه (C_f) يقطع (Δ) في نقطتين فاصلتهما 1 و -1

الجدول التالي يلخص إشارة الفرق

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$-\ln(x^2)$	-	0	+	0	-
x		-		+	
إشارة الفرق	+	0	-	0	-

معناه $-\frac{\ln(x^2)}{x} < 0$ $x \in]-1; 0[\cup]1; +\infty[$ وعليه يكون (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

معناه $-\frac{\ln(x^2)}{x} > 0$ $x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[$ وعليه يكون (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

4-أ) اثبات أنه يوجد مماسان لـ (C_f) معامل توجيه كل منهما $-\frac{1}{2}$ ثم جد معادلة لكل منهما.

نبين أن المعادلة $f'(x_0) = -\frac{1}{2}$ تقبل حلين متميزين

$$x_0 = -e \text{ أو } x_0 = e \text{ أي } \ln x_0^2 = 2 \text{ أي } g(x_0^2) = x_0^2 \text{ تكافئ } \frac{-g(x^2)}{2x^2} = -\frac{1}{2} \text{ تكافئ } f'(x_0) = -\frac{1}{2}$$

إيجاد معادلتَي المماسين

أولاً: معادلة المماس (T_1) عند النقطة ذات الفاصلة e

$$(T_1) : y = -\frac{1}{2}(x - e) + f(e) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e - \frac{1}{e}$$

ثانياً: معادلة المماس (T_2) عند النقطة ذات الفاصلة $-e$

$$(T_2) : y = -\frac{1}{2}(x + e) + f(e) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e + \frac{1}{e}$$

ب) تبين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β

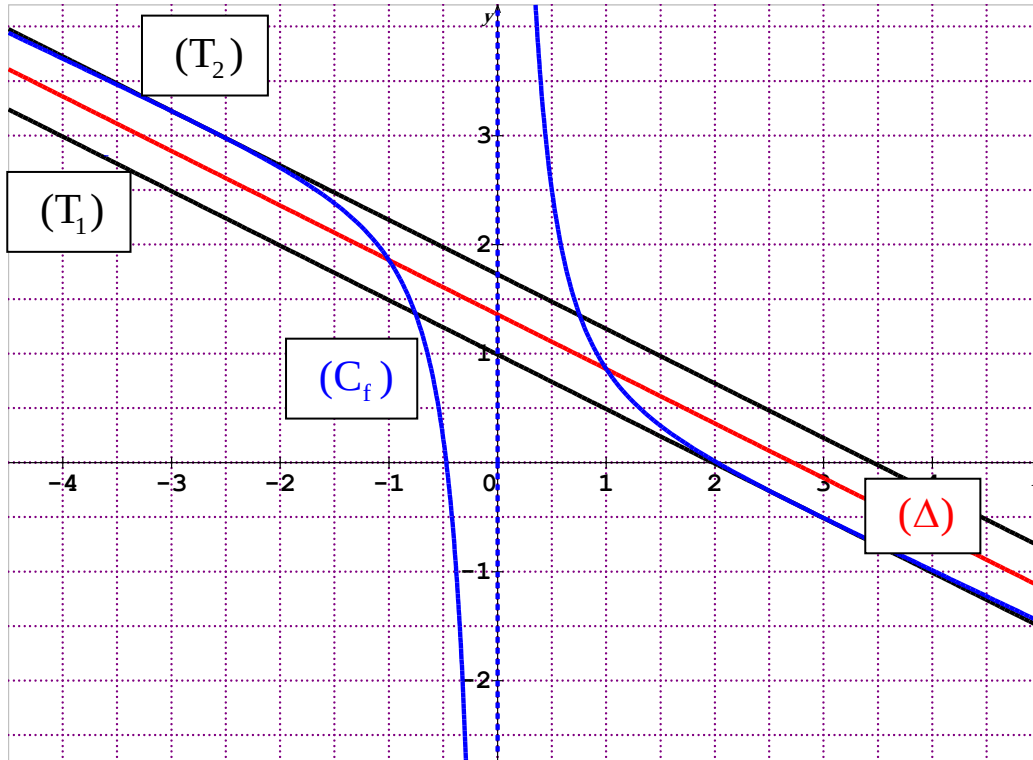
* الدالة f مستمرة ومتناقصة تماماً على $]-\infty; 0[$ و $0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

ولدينا: $f(-0,4) \times f(-0,5) < 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة β تحقق: $f(\beta) = 0$ حيث $-0,5 < \beta < -0,4$.

* الدالة f مستمرة ومتناقصة تماماً على $0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا: $f(2) \times f(2,1) < 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha) = 0$ حيث $2 < \alpha < 2,1$.

5) رسم المماسين والمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .



6) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x(e - 2m) = \ln(x^2)$ حلاً وحيداً

لدينا: $x(e - 2m) = \ln(x^2)$ تكافئ $m = \frac{1}{2}(e - \frac{\ln(x^2)}{x})$ وتكافئ $-\frac{1}{2}x + m = f(x)$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + m \dots (1) \\ y = f(x) \dots (2) \end{cases}$$

حلول الجملة السابقة هندسيا هي فواصل نقط تقاطع المستقيم (Δ_m) التي لها معادلة من الشكل $y = -\frac{1}{2}x + m$ والمنحنى (C_f) .

