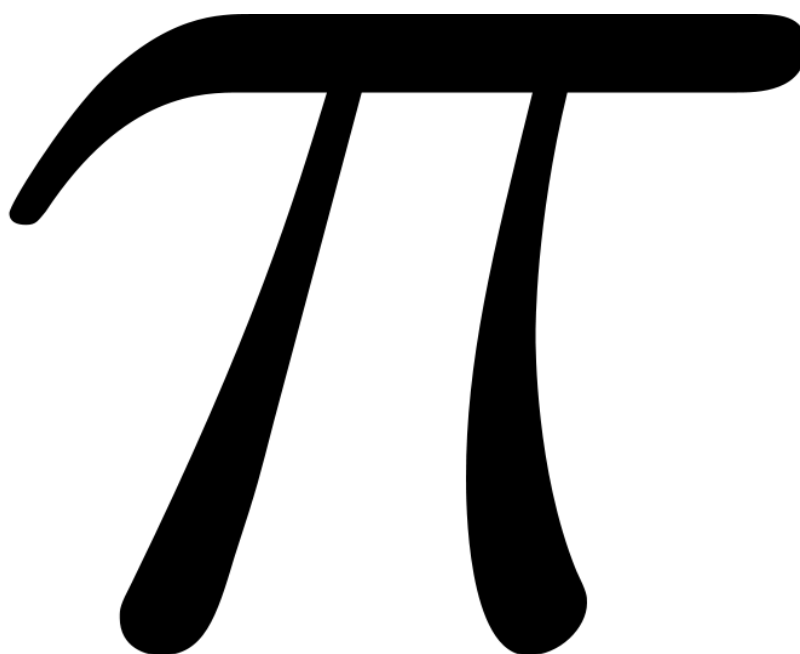


Ce document est distribué gratuitement par le site edudz.net

Exercices de Maths

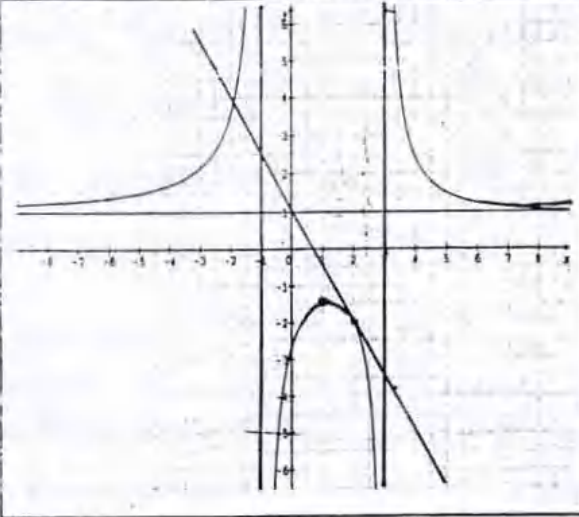
-- Les limites (étude de fonctions) 2AS --

Par M. Moula



Scanné et amélioré par Majda de l'équipe eduDz ;-)

09 / 02 / 2009



التمرين الأول

(C_g) هو التمثيل البياني للدالة g .

1- عين D_g مجموعة تعريف الدالة g ثم جد نهايتها

عند الأطراف المفتوحة لـ D_g .

2- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_g)

3- شكل جدول تغيرات الدالة g معيناً القيم الحدية

لها ، ثم استنتج إشارة دالتها المشتقة.

4- أكتب معادلة المماس لـ (C_g) عند النقطة $B(2, -2)$

باستعمال التقريب التآلفي للدالة g عين قيمة مقربة للعدد $g(2,0004)$.

التمرين الثاني

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس (o, i, j) .

لتكن f دالة معرفة $f(x) = \frac{\alpha x + 2}{x + \beta}$ حيث β, α عدنان حقيقيان.

1- عين D_f مجموعة تعريف f ، ثم عين العددين الحقيقيين β, α إذا علمت أن المستقيم (Δ) ذي

المعادلة $Y = x - 1$ مماساً للمنحنى C_f الممثل للدالة f في النقطة ذات الإحداثيات $(0, -1)$.

