

مجلة المفيد في الرياضيات

لتلاميذ بكالوريا 2025 شعب علمية



الدوال العددية



سلسلة تمارين
محلولة في الدوال
العددية

للأستاذ بلجودي حمو

التمرين -1-

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ $D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}$ و $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في م متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها و استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أكتب معادلة (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
4. بين أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x) = x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1}$
5. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
6. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
7. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها α و β و γ حيث : $-2.6 < \alpha < -2.5$ و $-1.3 < \beta < -1.4$ و $0.9 < \gamma < 0.8$.
8. بين أن النقطة $\Omega(0;3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .
9. أرسم المستقيمات المقاربة و المماس للمنحني (C_f) .

التمرين -2-

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = x^3 + 3x + 4$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 2. أدرس اتجاه تغير g و شكل جدول تغيراتها .
 3. احسب $g(-1)$ ثم استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- (I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$
3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. عين معادلة لـ (T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
5. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلة له .
6. ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (T) .

7. هل توجد مماسات موازية للمستقيم (Δ) ؟

8. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$

9. ارسم المستقيم (Δ) و المنحني (C_f) .

التمرين -3-

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x-2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

1. اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.
2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات التعريف .
3. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
4. اكتب معادلتين (T) و (T') نصفي المماسين للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
5. ادرس تغيرات الدالة f .
6. بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.
7. بين أن المستقيم (D') ذو المعادلة $y = -x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
8. ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة لكل من (D) و (D') .
9. ارسم (T) و (T') و (D) و (D') و المنحني (C_f) .

التمرين -4-

الجزء الأول :

- g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في R ؛ حلا وحيدا α . تحقق من أن : $2.1 < \alpha < 2.2$.
 4. استنتج إشارة $g(x)$ على R .
 5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R - \{-1; 1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها . استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .

2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R - \{-1; 1\}$ ؛ يكون : $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$

3. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. عين ؛ دون حساب ؛ $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$. فسر النتيجة بيانيا .

5. بين أن: $f(\alpha) = 3\alpha$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6. أيبين أن المستقيم (Δ) الذي $y = 2x$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

7. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $-1.2 < \beta < -1.1$. فسر النتيجة هندسيا .

8. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) .

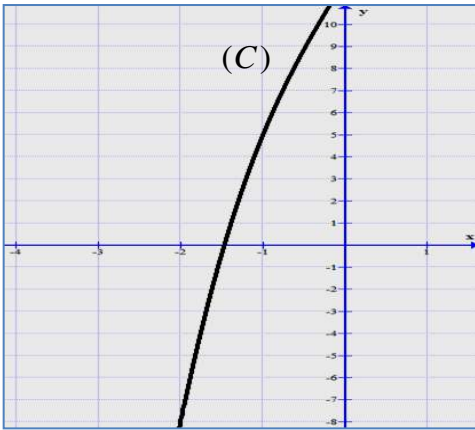
9. نعتبر الدالة h المعرفة على $R - \{-1; 1\}$ بـ $h(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

استنتج كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) .

10. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة الآتية حيث x هو المجهول : $f(x) = |m|$

التمرين -5-

الجزء الأول :



المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على R كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

• بقراءة بيانية حدد إشارة $g(-2)$ و $g(-1)$.

• برر وجود عدد حقيقي α من المجال $]-2; -1[$ يحقق أن المعادلة

$$g(\alpha) = 0$$

• تحقق حسابيا أن $\alpha \in]-1.48; -1.47[$.

• استنتج إشارة $g(x)$ على R .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 + 2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها .

2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ يكون : $f(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$

3. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. أيبين أن المستقيم (Δ) الذي $y = x + 1$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5. بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـ (Δ) . (لا يطلب تعيين معادلتيهما)

6. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $1.3 < \beta < 1.4$. فسر النتيجة هندسيا.

7. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) = -1.2$)

التمرين -6-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2. ادرس تغيرات الدالة g . و شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن احسب $g(2)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ و إشارة $g(-x)$ على R .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة العمودية.

2. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R - \{1\}$ ؛ يكون : $f'(x) = \frac{2g(-x)}{(x+1)^3}$.

3. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. بين أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R - \{1\}$ ؛ يكون : $f(x) = 2x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2}$.

5. أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي $y = 2x + 2$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

6. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.3 < \alpha < -0.2$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

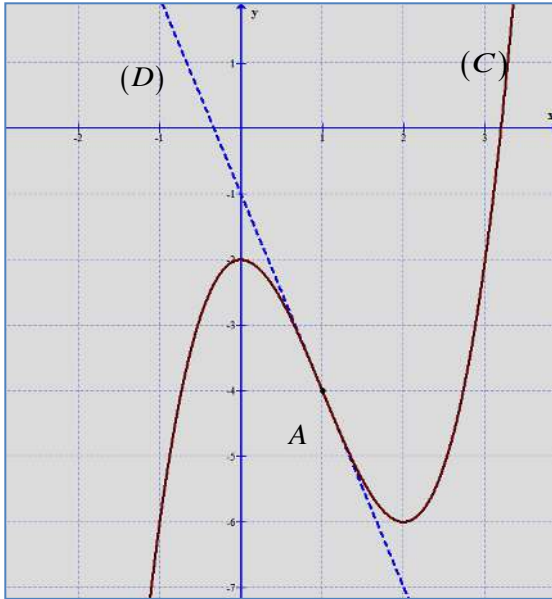
7. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) .

8. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x) = 2x + m$.

التمرين -7-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية .
(C) هو التمثيل البياني للدالة g في معلم . و (D) هو المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1; -4)$ ، (انظر الشكل)



1. بقراءة بيانية :
أ. شكل جدول تغيرات g .
ب. عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ و $g'(1)$ و $g''(1)$.
ج. اكتب معادلة لـ (D) .
د. حل المتراجحة الآتية $g'(x) < 0$.
2. باستعمال (C) ، بين أن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين العددين 3.1 و 3.2 .
4. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$.
5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) .

1. احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجال تعريفها . و فسر النتائج هندسيا .
2. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R - \{1\}$ ؛ يكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$. ثم استنتج اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها .
3. احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل م مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته . أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .
4. بين أن $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
5. بين أن : (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلته .
6. احسب $f(-1)$ ثم ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .
7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$ و المعادلة $f(x) = x + m$.
8. الدالة المعرفة على المجال $R - \{1\}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$.
↪ أدرس اتجاه تغير h و شكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة)
9. الدالة المعرفة على المجال $R - \{1\}$ كما يلي : $u(x) = |f(x)|$ ، (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u .
↪ أنشئ (C_u) انطلاقا من (C_f)
10. v الدالة المعرفة على المجال $R - \{-1; 1\}$ كما يلي : $v(x) = f(|x|)$ (C_v) هو التمثيل البياني للدالة v .
↪ بين أن v زوجية ثم أنشئ (C_v) انطلاقا من (C_f)
11. k الدالة المعرفة على المجال $R - \{2\}$ كما يلي : $k(x) = f(x-1) + 2$ (C_k) هو التمثيل البياني للدالة k .
↪ اشرح كيفية انشاء (C_k) انطلاقا من (C_f) .

حل التمارين

حل التمرين -1-

1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \end{cases} \text{ إذن المستقيم ذو المعادلة } x = -1 \text{ م.م عمودي لـ } (C_f).$$

$$\text{ولدينا : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \end{cases} \text{ إذن المستقيم ذو المعادلة } x = 1 \text{ م.م عمودي لـ } (C_f).$$

2. دراسة اتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 3x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}, \text{ لدينا } D_f \text{ من } x \text{ من أجل كل } x$$

إشارة $f'(x)$ من $x^2 - 3 = 0$ ، المعادلة تقبل حلين هما $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ و عليه إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	-	0	+

f متزايدة تماماً على المجالين $]-\infty; -\sqrt{3}]$ و $[\sqrt{3}; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجالات $]-\sqrt{3}; -1]$ و $]1; \sqrt{3}[$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0.4	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5.6

3. كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة (T) هي: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ لدينا $f(0) = 3$ و $f'(0) = 0$ وبالتالي معادلة للمماس (T) هي : $y = 3$.