من البيان نجد: $m > \frac{1}{2}e + \frac{1}{e}$ أو $m < \frac{1}{2}e - \frac{1}{e}$

التمرين 41: دورة 2016

I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال

حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x) = (1 + x^2)' + (2 \ln x)' = 2x + \frac{2}{x}$

نستنتج أن: $g'(x) > 0$ لأن $x > 0$ وعليه g تكون متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حدا وحيدا α حيث $0,52 < \alpha < 0,53$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0; +\infty[$ و: $g(0,52) = -0.037$ و $g(0,53) = 0.011$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ فإن: $g(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن: $g(x) > 0$

II-1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = -x + \frac{3 + 2 \ln x}{x}$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \ln(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ نهاية شهيرة و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

2-أ) تبين أنه من أجل كل من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = (-x)' + \left(\frac{3+2\ln x}{x}\right)' = -1 + \frac{\frac{2}{x} \cdot x - 1(3+2\ln x)}{x^2} = \frac{-x^2 - 1 - 2\ln x}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2} \text{ لدينا:}$$

ب) تشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $-g(x)$ وعليه جدول تغيرات f هو

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

ب) تبين أن $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ وإعطاء حصر لـ $f(\alpha)$

*لدينا: $f(\alpha) = -\alpha + \frac{3+2\ln(\alpha)}{\alpha}$ ولدينا أيضا: $g(\alpha) = 0$ ومعناه $2\ln(\alpha) = -1 - \alpha^2$

$$\text{ومنه: } f(\alpha) = -\alpha + \frac{3-1-\alpha^2}{\alpha} = -\alpha + \frac{2}{\alpha} - \alpha = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$$

*الحصر لدينا: (1) $0,52 < \alpha < 0,53...$ (2) $1,88 < \frac{1}{\alpha} < 1,92....$ تكافئ

بطرح (1) من (2) نجد: (3) $1,39 < \frac{1}{\alpha} - \alpha < 1,40....$ وتكافئ (3) $2,71 < f(\alpha) < 2,80....$

3-أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ وتفسير النتيجة بيانيا.

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{x} + 2 \frac{\ln x}{x} \right] = 0 \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ نهاية شهير } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = 0 \text{ ومعناه المستقيم } y = -x \text{ مقارب مائل لـ } (C_f) \text{ عند } +\infty$$

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب المائل $y = -x$: (Δ)

لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x) = \frac{3+2\ln x}{x}$

$$f(x) - (-x) = 0 \text{ معناه } 3 + 2\ln x = 0 \text{ ومعناه } x_0 = \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $3 + 2\ln x$ والموضحة في الجدول التالي

x	0	x_0	$+\infty$
إشارة الفرق		-	+
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)
		(C_f) يقطع (Δ)	

(ج) تبين وجود مماس لـ (C_f) يوازي (Δ) وتعيين معادلة له

(T) يوازي (Δ) معناه (T) و (Δ) لهما نفس الميل ومعناه $f'(a) = -1$

$$f'(a) = -1 \text{ معناه } -\frac{g(a)}{a^2} = -1 \text{ ومعناه } g(a) = a^2 \text{ ومنه } a = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

(T) ذوا المعادلة: $y = -1(x - \frac{1}{\sqrt{e}}) + f(\frac{1}{\sqrt{e}})$ وعليه: $y = -x + 2\sqrt{e}$ حيث $f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{\sqrt{e}} + 2\sqrt{e}$

4) تبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما x_0 و x_1

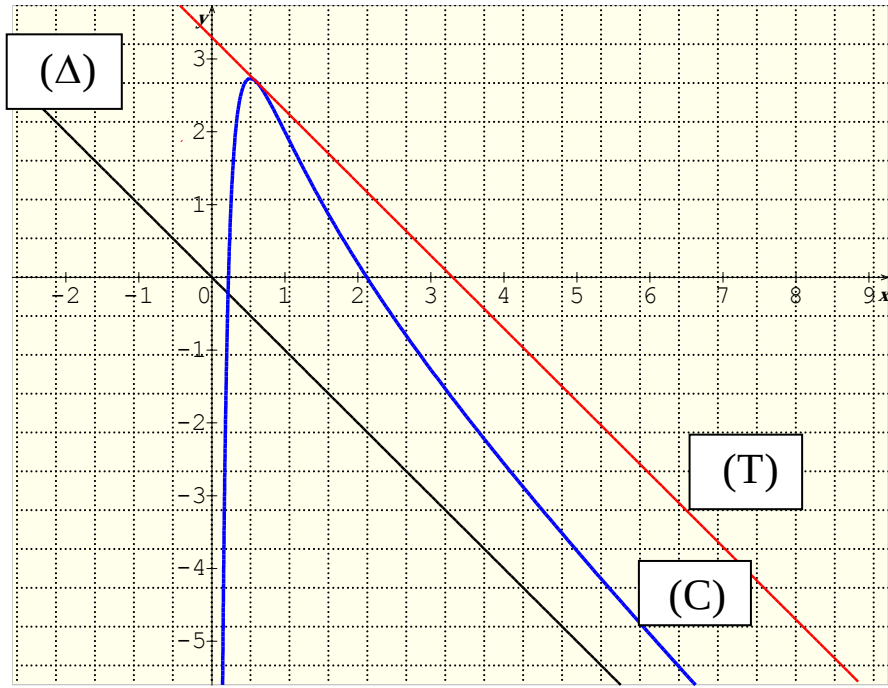
الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha[$ ولدينا: $f(0,22) \times f(0,23) < 0$ وحسب مبرهنة

القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد x_0 محصور بين 0,22 و 0,23 يحقق $f(x_0) = 0$

الدالة f متناقصة على $[\alpha; +\infty[$ ولدينا $f(2,11) \times f(2,13) < 0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة

يوجد عدد وحيد x_1 محصور بين 2,11 و 2,13 يحقق $f(x_1) = 0$

انشاء (Δ) و (T) و (C_f)



5) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $3 + 2\ln x - mx = 0$

نضع: $3 + 2\ln x - mx = 0 \dots (1)$

لدينا (1) تكافئ $m = \frac{3 + 2\ln x}{x}$ وتكافئ $-x + m = f(x)$ وتكافئ $\begin{cases} y = -x + m \\ y = f(x) \end{cases}$

حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = -x + m$ من البيان نميز الحالات التالية:

1) $m \leq 0$ المعادلة (1) ثقيل حاد وحيدا، 2) $0 \leq m \leq 2\sqrt{e}$ المعادلة (1) ثقيل حاد.

3) $m = 2\sqrt{e}$ المعادلة (1) ثقيل حاد مضاعفا، 4) $m > 2\sqrt{e}$ المعادلة (1) لا ثقيل حلول

التمرين 42: دورة 2015

I-1) دراسة استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

لدينا: $f(x) = 1 - x^2 \ln(x)$ و المعرفة على $]0; +\infty[$ و $f(0) = 1$

f مستمرة عند 0 من اليمين معناه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2 \ln x) = 1$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$ نهاية شهيرة.

ومنه الدالة f مستمرة عند 0 من اليمين.

2) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x}$ وتفسير النتيجة هندسيا.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 \ln x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

معناه $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$

ومنه f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين أي (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة التي فاصلتها 0.

2) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^2 \ln x) = -\infty$

2) دراسة اتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f(x) = 1 - x^2 \ln(x)$ و المعرفة على $]0; +\infty[$

ومنه: $f'(x) = -2x \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x} = -x(1 + 2 \ln x)$

$f'(x) = 0$ معناه $-x(1 + 2 \ln x) = 0$ معناه $x_1 = 0$ أو $x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$f'(x) < 0$ معناه $-x(1 + 2 \ln x) < 0$ معناه $x \in \left] \frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty \right[$

$f'(x) > 0$ معناه $-x(1 + 2 \ln x) > 0$ معناه $x \in \left] 0; \frac{1}{\sqrt{e}} \right[$

وعليه جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

x	0	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	1	$f(x_2)$	$-\infty$

3-أ) تبين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$.

f مستمرة و متناقصة على المجال $]x_2; +\infty[$ و $f(x_2) = 1,183$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث:
يحقق $f(\alpha) = 0$ أي α حلا وحيدا للمعادلة $f(x) = 0$.

(ب) التحقق أن $1,531 < \alpha < 1,532$.

$f(1,531) = 0,00012$ و $f(1,532) = 0$ ومنه $1,531 < \alpha < 1,532$.

(4أ) دراسة شفعية الدالة g

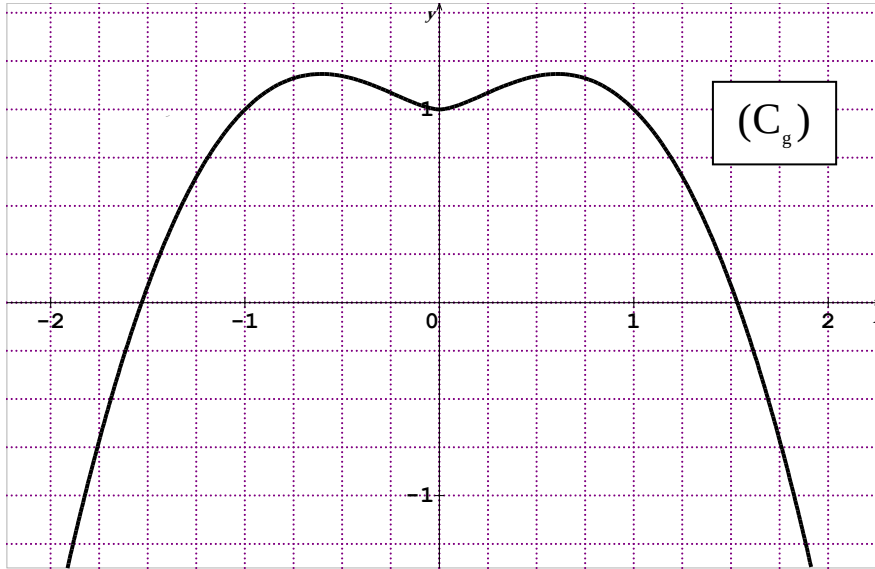
لدينا g معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = f(|x|)$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$: $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$ ومنه نقول أن الدالة g زوجية.

