

للحصول على كسر غير قابل للاختزال مباشرة بعد عملية
اختزال واحدة ، تتبع الخطوات التالية :

- (1) نحسب PGCD لكل من البسط والمقام
- (2) نقسم كلا من البسط والمقام على PGCD
- (3) نتحقق كلا من البسط والمقام لكسر المختزل انهما عددان اوليان فيما بينهما .

مثال : اختزل الكسر $\frac{60}{45}$ ليصبح كسر غير قابل للاختزال

بعد اتباع الخطوات السابقة نجد أن : $PGCD(60; 45) = 15$

ومنه : $\frac{60}{45} = \frac{4 \times 15}{3 \times 15} = \frac{4}{3}$ وبما أن : $PGCD(4; 3) = 1$ فإن : $\frac{4}{3}$ غير قابل للاختزال .

تذكير بالمكتسبات القليلة

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k}$$

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$$

مثال 01 : أحسب العبارة التالية ثم اختزل ان أمكنك ذلك

$$B = \left(\frac{7}{6} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{1}{3} ; A = \frac{2}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{8}{21} = \frac{6}{49}$$

مثال 02 : أعط الكتابة العلمية لـ A و B

$$A = 5,2 \times 10^{-3} + 6,4 \times 10^{-2} + 0,0034$$

$$A = 7,26 \times 10^{-2}$$

$$B = \frac{5 \times 10^2 + 3 \times 10^3}{1,4 \times 10^{-4}} = 2,50 \times 10^7$$

لإيجاد القاسم الأكبر المشترك PGCD للعددين a و b
تتبع الخطوات التالية (حيث $a > b$) :

❖ خوارزمية إقليدس :

- (1) نجز عملية القسم الإقليدية لـ a على b نسمي الباقي r_1 والحاصل q_1
- (2) نجز عملية القسمة الإقليدية لـ b على r_1 نسمي الباقي r_2 والحاصل q_2 . وهكذا يكون PGCD لـ a و b آخر باقي غير معدوم .

مثال : أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1078 و 322 باستخدام خوارزمية إقليدس

$$\begin{aligned} 1078 &= 3 \times 322 + 112 \\ 322 &= 2 \times 112 + 98 \\ 112 &= 1 \times 98 + 14 \\ 98 &= 14 \times 7 + 0 \end{aligned}$$

$$PGCD(1078; 322) = 14$$

الباقي	b	a	
112	322	1078	1
98	112	322	2
14	98	112	3
0	14	98	4

للإثبات أن عددين هما أوليان فيما بينهما ، تتبع الخطوات التالية

- (1) نحسب PGCD لهذين العددين .
- (2) إذا كان PGCD يساوي 1 ، فنقول عن العددين أنهما أوليان فيما بينهما .

مثال : اثبت أن العددين 19 و 27 أوليان فيما بينهما

$$\begin{aligned} 27 &= 19 \times 1 + 8 \\ 19 &= 8 \times 2 + 3 \\ 8 &= 3 \times 2 + 2 \\ 3 &= 2 \times 1 + 1 \\ 2 &= 1 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

$$PGCD(27; 19) = 1$$

الباقي	b	a	
8	19	27	1
3	8	19	2
2	3	8	3
1	2	3	4
0	1	2	5



لتبسيط مجموعة جذور، نتبع مايلي :

- (1) نكتب إن أمكن كل جذر على الشكل $a\sqrt{b}$
- (2) نستخرج $\sqrt{b}$ كعامل مشترك باستخدام الخاصية التوزيعية

مثال : بسط العبارة التالية $\sqrt{50} + \sqrt{98}$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\text{ومنه : } \sqrt{50} + \sqrt{98} = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = \sqrt{2}(7 + 5) = 12\sqrt{2}$$

لجعل مقام النسبة $\frac{a}{\sqrt{b}}$ عددا ناهقا

- (1) نقوم بضرب كلا من البسط و المقام النسبة في $\sqrt{b}$
- (2) نقوم بعد ذلك بتبسيط الكسر إن أمكن ذلك

مثال : اكتب على شكل كسر مقامه عدد ناطق $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