4. تبين أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x) = x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1}$:

$$x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{(x + 3)(x^2 - 1) + x}{x^2 - 1} = \frac{x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} = f(x), \text{ من } D_f \text{ من أجل كل } x$$

5. تبين أن (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$ مستقيم مقارب مائل :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1} - (x + 3) \right] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

6. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) :

ندرس إشارة $f(x) - y$ أي إشارة $\frac{x}{x^2 - 1}$ ، نلخص إشارة $f(x) - y$ والوضع النسبي في الجدول أدناه:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
x		-	0		+	
x^2-1		+	0	-	0	+
$f(x)-y$		-	+	0	-	+
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(c_f) فوق	(c_f) يقطع (Δ)	(c_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق

7. تبين أن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها: $-2.6 < \alpha < -2.5$ و $-1.4 < \beta < -1.3$ و $0.9 < \gamma < 0.8$:
من جدول تغيرات الدالة f لدينا :

- f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -\sqrt{3}]$ و من ثم على المجال $[-2.6; -2.5]$:
ولدينا : $f(-2.6) = 0.02 > 0$ و $f(-2.6) = -0.05 < 0$.
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-2.6; -2.5]$ حلا وحيدا α .
 - f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-\sqrt{3}; -1]$ و من ثم على المجال $[-1.4; -1.3]$:
ولدينا : $f(-1.4) = 0.14 > 0$ و $f(-1.3) = -0.18 < 0$.
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-1.4; -1.3]$ حلا وحيدا β .
 - f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1; 1]$ و من ثم على المجال $[0.8; 0.9]$:
ولدينا : $f(0.9) = -0.83 < 0$ و $f(0.8) = 1.57 > 0$.
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0.8; 0.9]$ حلا وحيدا γ .
- إذن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها α و β و γ حيث :
- $-2.6 < \alpha < -2.5$ و $-1.4 < \beta < -1.3$ و $0.9 < \gamma < 0.8$.

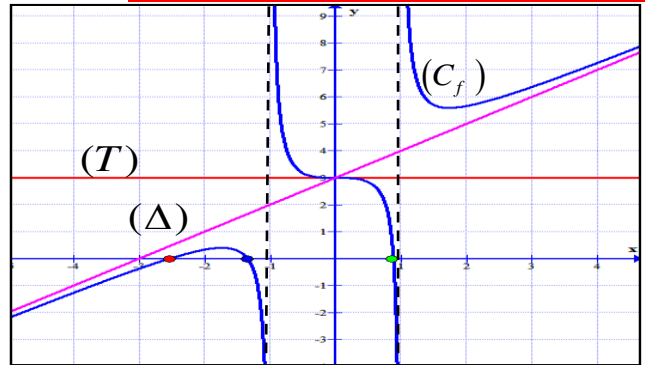
8. تبين أن النقطة $\Omega(0;3)$ مركز تناظر للمنحنى :

من أجل $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ ، $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ و منه $(-x) \in D_f$ و :

$$f(-x) + f(x) = -x + 3 + \frac{-x}{x^2 - 1} + x + 3 + \frac{x}{x^2 - 1} = 6 = 2(3)$$

إذن النقطة $\Omega(0;3)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

9. رسم المستقيمات المقاربة و المماس و المنحنى.