(ب) إنشاء المنحنى (C_g) على المجال $[-2; +2]$

من أجل كل $x \in]0; +2]$ فإن $g(x) = f(x)$ أي $(C_g) = (C_f)$

من أجل كل $x \in [-2; 0[$ فإن $g(x) = f(-x)$ أي (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل



التمرين 43: دورة 2014

1- أ) دراسة تغيرات الدالة f .

f الدالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = (1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x)$.

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$

اتجاه التغير وجدول تغيرات f :

لدينا: $f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)(-1 + \ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)(1 + 2 \ln x) = \frac{1}{x}(-1 + 4 \ln x)$

x	0	$e^{\frac{1}{4}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $-1 + 4\ln x$

ومنه: $f'(x) = 0$ معناه $x = e^{\frac{1}{4}}$

$f'(x) > 0$ معناه $x > e^{\frac{1}{4}}$

و $f'(x) < 0$ معناه $0 < x < e^{\frac{1}{4}}$

(ب) كتابة معادلة المماس (Δ)

(T) له معادلة من الشكل: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ أي $y = f'(e)(x - e) + f(e)$

ومنه: $y = \frac{3}{e}(x - e) + 0$ وعليه: $y = \frac{3}{e}x - \frac{3}{e}$

(ج) تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

لتعيين نقط تقاطع (C_f) نحل المعادلة $f(x) = 0$

$f(x) = 0$ معناه $(1 + 2\ln x)(-1 + \ln x) = 0$ ومعناه $(1 + 2\ln x) = 0$ أو $(-1 + \ln x) = 0$

لدينا: $(1 + 2\ln x) = 0$ معناه $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ و $(-1 + \ln x) = 0$ معناه $x = e$

ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين اللتين احداثياتهما: $(e; 0)$ و $(\frac{1}{\sqrt{e}}; 0)$.

2-أ) دراسة تغيرات الدالة g.

g الدالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = 1 - \ln x$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$

اتجاه التغير وجدول تغيرات f:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

لدينا: $g'(x) = -\frac{1}{x}$ ونلاحظ ان $g'(x) < 0$

وعليه جدول تغيرات g يكون كمايلي:

ب) تعيين الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g) ثم رسم كلا من (C_f) و (C_g) على المجال $]0; e^2]$.

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - g(x)$

$$\text{لدينا: } f(x) - g(x) = (1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x) - (1 - \ln x) = -2(1 + \ln x)(1 - \ln x)$$

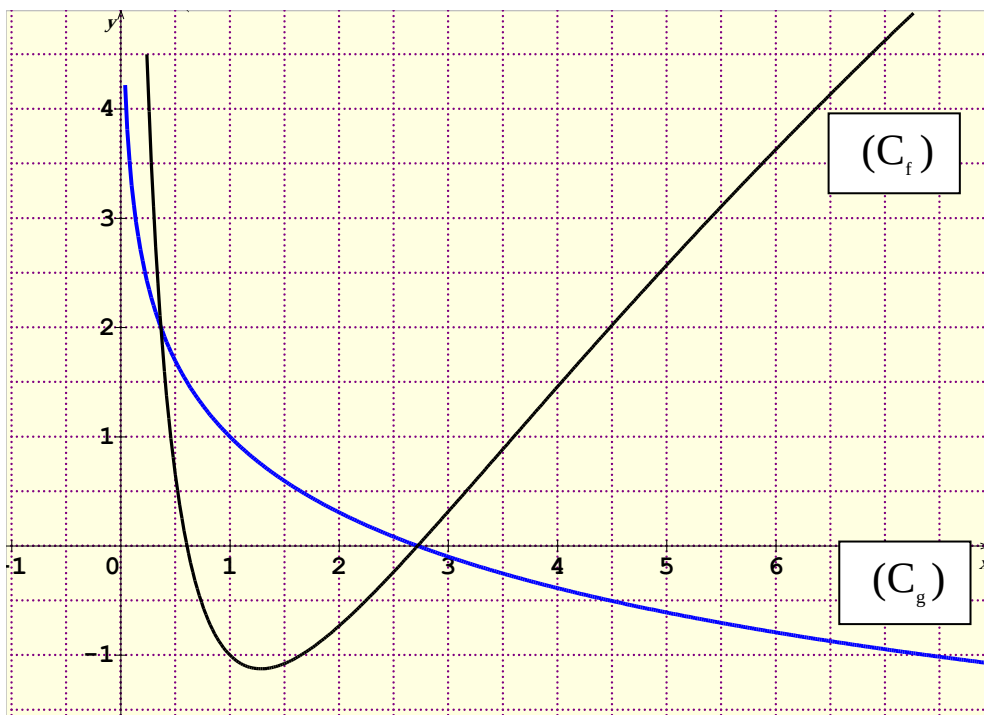
$$\text{ومنه: } f(x) - g(x) = 0 \text{ معناه } (1 + \ln x)(1 - \ln x) = 0 \text{ ومعناه } x = e \text{ أو } x = \frac{1}{e}$$

والجدول التالي يوضح الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g) .