تذكر بالمكتسبات القبلية

$$(a^n)^m = a^{(n \times m)}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$1^n = 1$$

مثال : اكتب الناتج على أبسط شكل :

$$A = \sqrt{125} + \sqrt{45} = 8\sqrt{5} ; \sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{44}}{2} = \sqrt{\frac{44}{4}} = \sqrt{11} \quad \left| \quad \frac{\sqrt{44}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 11}}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} \right.$$

خواص جذور التربيعية

$(\sqrt{a})^2 = a$	$\sqrt{a^2} = a$
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$
$\sqrt{ab^2} = \sqrt{a} \times \sqrt{b^2} = b\sqrt{a}$	

لحل المعادلات من الشكل $x^2 = a$ ، نتبع مايلي :

- (1) إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة لها حلان : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
- (2) إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة لها حل وحيد هو 0
- (3) إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل

مثال : حل المعادلة $x^2 = 7$ و $x^2 = -4$

بما أن $7 > 0$ فإن المعادلة لها حلان هما : $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$

بما أن $-4 < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل

لتبسيط العدد غير الناهق $\sqrt{a}$ ، نتبع الخصائص التالية :

- (1) نكتب العدد a على شكل جداء مربع تام أي : $a = b^2 \times c$
- (2) نستعمل خواص الجذور التربيعية المذكورة أعلاه ، لكتابه على شكل $c\sqrt{b}$

مثال : كتابة على الشكل $a\sqrt{b}$ العدد $\sqrt{50}$ حيث :

a و b عدنان طبيعيان و b أصغر عدد ممكن

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}$$



تحليل العبارات الجبرية ، تتبع الخصوات التالية :

- (1) نبحث عن العامل المشترك لكل حدود العبارة الجبرية
- (2) إن لم يكن العامل المشترك ظاهرا ، نجرب إحدى المتطابقات الشهيرة .

مثال : تحليل العبارات التالية

$$4x + 12 = 4x + 4 \times 3 = 4(x + 3)$$

$$(x + 2)(2x + 1) - x(x + 2)$$

$$(x + 2)(2x + 1 - x) = (x + 2)(x + 1)$$

$$x^2 + 16x + 64 \text{ من الشكل } a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{و بالمطابقة نجد : } a^2 = x^2 \text{ و } b^2 = 64$$

$$\text{ومنه : } x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$$

$$4x^2 - 28x + 49 - 5(2x - 7)$$

$$\text{بالمطابقة نجد : } a^2 = 4x^2 \text{ و } b^2 = 49$$

$$\text{ومنه : } (2x - 7)^2 - 5(2x - 7)$$

$$(2x - 7)(2x - 7 - 5)$$

$$(2x - 7)(2x - 12)$$

$$x^2 - 9 + (2x + 6)$$

$$\text{لدينا : } x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

$$\text{و أيضا : } (2x + 6) = 2(x + 3)$$

$$\text{ومنه : } (x + 3)(x - 3) + 2(x + 3)$$

$$(x + 3)(x - 3 + 2)$$

$$(x + 3)(x - 1)$$

خواص مستعملة لنشر العبارات الجبرية

$$k(a + b) = ka + kb \quad | \quad k(a - b) = ka - kb$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

نشر وتبسيط العبارات الجبرية ، تتبع الخصوات التالية :

- (1) نشر العبارة الجبرية بإستخدام الخواص المذكورة أعلاه

- (2) نقوم بتبسيط العبارة الجبرية إلى أبسط شكل ممكن

مثال : نشر و تبسيط العبارات التالية :

$$3(2 + 5x) = 3 \times 2 + 3 \times 5x = 6 + 15x$$

$$(x + 4)(x + 3) = x^2 + 4x + 3x + 12 \\ = x^2 + 7x + 12$$

$$(3x + 1)^2 = (3x)^2 + 6x + 1 \\ = 9x^2 + 6x + 1$$

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - (2 \times 2x \times 3) + 3^2 \\ = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\left(\frac{4}{5} - 2x\right) \left(\frac{4}{5} + 2x\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - (2x)^2 \\ = \frac{16}{25} - 4x^2$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 - (2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 \\ = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$(-2x + 0,5)^2 = (-2x)^2 + 2 \times (-2x) \times 0,5 + (0,5)^2 \\ = 4x^2 - 2x + 0,25$$