حل التمرين -2-

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = x^3 + 3x + 4$:

1. حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

3. دراسة تغيرات الدالة g:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = 3x^2 + 3$ ، $g'(x) > 0$. إذن متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4. حساب (-1)go استنتاج إشارة g(x) :

$g(-1) = 0$. g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وتتعد من أجل $x = -1$ إذن إشارتها كالتالي :

x	-1	+	-	+
g(x)	-	0	+	

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$

1. حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

2. تبين أنه من أجل كل x من R ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x+4)}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط. نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g(x)$	-	0	+	+	
x	-	-	0	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-1; 0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-2	$+\infty$

4. تبين معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة (T) هي: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. لدينا $f(0) = -2$ و $f'(0) = 0$ و بالتالي معادلة للمماس (T) هي : $y = -2$.

5. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

الاستنتاج:

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

6. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم (Δ) :

$f(x) - x = \frac{-2 - x}{x^2 + 1}$ ، إشارة $[f(x) - x]$ من إشارة البسط. نلخص إشارة $[f(x) - x]$ و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-2; -2)$	(C_f) تحت (Δ)

7. هل توجد مماسات موازية للمستقيم (Δ) ؟:

معامل توجيه المستقيم (Δ) هو 1. المعادلة $f'(x) = 1$ تكافئ $\frac{x^4 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2} = 1$ ومنه $x^4 + 3x^2 + 4x = (x^2 + 1)^2$

ومنه $x^2 + 2 = 0$. المعادلة لا تقبل حلول إذن لا توجد مماسات موازية لـ (Δ) .

8. تبين أن (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها a حيث:

لا توجد حلول للمعادلة $f(x) = 0$ في المجالين $]-\infty; -1]$ و $[-1; 0]$.

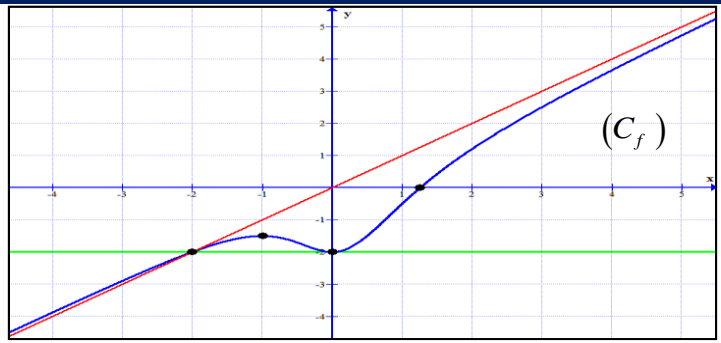
f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ و من ثم على $[1.2; 1.3]$ و لدينا $f(1.2) \times f(1.3) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[1.2; 1.3]$ حلا وحيدا α .

إذن (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$.

9. رسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :

(Δ)



حل التمرين -3-

1. كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = |x-1| + \frac{2}{x-2} = \begin{cases} g(x) = -x+1 + \frac{2}{x-2}; x \in]-\infty; 1] \\ k(x) = x-1 + \frac{2}{x-2}; x \in [1; 2[\cup]2; +\infty[\end{cases}$$

2. حساب النهايات عند أطراف مجالات التعريف :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x+1 + \frac{2}{x-2} \right] = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x-1 + \frac{2}{x-2} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty$$

• المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=2$.

3. دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 و تفسير النتيجة هندسيا :

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h+1) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-1+1 + \frac{2}{h+1-2} + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + \frac{2}{h-1} + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + h + 2 + 2h - 2}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 3h}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-3}{h-1} = -3$$

نستنتج أن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار و عددها المشتق من اليسار هو $g'(1) = -3$.

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h+1) - k(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-1+1 + \frac{2}{h+1-2} + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + \frac{2}{h-1} + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h + 2 + 2h - 2}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + h}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h+1}{h-1} = -1$$

• نستنتج أن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين و عددها المشتق من اليمين هو $k'(1) = -1$.

لكن العدد المشتق من اليمين و اليسار غير متساويان أي : $g'(1) \neq k'(1)$ ، إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 0.