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$(1 + \ln x)$	-	0	+	+
$(1 - \ln x)$	-	0	-	+
إشارة الفرق	+	0	-	+
الوضعية	(C_f) فوق (C_g)	(C_f) تحت (C_g)	(C_f) فوق (C_g)	

نلاحظ أن: (C_f) و (C_g) يتقاطعان في التقطعين اللتين فصلتهما $x = e$ أو $x = \frac{1}{e}$

رسم كلا من (C_f) و (C_g) على المجال $]0; e^2]$.



I-1-أ- دراسة اتجاه تغير الدالة u .

الدالة u معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$

لدينا: $u'(x) = e^x - 3$

$u'(x) = 0$ ومعناه $e^x = \ln 3$ ، $u'(x) > 0$ ومعناه $x > \ln 3$ و $u'(x) < 0$ ومعناه $0 < x < \ln 3$
ومنه: الدالة u متزايدة تماماً على المجال $[\ln 3; +\infty[$ و متناقصة تماماً على المجال $]0; \ln 3[$
ب-تبيان أنه، من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $e^x - e > 3x - 4$

من الجواب السابق الدالة u تقبل قيمة حدية محلية صغرى موجبة هي $u(\ln 3) = 7 - 3\ln 3 - e$

أي من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ أي $u(x) > 0$ أي $e^x - 3x + 4 - e > 0$ ومنه $e^x - e > 3x - 4$.

2-أ-تبيان أن: $v'(1) = 0$

الدالة v معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$

لدينا: $v'(x) = -9x^2 + 8x + \frac{1}{x} = \frac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x}$ ومنه $v'(1) = 0$

ب-اثبات أنه، من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $v(x) \leq 0$

لدينا: إشارة $v'(x)$ هي حسب إشارة $-9x^3 + 8x^2 + 1 = -(x-1)(9x^2 + 8x + 1)$ لأن $v'(1) = 0$

ومنه: إشارة $v'(x)$ هي حسب إشارة $-(x-1)$ لأن $9x^2 + 8x + 1 > 0$ من أجل $x \in]0; +\infty[$

وعليه: $v'(x) > 0$ معناه $x < 1$ و $v'(x) < 0$ معناه $x > 1$

ومنه: الدالة v تقبل قيمة حدية محلية كبرى هي: $v(1) = 0$ أي $v(x) \leq 0$

ج-اثبات أنه، من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$

من الجواب 2-ب-I، لدينا: $v(x) \leq 0$ أي: $-3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x \leq 0$ أي $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$

3-اثبات أنه، من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0$

لدينا: (1) $e^x - e > 3x - 4$ ولدينا: (2) $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$ أي $\frac{1 - \ln x}{x^2} \geq -3x + 4$

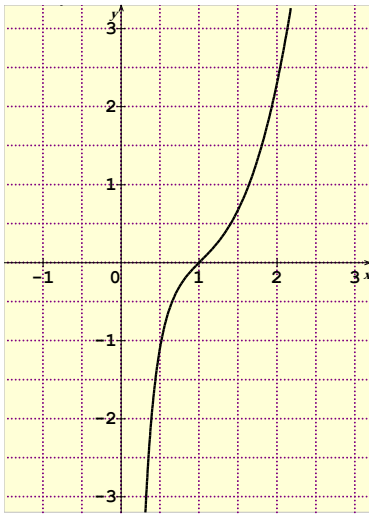
بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد: $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0$.

II-1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$ معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - ex + \frac{\ln x}{x} = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ex + \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - e + \frac{\ln x}{x^2} \right) = +\infty$.

2- تبين أن f متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها



لدينا: $f'(x) = e^x - e + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

نستنتج أن $f'(x) \geq 0$ حسب نتيجة الجواب I-3.

3- حساب $f(1)$ ، ثم تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]0; 2,5[$.

$f(1) = 0$ أي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $A(1; 0)$.

التمرين 45: دورة 2012

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

g دالة معرفة على $] -1; 3[$ ب: $g(x) = 2 \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

النهايات: $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) \ln(x+1) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2(x+1) \ln(x+1) - x}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x}{x+1} = +\infty$.