لحل المعادلة تؤول إلى الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$:

- (1) نقوم بتحليل العبارة إلى جداء عاملين
- (2) نحل المعادلة الأولى $ax_1 + b = 0$
- (3) بعدها نحل المعادلة الثانية $cx_2 + d = 0$
- (4) للمعادلة حلين هما : x_1 و x_2

مثال : حل المعادلة $(1 - 2x)(4x - 3) - 3(4x - 3) = 0$

لدينا : $(4x - 3)(1 - 2x - 3) = (4x - 3)(-2x - 2)$

ومنه نحل المعادلة التالية : $(4x - 3)(-2x - 2) = 0$

إذن : $4x_1 - 3 = 0$ ، نجد أن : $x_1 = \frac{3}{4}$

أو : $-2x_2 - 2 = 0$ ، نجد أن : $x_2 = -1$

ومنه حلول المعادلة هما : $\frac{3}{4}$ و -1

لتربيض مشكلة وحل معادلة ، نتبع الخصوات التالية

- (1) نختار المجهول
- (2) نضع المعادلة المناسبة التي تعبر عن المشكلة
- (3) نحل المعادلة ثم نتحقق من الحل
- (4) نجيب عن السؤال

مثال : حل المسألة التالية

عمر شعيب قبل سبع سنوات هو نصف عمره بعد أربع سنوات .
حدد عمر شعيب

لدينا : $2(x - 7) = x + 4$

$$2x - 14 = x + 4$$

$$2x - x = 4 + 14$$

$$x = 18$$

خواص المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- (1) كل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x يمكن تحويلها إلى معادلة من الشكل $ax = b$
- (2) إذا كان $a \neq 0$ حل المعادلة $ax = b$ هو : $x = \frac{b}{a}$

لحل المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- (1) نحول المعادلة إلى الشكل $ax = b$ يجعل المجاهيل x التي تشمل x على يسار المساواة والأعداد على يمين المساواة .
- (2) بعد ذلك نقوم بتبسيط ثم نحل المعادلة لإيجاد قيمة x

مثال : حل المعادلة $5x + 2 = 2x + 3$

نطرح (2) من طرفي المساواة

$$5x = 2x + 1$$

نطرح $(2x)$ من طرفي المساواة

$$5x - 2x = 1$$

$$3x = 1$$

نضرب طرفي المساواة في $\frac{1}{3}$

$$x = \frac{1}{3}$$

لحل المعادلة من الشكل $(ax + b)(cx + d) = 0$:

- (1) نحل المعادلة الأولى $ax_1 + b = 0$
- (2) بعدها نحل المعادلة الثانية $cx_2 + d = 0$
- (3) للمعادلة حلين هما : x_1 و x_2

مثال : حل المعادلة $(2x - 7)(8x - 9) = 0$

نحل المعادلة $2x_1 - 7 = 0$ ، ومنه : $x_1 = \frac{7}{2}$

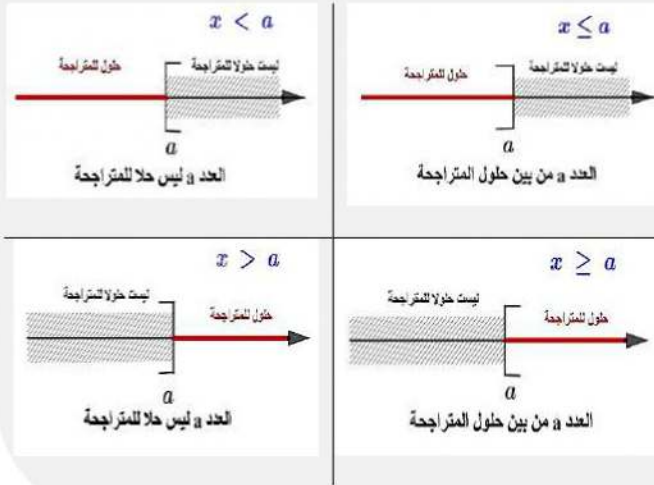
نحل المعادلة $8x_2 - 9 = 0$ ، ومنه : $x_2 = \frac{9}{8}$