التفسير الهندسي للنتائج :

منحني الدالة f يقبل نصفين مماسين عند النقطة معاملا توجيههما -3 و -1.

4. كتابة معادلتين نصفى المماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$y = g'(1)(x-1) + g(1) = -3(x-1) - 2 = -3x+1 : (T)$$

$$y = k'(1)(x-1) + k(1) = -1(x-1) - 2 = -x-1 : (T')$$

5. دراسة تغيرات الدالة f .

$$\text{لما } f(x) = g(x) = -x+1 + \frac{2}{x-2} : x \in]-\infty; 1]$$

$$\text{من أجل كل } x \text{ من }]-\infty; 1] : f'(x) = g'(x) = -1 - \frac{2}{(x-2)^2} < 0 : f \text{ متناقصة تماما على }]-\infty; 1].$$

$$\text{لما } f(x) = k(x) = x-1 + \frac{2}{x-2} : x \in [1; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } [1; 2[\cup]2; +\infty[: f'(x) = k'(x) = 1 - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2}$$

من أجل كل x من $[1; 2[\cup]2; +\infty[$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط .

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \Delta = 8 \quad x = 2 - \sqrt{2} \text{ و } x = 2 + \sqrt{2} \text{ و بالتالي إشارة } f'(x) \text{ كالتالي :}$$

x	1	2	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+

إذن f متناقصة تماما على $[1; 2[$ و $]2; 2 + \sqrt{2}]$ و f متزايدة تماما على $[2 + \sqrt{2}; +\infty[$.

6. تبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x-2} \right] = 0$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

7. تبين أن المستقيم (D') ذو المعادلة $y = -x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{x-2} \right] = 0$$

و منه المستقيم (D') ذو المعادلة $y = -x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

9. دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة لكل من (D)

ندرس إشارة $[f(x) - (x-1)]$ أي إشارة $\frac{2}{x-2}$ على المجال $[1; 2[\cup]2; +\infty[$ ، نلخص إشارة و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	1	2	$+\infty$
$[f(x) - (x-1)]$	-		+
الوضع النسبي	(D) تحت (C_f)		(D) فوق (C_f)

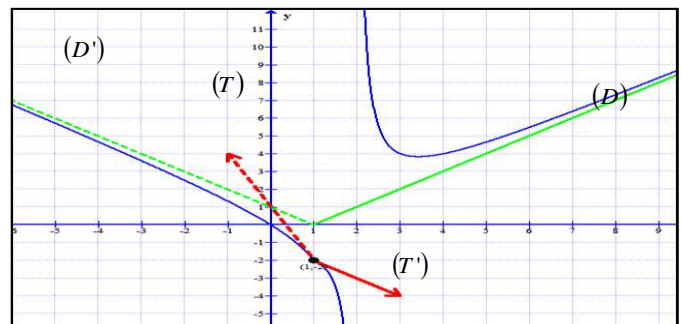
دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة لكل من (D')

ندرس إشارة $[f(x) - (-x + 1)]$ أي إشارة $\frac{2}{x-2}$ على المجال $]-\infty; 1]$ من اجل x كل من $]-\infty; 1]$ ، $\frac{2}{x-2} < 0$. إذن من اجل x

كل من $]-\infty; 1]$ ، (C_f) تحت (D').

9. رسم المستقيمت و المماسات و المنحنى: $f(0) = 0$

(C_f)



حل التمرين 4-

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x - 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x - 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

2. دراسة تغيرات الدالة g:

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = 3x^2 - 3$.

المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلين هما $x = 1$ و $x = -1$. و إشارة $g'(x)$ كما هو موضح في الجدول ادناه :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+

الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty; -1]$ و $[1; +\infty[$ و متناقصة تماما على $[-1; 1]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$

3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في R حلا وحيدا:

لا توجد حلول للمعادلة $g(x) = 0$ في المجال $]-\infty; 1]$.