اتجاه التغير:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(-\frac{1}{2})$	$g(3)$

$$g'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

$g'(x) = 0$ معناه $2x+1=0$ أي $x = -\frac{1}{2}$

واشارة $g'(x)$ هي حسب اشارة $2x+1$ وعليه جدول تغيرات g يكون كمايلي:

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

*الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$ و: $g(-0,8) \times g(-0,7) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$ تحقق: $g(\alpha) = 0$
*المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل معدوم لأن $g(0) = 0$

(3) تعين، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

من الجواب السابق وجدول التغيرات نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:
من أجل كل $x \in]-1; \alpha[\cup]0; 3]$ فإن: $g(x) > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; 0[$ فإن: $g(x) < 0$
(4) أ، حساب $h'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$.

h دالة عددية معرفة على $]-1; 3]$ ب: $h(x) = [g(x)]^2$

لحساب $h'(x)$ نستعمل مشتق دالة مركبة لأن الدالة h هي تركيب الدالة g متبوعة بالدالة مربع
ومنه: $h'(x) = 2g(x).g'(x)$

ب) تعين إشارة $h'(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة h .

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3		
g(x)	+	0	-	-	0	+	
g'(x)	-	-	0	+	+		
h'(x)	-	0	+	0	-	0	+

من العبارة $h'(x) = 2g(x).g'(x)$ نستنتج

أن إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة الجداء

$g(x).g'(x)$ والموضحة في الجدول المقابل

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [g(x)]^2 = +\infty$

وعليه جدول تغيرات الدالة h يكون كمايلي

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3
h'(x)	-	0	+	0	+
h(x)	$+\infty$	$h(\alpha)$	$h(-\frac{1}{2})$	$h(0)$	$h(3)$

1-II) تبين أن f تقبل الاشتقاق عند 0 ثم أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad f \text{ دالة عددية معرفة على }]-1; 3] \text{ كما يلي:}$$

* الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 معناه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = L$ حيث L عدد حقيقي ثابت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = 1$$

* معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 من الشكل: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

ولدينا: $f'(0) = 1$ من الجواب السابق ، $f(0) = 0$ ومنه (T) له معادلة من الشكل: $y = x$

2) - تبين أنه من أجل كل $x \in]-1; 0[\cup]0; 3]$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، واستنتاج اتجاه تغير f

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \ln(x+1) - \frac{x^2}{x+1}}{[\ln(x+1)]^2} = \frac{x(2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1})}{[\ln(x+1)]^2} = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2} \text{ لدينا:}$$

من العبارة $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ نستنتج ان إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $xg(x)$

x	-1	α	0	3
$g(x)$	+	0	-	+
x	-	0	-	+
$f'(x)$	-	0	+	+

والموضحة في الجدول المقابل

ومنه f متناقصة على المجال $]-1; \alpha[$

ومتزايدة على المجال $]\alpha; 3]$

ب- تبين أن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha + 1)$ ، ثم تعين حصرا لـ $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)} = \frac{2\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha} = 2\alpha(\alpha+1) \text{ ومنه } \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \text{ أي } g(\alpha) = 0 \text{ لدينا:}$$

* لدينا: $-0,8 < \alpha < -0,7$ ومنه: $0,2 < \alpha + 1 < 0,3$

وعليه: $0,2 \times 0,7 < -\alpha(\alpha + 1) < 0,3 \times 0,8$

وأخيرا $-0,48 < f(\alpha) < -0,28$ أي $-2,0,3 \times 0,8 < 2\alpha(\alpha + 1) < -2,0,2 \times 0,7$

ج- حساب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات f

لدينا: $f(3) = \frac{9}{\ln 4}$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{\ln(x+1)} = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$

جدول تغيرات f يكون كمايلي:

x	-1	α	0	3
f'(x)	-	0	+	+
f(x)	0	$f(\alpha)$	0	$f(3)$

3- أ- تبين أنه من أجل كل $x \in]-1; 3]$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.

نضع: $h(x) = x - \ln(x+1)$ من أجل كل $x \in]-1; 3]$ ونبين أن: $h(x) \geq 0$

لدينا: $h'(x) = \frac{x}{x+1}$ وإشارته هي حسب إشارة x أي الدالة h تقبل 0 كقيمة حدية صغرى

ومنه: $h(x) \geq 0$ وعليه $x - \ln(x+1) \geq 0$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - x = \frac{x(x - \ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \frac{xh(x)}{\ln(x+1)}$

بأن $h'(x)$ إشارته هي حسب إشارة x من أجل كل $x \in]-1; 3]$ فإن: $f(x) - x \geq 0$

وعليه يكون (C_f) فوق (T) ويمسه في المبدأ.