2- نضع : $f(x) = \frac{-3x + 2}{x - 2}$ أحسب النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف.

3- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- أثبت أن النقطة $\omega(2, -3)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f .

5- عين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

6- برهن أن المستقيم (δ) ذو المعادلة $Y = -3$ مستقيم مقارب لـ (C_f) .

أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (δ) .

7- دالة معرفة بـ $g(x) = \frac{-3x + 2}{x - 2}$ وضح طريقة لإنشاء منحنى الدالة g بالإستعانة بالمنحنى

(C_f) (لا يطلب الإنشاء).

التمرين الثالث

I. الدالة المعرفة على R كما يلي : $g(x) = x^2 - x$

(δ) التمثيل البياني للدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

- أنشئ المنحنى (δ).

II. $P(x)$ كثير حدود المتغير الحقيقي x حيث : $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$

- أحسب $P(1)$ ثم أدرس إشارة $P(x)$

III. نعتبر f الدالة المعرفة على $R - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x + 1}$

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المعطى.

1- أحسب نهايات f عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.

2- بين أنه من أجل : $f(x) = \frac{P(x)}{(x+1)^2}$: $x \neq -1$

• استنتج اتجاه تغيرات f .

3- شكل جدول تغيرات الدالة f .

4- بين أنه من أجل $x \neq -1$ ، يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = g(x) + \frac{\alpha}{x+1}$ حيث α عدد

حقيقي يطلب تعيينه.

5- أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (δ).

6- أحسب نهاية الفرق $[f(x) - g(x)]$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

• فسر ذلك هندسيا.

• أرسم المنحنى (C) في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ لتكن F دالة معرفة بـ : $F(X) = \frac{\alpha X + 2}{X + \beta}$ حيث

β, α عدنان حقيقيان.

1- عين D_f مجموعة تعريف F ، ثم عين العددين β, α إذا علمت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة :

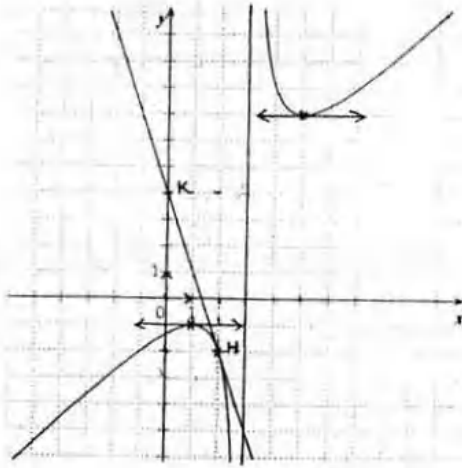
$Y = X - 1$ مماسا للمنحنى (C_f) الممثل للدالة F في النقطة ذات الإحداثيات $(0, -1)$.

2- نضع الآن : $F(X) = \frac{-3X + 2}{X - 2}$ أحسب النهايات عند الحدود.

- 3- أدرس قابلية الإشتقاق عند النقطة 1، ثم أكتب معادلة المماس عندها.
- 4- أدرس اتجاه التغيرات.
- 5- أثبت أن النقطة $(2, 3)$ مركز تناظر لـ (C_F) .
- 6- عين نقطة تقاطع (C_F) مع محوري الإحداثيات $(x'ox)$, $(y'oy)$.
- 7- بين أن (C_F) يقبل مقاربان أفقي و الآخر شاقولي.
- 8- أنشئ (C_F) و (Δ) بدقة.

التمرين الخامس

- I. (C_u) التمثيل البياني للدالة U في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، والموضح في الشكل المقابل.



- 1- عين D_u مجموعة تعريف الدالة U .
- جد نهايات الدالة U عند كل حد من حدود D_u .
- استنتج معادلة المستقيم المقارب
- لـ (C_u) الموازي لحامل محور الترتيب.
- 2- شكل جدول تغيرات الدالة U معينا القيم الحدية لها.
- U' الدالة المشتقة للدالة U .
- استنتج إشارة $U'(x)$.
- 3- المستقيم (KH) مماس للمنحنى (C_u) عند النقطة H ، أكتب معادلة له.
- باستعمال التقريب التآلفي للدالة U ، عين قيمة مقربة للعدد $u(2,0004)$.
- II. لتكن V الدالة المعرفة كما يلي : $V(x) = 4 - 2U(x)$
- 1- عين مجموعة تعريف الدالة V .
- 2- V' الدالة المشتقة للدالة V ، أحسب $V'(x)$ بدلالة $U'(x)$.
- استنتج إتجاه تغيرات الدالة V و شكل جدول تغيراتها.