ومنه حلول المعادلة هما : $\frac{7}{2}$ و $\frac{9}{8}$



تمثيل حلول متراجحة بيانيا ، نتبع مايلي :

- (1) نحل المتراجحة كما هو مذكور سابقا .
- (2) في مستقيم مدرج نلون نصف المستقيم الممثل لمجموعة حلول المتراجحة ، ونشطب نصف المستقيم الآخر .
- (3) نفصل بين نصفي المستقيمين بمعكوفة [، فإذا كانت فاصلة النقطة من ضمن حلول المتراجحة توجه المعكوفة لجهة الجزء الملون وإلا توجه لجزء مشطوب .



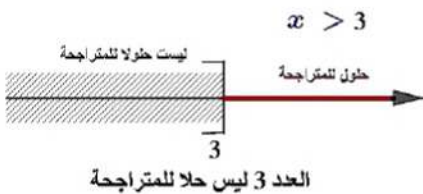
مثال : حل و تمثيل حلول المتراجحة $6x + 5 > 23$

نطرح (5) من طرفي المتباينة ، فنحصل على :

$$6x > 18$$

نضرب طرفي المتباينة في $\frac{1}{6}$ ، فنجد :

$$x > 3$$



خواص المتراجحات من الدرجة الأولى بهجول واحد

- (1) لا يتغير اتجاه متراجحة ، عند إضافة (أو طرح) نفس العدد من طرفي المتراجحة .
- (2) لا يتغير اتجاه متراجحة ، عند ضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة بنفس العدد الموجب تماما .
- (3) يتغير اتجاه متراجحة ، عند ضرب (أو قسمة) طرفي المتباينة بنفس العدد السالب تماما .

لحل المتراجحات من الدرجة الأولى بهجول واحد

- (1) نحول المتراجحة إلى الشكل $ax \geq b$ بجعل المجاهيل x التي تشمل x على يسار المتباينة والأعداد على يمين المتباينة .
- (2) بعد التبسيط ، نقسم طرفي المتراجحة على العدد a مع مراعاة إشارته واتجاه المتراجحة

مثال : حل المتراجحة $-5x + 2 \geq 2x + 3$

نطرح (2) من طرفي المتباينة ، فنحصل على :

$$-5x \geq 2x + 1$$

نطرح (2x) من طرفي المتباينة ، فنحصل على :

$$-5x - 2x \geq 1$$

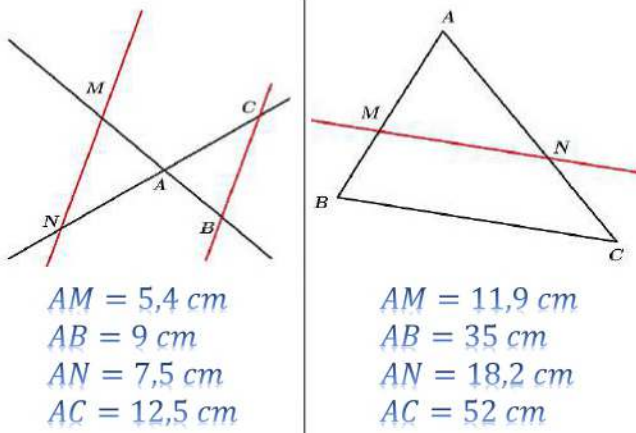
$$-7x \geq 1$$

نضرب طرفي المتباينة في $-\frac{1}{7}$ مع تغيير اتجاه المتراجحة ، فنجد :

$$x \leq -\frac{1}{7}$$



مثال 02 : اثبت أن المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان



في الشكل الأول

$$\frac{AM}{AB} = \frac{5,4}{9} = 0,6 \quad \text{و} \quad \frac{AN}{AC} = \frac{7,5}{12,5} = 0,6$$