4- تعيين معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3

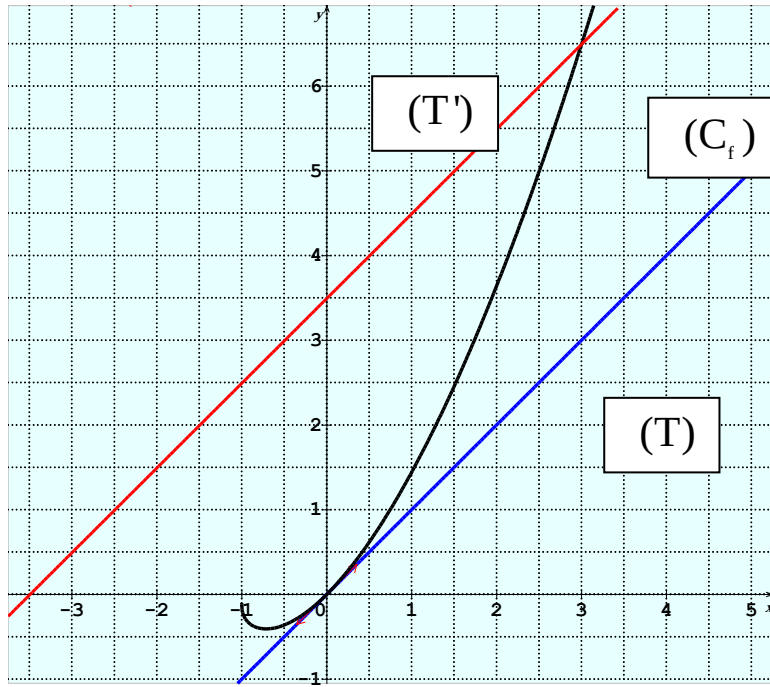
المستقيم (T') له معادلة من الشكل: $y = ax + b$

ولدينا: (T') الموازي لـ (T) معناه لهما نفس الميل أي $a = 1$

ولدينا: (T') يشمل النقطة التي احداثياتها $(3; f(3))$ ومنه $b = f(3) - 3 = \frac{9}{\ln 4} - 3$

ومنه: (T') له معادلة من الشكل: $y = x - 3 + \frac{9}{\ln 4}$

5) رسم (T) ، (T') و (C_f) .



6) المناقشة البيانية ، لعدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

لدينا: $f(x) = x + m$ تكافئ $\begin{cases} y = x + m \\ y = f(x) \end{cases}$

وعليه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = x + m$ الموازي

لكل من المستقيمين (T) ، (T') ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $m < 0$ المعادلة لا تقبل حلول. 2) $m = 0$ المعادلة تقبل حل مضاعف.

3) $0 < m \leq 1$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة.

4) $1 < m \leq f(3)$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب.

التمرين 46: دورة 2011

1- أ) دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + \ln(x^2) - 1$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \ln(x^2) - 1 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + \ln x^2 - 1 = -\infty$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

اتجاه التغير: $g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$

$g'(x) > 0$ وعليه جدول تغيرات g يكون كمايلي:

ب) حساب $g(1)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$.

$g(1) = 0$ وعليه إشارة $g(x)$ تكون حسب

الجدول التالي

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

2- أ) تبين ان الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وأن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

لدينا f الدالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = (1 - \frac{1}{x^2})(\ln x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \ln x + \frac{1}{x} (1 - \frac{1}{x^2}) = \frac{2}{x^3} \ln x + \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{x^2 - 1 + \ln^2}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

من العبارة $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ نستنتج ان

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

ملاحظة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى للمنحنى (δ) ثم إيجاد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x$ ، ماذا تستنتج ؟

* لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - \ln x = -\frac{\ln x}{x^2}$

x	0	1	$+\infty$
الفرق	+	0	-
الوضع	(C_f) تحت (δ)	(C_f) يقطع (δ)	(C_f) تحت (δ)