التمرين السادس

f دالة معرفة على $R - \{-2\}$ كما يلي: $f(x) = -1 + \frac{3}{x+2}$

- (C_f) التمثيل البياني للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب الدالة المشتقة f' للدالة f ، ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f .

2- أثبت أن النقطة $S(-2, -1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

3- برهن أن المستقيم الذي معادلته $y = -1$ مقارب للمنحنى (C_f) .

g الدالة المعرفة على R كما يلي: $g(x) = -x^2 - x + 2$

- (C_g) التمثيل البياني للدالة g في مستوي منسوب إلى المعلم السابق.

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- تحقق أن (C_f) و (C_g) يشملان النقطة $A(1, 0)$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (C_g) .

التمرين السابع

في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، $A(3, 1)$ من أجل كل نقطة M ذات الإحداثيات $(x, 0)$ مع $x \neq 3$ نرفق لها M' نقطة تقاطع (AM) مع محولا الترتيب.

من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 3$ نرمز بـ $f(x)$ لترتيبة النقطة M' .

1- عبري عن $f(x)$ بدلالة x و تحقق أن: $f(x) = \frac{x}{x-3}$

2- أدرس تغيرات الدالة f أحسب $f(0)$.

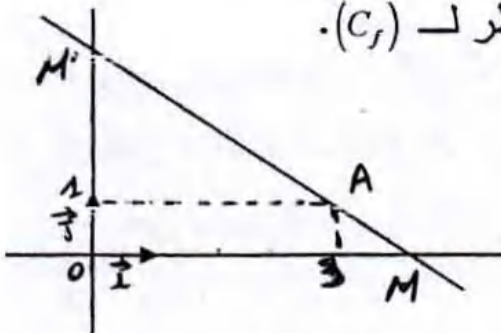
3- بين أن (C_f) منحنى الدالة f يقبل مستقيمين متقاربين يطلب معادلة كل منهما.

4- بين أن S نقطة تلاقي المستقيمين المتقاربين مركز تناظر لـ (C_f) .

5- أرسم (C_f) .

6- g دالة معرفة بـ: $g(x) = \frac{|x|}{x-3}$

استنتج جدول تغيرات الدالة g .



التمرين الثامن

- f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x) = x^3 - x^2 + ax + b$
- (C_f) منحناها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس.
- 1- عين العددين a, b بحيث : $f'(1) = 0, f(0) = 7$
- 2- بأخذ $a = -1$ و $b = 7$
- (1) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f .
- (2) عين جدول تغيراتها.
- (3) عين حصرا للدالة f في المجال $[0, 1]$.
- (4) أثبت أنه توجد نقطتان A و B من (C_f) المماس فيها يوازي $(\Delta) : y = -x/(\Delta)$
- يطلب كتابة معادلة المماس عند كلا منهما.
- (5) أنشئ المنحنى البياني للدالة f في المجال $[-2, 2]$.

التمرين التاسع

- نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$ و a, b, c, d أعداد حقيقية.
- 1- عين الثوابت a, b, c, d بحيث يقبل (C_f) عند النقطتين $M_0(1, 5)$ و $M_1(2, 4)$ مماسين يوازيان محور الفواصل.
- 2- نعتبر الآن الدالة f : $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
- ادرس تغيرات الدالة f و أنشئ منحناها (C_f) .
- 3- ناقش حسب قيم m بيانها حلول المعادلة : $f(x) = 2m - 4$
- 4- نعتبر الدالة g حيث $g(x)$ معرف كما يلي : $g(x) = 2|x^3| - 9x^2 + 12|x|$
- 5- أثبت أن g زوجية.
- 6- استنتج و أنشئ منحناها (C_g) في معلم آخر.
- 7- أنشئ المنحنى (C_h) للدالة h المعرفة كما يلي : $h(x) = 2(x+1)^3 - 9(x+1)^2 + 12x + 12$
- 8- هل الدالة g قابلة لإشتقاق من أجل $x_0 = 0$.