حسب خاصية طاليس العكسية ، المستقيمان متوازيان

في الشكل الثاني

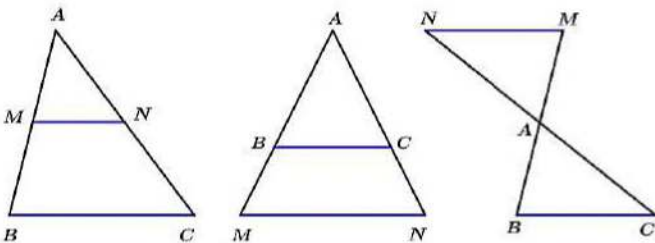
$$\frac{AN}{AC} = \frac{18,2}{52} = 0,35 \quad \text{و} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{11,9}{35} = 0,34$$

حسب خاصية طاليس العكسية ، المستقيمان غير متوازيين

خاصية طاليس على المثلث

ليكن ABC مثلث ، M نقطة من الحامل (AB)
N نقطة من الحامل (AC) ، إذا كان (MN) // (BC) فإن :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



خاصية العكسية لطاليس على المثلث

ABC مثلث إذا كانت M نقطة من [AB]

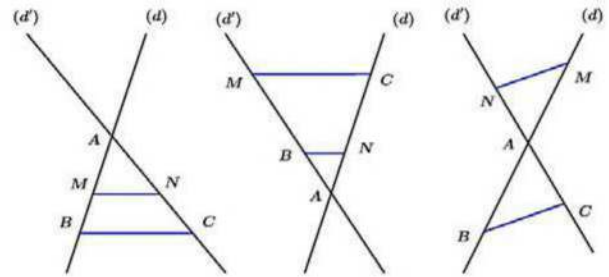
و كانت N نقطة من [AC] و $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

فإن : (MN) // (BC)

خاصية طاليس المباشرة

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A . B و M نقطتان من (d)
(d) مختلفتان عن A . C و N نقطتان من (d') مختلفتان عن A .
إذا كان (MN) // (BC) فإن :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



خاصية طاليس العكسية

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A .
B و M نقطتان من (d) مختلفتان عن A .
C و N نقطتان من (d') مختلفتان عن A .
إذا كان : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ و كانت النقاط M ، B ، A في استقامة واحدة و نفس الترتيب مع النقاط N ، C ، A
فإن : (MN) // (BC)



من المعطيات لدينا (DB) و (AC) مستقيمان متقاطعان في O

و المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان

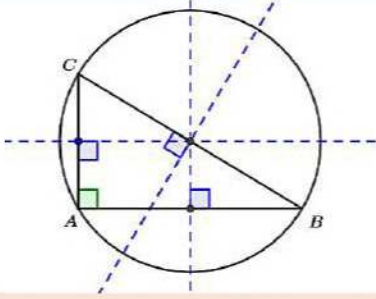
إذن حسب خاصية طاليس نكتب مايلي : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$

أي بعد التعويض نجد : OB = 5,6 cm و CD = 4,5 cm

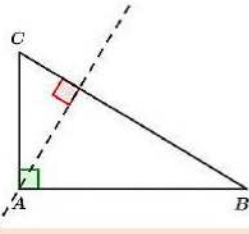


تذكير بالمكتسبات القبلية

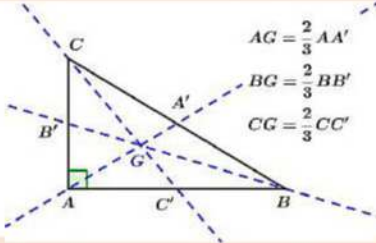
- (1) مجموع قيسي الزاويتين الحادتين في مثلث القائم يساوي 90°
- (2) محاور مثلث القائم هي محاور أضلاعه حيث تتقاطع في منتصف الوتر الذي يمثل مركز الدائرة المحيطة .