* إشارة الفرق هي عكس إشارة $\ln x$

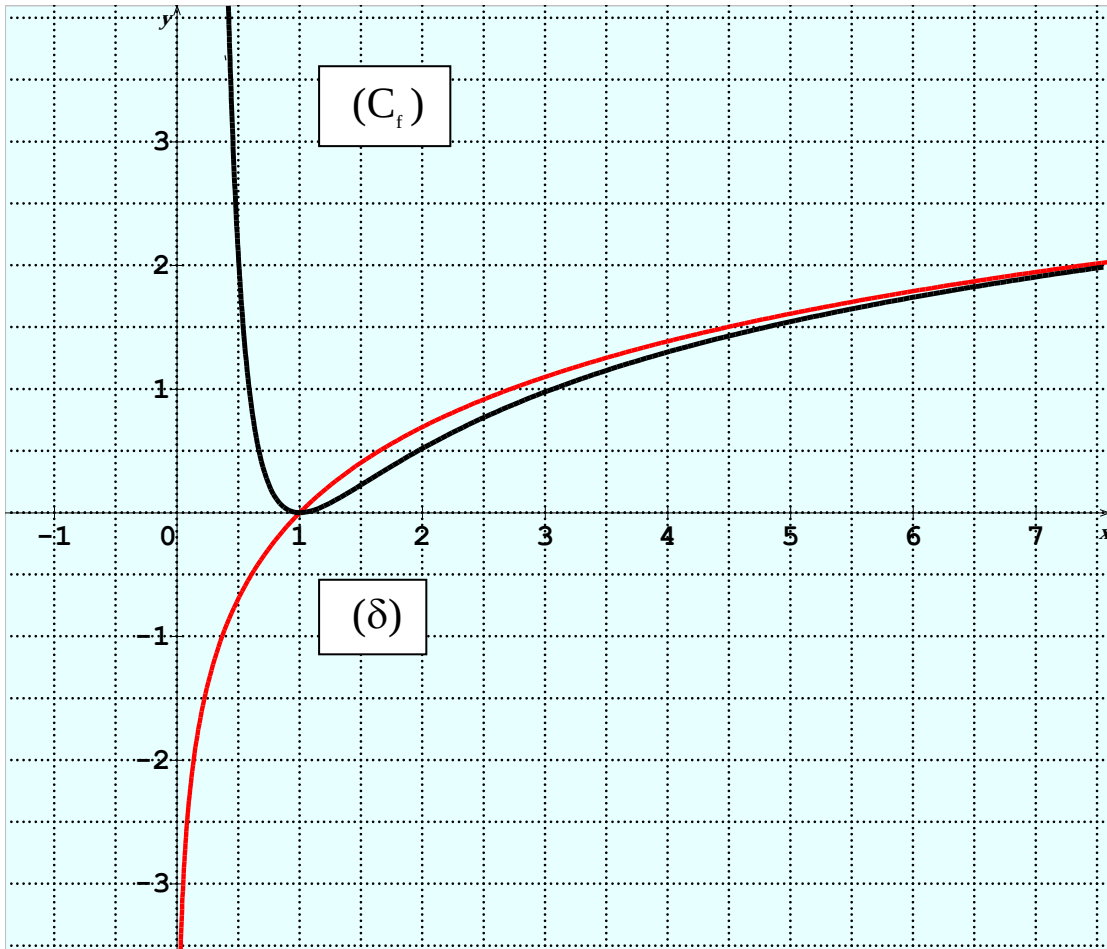
وهي حسب الجدول التالي:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} \right)^2 = 0^*$$

نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x = 0$ تكافئ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = 0$

ومنه (δ) منحنى مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

- رسم (δ) و (C_f) .



التمرين 47: دورة 2010

1- حساب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ وتفسير النتيجة بيانياً.

g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = x - 1 - 2 \ln x$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 - 2 \ln x = +\infty$ ومعناه المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب لـ (C_g) .

2- أ، تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

ب) دراسة تغيرات الدالة g .

x	0	1	2	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	0	$g(2)$	0	$+\infty$

لدينا: $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$ وإشارته

هي حسب إشارة $x-2$

ج) حساب $g(1)$ لدينا: $g(1) = 0$

د) البرهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث $3,5 < \alpha < 3,6$.

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 لأن $g(1) = 0$ وتقبل حل آخر هو α حيث

$3,5 < \alpha < 3,6$ لأن g مستمرة و متزايدة تماماً على $]2; +\infty[$ و: $g(3,5) \times g(3,6) < 0$ ،

حسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α حيث $3,5 < \alpha < 3,6$ تحقق: $g(\alpha) = 0$

x	0	1	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	0 +

هـ) استنتاج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g(\frac{1}{x})$.

*مما سبق نستنتج أن إشارة $g(x)$

$$g(\frac{1}{x}) = 0^* \text{ معناه } x = 1 \text{ أو } x = \frac{1}{\alpha}$$

وإشارة $g(\frac{1}{x})$ هي حسب الجدول التالي

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1	$+\infty$
$g(\frac{1}{x})$	+	0	-	0 +

3-أ- حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وتفسير النتيجة هندسيا.

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

f دالة عددية معرفة على $[0; +\infty[$ كمايلي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x + 1 + x \ln x) = 1 \quad * \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0 \text{ نهاية شهيرة}$$

* تفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{معناه} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

منحنى الدالة f يقبل مماسا معامل توجيهه 1

ب- حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + x + x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) \left(1 - \frac{1}{x} - \ln x\right) = +\infty$$

ج- تبين أنه من أجل x من $[0; +\infty[$ فإن $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة f .

$$\text{لدينا: } f'(x) = -2x + 1 + 2x \ln x + x = -x + 1 + 2x \ln x = x \left(-1 + \frac{1}{x} - 2 \ln \frac{1}{x}\right) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$$

من العبارة $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي حسب اشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ والموضحة في هـ)

د- تشكيل جدول تغيرات الدالة f وتبين أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$ واستنتاج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

x	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	0	1	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \ln \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{-1 + \alpha - \ln \alpha}{\alpha^2} \end{aligned}$$

$$\text{ولدينا: } g(\alpha) = 0 \text{ أي } -\ln \alpha = \frac{1-\alpha}{2} \text{ ومنه: } f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{-1 + \alpha + \frac{1-\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$$

لدينا: $3,5 < \alpha < 3,6$ تكافي كلا من $2,5 < \alpha - 1 < 2,6 \dots (1)$ و $24,5 < 2\alpha^2 < 25,92 \dots (2)$

من (1) و(2) نستنتج أن: $\frac{2,5}{25,92} < \frac{\alpha-1}{2\alpha^2} < \frac{2,6}{24,5}$ أي $0,10 < f(\alpha) < 0,11$

4-رسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0;3]$