التمرين العاشر

f الدالة المعرفة بالشكل : $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في مستوى مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أوجد مجموعة تعريف الدالة f .
- 2- بين أنه يوجد عدداً حقيقياً a, b بحيث من أجل كل x من $D_f : f(x) = a + \frac{bx}{x^2 - 1}$
- 3- أدرس إتجاه تغير الدالة f .
- 4- نقطة Ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
- 5- أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عن النقطة Ω .
- 6- أوجد وضعية (C_f) و (T) .

التمرين الحادي عشر

f الدالة المعرفة بالشكل : $f(x) = \frac{4x^2 - 2}{2x + 1}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f .

- 1- أوجد مجموعة تعريف الدالة f .
- 2- أوجد الأعداد الحقيقية a, b, c حيث : $x \in D_f : f(x) = ax + b + \frac{c}{2x + 1}$
- 3- ليكن d مستقيماً معادلته : $y = 2x - 1$
- أوجد وضعية المنحنى (C_f) و المستقيم d .
- 4- أدرس تغيرات الدالة f .
- 5- لتكن I نقطة فاصلتها $-\frac{1}{2}$ من (C_f) .
- أثبت أن النقطة مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
- 6- بين أنه توجد نقطتان من المنحنى يكون عندهما المماس موازياً للمستقيم d الذي معادلته $y = 3$ يطلب تعيين فاصلتهما.

التمرين الثاني عشر

الف الدالة المعرفة بالشكل : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$: $-5 \leq x \leq +5$ (C) التمثيل البياني للدالة f .

أ- أوجد مجموعة تعريف الدالة f .

• أوجد نقط تقاطع المنحني (C) مع محوري الإحداثيات.

ب- نتكن الدالة g المعرفة بالشكل : $g(x) = x^3 - 3x - 4$: $-5 \leq x \leq +5$

• أدرس تغيرات الدالة g .

= عين جدول تغيرات الدالة g .

ليكن α جدرا لكثير الحدود $g(x)$, $(\alpha \approx 2.2)$.

= عين إشارة $g(x)$ من أجل $-5 \leq x \leq +5$.

ج- عين الدالة f' المشتقة للدالة f .

= بين أن : $f(x) = \frac{x - g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

- استنتج اتجاه تغير الدالة f .

• أكتب جدول تغيرات الدالة f .

• أوجد لأعداد الحقيقية α, β, σ حيث : $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{x + \sigma}{x^2 - 1}$

• أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم d الذي معادلته : $y = x + 2$

التمرين الثالث عشر

- الجزء أ :

نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ ، (C_g) تمثيلها البياني .

1- أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2- المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,6 \leq \alpha \leq 1,7$

3- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

- الجزء ب:

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بالشكل : $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o, \bar{i}, \bar{j})$.

1- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

2- استنتج إتجاه تغير الدالة f .

3- شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-\frac{1}{2}, 5]$.

4- عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5- ادرس وضعية (C_f) مع (T) .

6- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

7- أرسم (C_f) و المماس (T) في المجال $[-\frac{1}{2}, 5]$.

التمرين الرابع عشر

I. f الدالة المعرفة على : $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ بالشكل : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4})$

1- أوجد $f'(x)$ من أجل كل x من $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

2- أوجد إشارة $f'(x)$ ، شكل جدول تغيرات f .

3- أدرس وضعية المنحنى (C_f) و المستقيم الذي معادلته : $y = x$.

4- أوجد معادلة للمماس الذي معامل توجيهه يساوي $-\frac{4}{3}$.