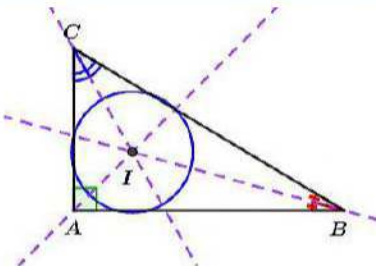
- (3) الارتفاع في المثلث القائم هو المستقيم الذي يشمل رأس الزاوية القائمة ويعامد الوتر .



- (4) المتوسط في المثلث هو المستقيم الذي يشمل رأس و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس .



- (5) المنصف الداخلي لمثلث هو منصف إحدى زواياه الداخلية . نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزاوية مثلث هي مركز الدائرة الداخلية له .



في مثلث قائم

- (1) $\cos$ زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية على طول الوتر .
- (2) $\sin$ زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الوتر .
- (3) $\tan$ زاوية حادة يساوي حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الضلع المجاور للزاوية .

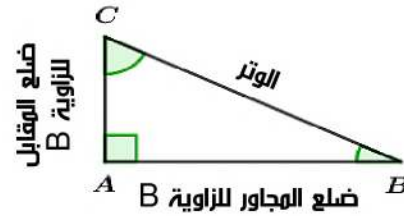
ملاحظات

$\cos$ و $\sin$ زاوية محصورة بين 0 و 1

$\tan$ زاوية حادة و هو عدد موجب

مثال : من أجل المثلث ABC القائم في A

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} ; \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} ; \tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$



علاقات حساب في المثلثات القائمة

في مثلث قائم ، x تمثل قياس الزاوية الحادة

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ و } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

مثال : علما أن $\cos x = \frac{3}{5}$; أحسب $\sin x$ و $\tan x$

باستعمال العلاقة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

لدينا : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25} \text{ و منه } \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \text{ أي :}$$

$$\sin x = \frac{4}{5} \text{ أي :}$$

باستعمال العلاقة : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\tan x = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3} \text{ ومنه :}$$





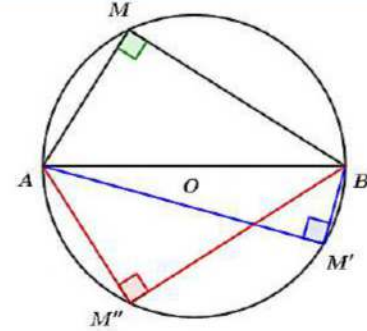
(6) المثلث القائم والدائرة

للمثلث القائم AMB قائم في M إذا كانت M نقطة و تنتمي للدائرة التي قطرها $[AB]$

فإن المثلث AMB قائم في M

للمثلث AMB قائم ، فإن M نقطة تنتمي للدائرة

التي قطرها $[AB]$ ومركزها منتصف $[AB]$

(7) خاصية فيثاغورس : إذا كان المثلث ABC قائم في A فإن :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

مثال : المثلث القائم في A ، حيث :

$$AC = 4 \text{ cm} \text{ و } AB = 3 \text{ cm}$$

أحسب طول الوتر $[BC]$

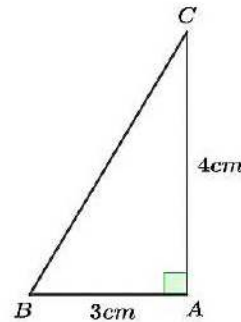
لدينا المثلث ABC قائم في A وحسب

خاصية فيثاغورس نكتب المساواة التالية :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 3^2 + 4^2$$

$$BC = 5 \text{ cm} \text{ و منه } BC^2 = 25$$

(8) خاصية العكسية لفيثاغورس : إذا كان ABC مثلث حيث

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ فإن المثلث } ABC \text{ قائم في } A$$

مثال : المثلث ، حيث :

$$BC = 7 \text{ cm} \text{ و } AC = 4 \text{ cm} \text{ و } AB = 5 \text{ cm}$$

تحقق من أن المثلث ABC مثلث قائم

بما أن BC أكبر طول أذا نكتب مايلي : $BC^2 = AC^2 + AB^2$

و منه بعد تحقق من صحة المساواة نستنتج أن المثلث ABC

ليس بمثلث قائم