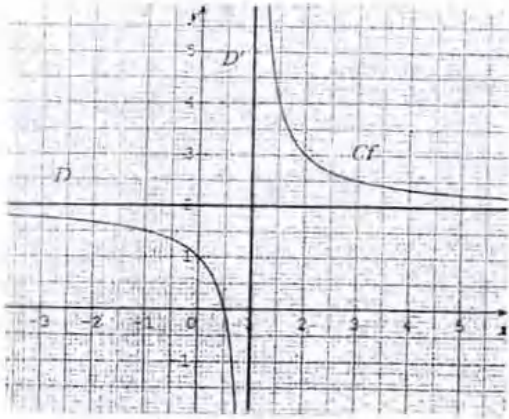
II. g الدالة المعرفة كما يلي : $g(x) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4})$ ، (Γ) تمثيلها البياني.

1- أثبت أنه من أجل كل x من $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$: $g(-x) = -f(x)$

2- أثبت أنه من أجل كل x من $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

3- ثم أحسب $g'(x)$ و استنتج إتجاه تغيرات الدالة g .

التمرين الخامس عشر



I. المنحنى المقابل C_f يمثل الدالة f

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$. C_f يقبل مستقيمين

$$\text{عقارين } D \text{ و } D' \text{ و } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

1- عين مجموعة تعريف f و نهايات f

عند حدود D_f .

2- أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3- نفرض أن من أجل كل x من D_f

$$\text{لدينا : } f(x) = \frac{ax+b}{cx-1} \text{ عين}$$

الأعداد الحقيقية c, b, a .

4- تحقق أن من أجل كل x من $D_f : f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$ ، أكتب معادلة المماس Δ لـ C_f

عند النقطة A التي فاصلتها 2 ، بين أن C_f يقبل مماسا آخر Δ' عند نقطة B حيث Δ'

يوازي Δ عين النقطة B ومعادلة Δ' .

II. نعتبر الدالة g المعرفة على R حيث : $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$ ، α و β عددين حقيقيين و

C_g تمثيلها البياني في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أوجد α و β علما أن C_f و C_g يقبلان نفس المماس عند النقطة A .

2- أدرس تغيرات g ، بين أن C_f و C_g يتقطعان في نقطة أخرى C يطلب تعيينها.

3- أرسم C_f ، C_g ، Δ ، Δ' في نفس المعلم.

4- حل بيانيا المتر حة : $f(x) \leq g(x)$

التمرين السادس عشر

I. لتكن f دالة عددية معرفة : $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$

و ليكن (C_f) التمثيل البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1- عين العددين الحقيقيين a, b حتى يقبل (C_f) مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة

. $K(3,3)$

2- عين الأعداد الحقيقية σ, β, α بحيث : $\forall x \in D_f : f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\sigma}{x-1}$

3- أدرس تغيرات الدالة f و أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

4- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل و ليكن (Δ) .

5- ارسم المنحنى (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

6- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة :

$$x^2 - (m+3)x + m+6 = 0$$

II. لتكن M نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين ، برهن أن M هي مركز تناظر لـ (C_f) .

III. لتكن g دالة عددية معرفة : $\frac{x^2-3|x|+6}{|x|-1}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني .

1- عين D_g مجموعة تعريف g ثم عبر بدلالة $f(x)$ عن $g(x)$ في مجالات يطلب

تعيينها.

2- بالإستعانة بالمنحنى (C_f) أنشئ و في نفس المعلم المنحنى C_g الممثل للدالة g .

التمرين السابع عشر

1. لتكن f دالة عددية معرفة : $f(x) = \frac{9(x+1)}{x^2}$ و ليكن (C_f) التمثيل البياني لها في

مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أدرس تغيرات الدالة f و أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

2- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها و لتكن ω .

3- أكتب معادلة المماس (E) للمنحنى (C_f) في النقطة ω .

4- أنشئ في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق (C_f) و المماس (E) .

II. ليكن h دالة عددية معرفة : $h(x) = \frac{-9|x|+9}{x^2}$

1- عين D_h مجموعة تعريف الدالة h ثم قارن بين $h(x)$ و $h(-x)$.

2- عبر بدلالة $f(x)$ عن $h(x)$ في مجالات يطلب تعيينها ، ثم أنشئ (C_h) في نفس

المعلم.

3- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة. $mx^2 + 9|x| - 9 = 0$