5. تبين أن $f(a)=3a$:

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha-3=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha=3$.

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha^3+\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}=\frac{3\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}=\frac{3\alpha(\alpha^2-1)}{\alpha^2-1}=3\alpha$$

من جهة أخرى: $f(\alpha)=\frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}$ بتعويض 3 بـ $\alpha^3-3\alpha$ ينتج: $f(\alpha)=3\alpha$

استنتج حصرا للعدد $f(a)$:

لدينا $2.1 < \alpha < 2.2$ ومنه $6.3 < 3\alpha < 6.6$ أي $6.3 < f(\alpha) < 6.6$.

6. أ. تبين أن (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مستقيم مقارب مائل:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^3+3}{x^2-1} - 2x \right] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x^3+3-2x^3+2x}{x^2-1} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x^2-1} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) :

ندرس إشارة $f(x) - y$ أي إشارة $\frac{2x+3}{x^2-1}$. نلخص إشارة $f(x) - y$ و الوضع النسبي في الجدول أدناه:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$	
$2x+3$	-	0	+	+	+	
x^2-1	+	+	0	-	0	+
$f(x)-y$	- 0 +			-	+	
الوضع النسبي	(C_f)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f)	(C_f)	(C_f)	
	تحت	في $A\left(-\frac{3}{2}, -3\right)$	فوق	تحت	فوق	
	(Δ)		(Δ)	(Δ)	(Δ)	

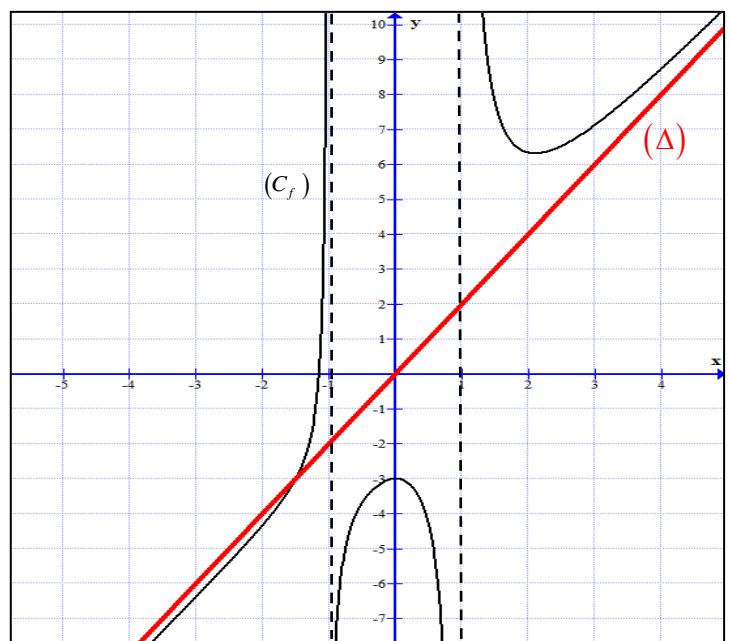
7. تبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا:

• f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ و من ثم على المجال $[-1.2; -1.1]$:
ولدينا: $f(-1.2) = -1.03 < 0$ و $f(-1.1) = 1.609 > 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $[-1.2; -1.1]$ حلا وحيدا β .

تفسير النتيجة هندسيا:

β هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

8. انشاء (Δ) والمنحنى $f(0)=-3$:**9. شرح كيفية رسم (Ch) انطلاقا من (Cf) :**

لدينا $h(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} + 1 = f(x) + 1$. (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{j}$.

10. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = \text{Im}$

- إذا كان $|m| \in [0; f(\alpha)]$ أي أن $m \in [-f(\alpha); f(\alpha)]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $|m| = f(\alpha)$ أي أن $m = f(\alpha)$ أو $m = -f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا و حلا سالبا .
- إذا كان $|m| \in]f(\alpha); +\infty[$ أي أن $m \in]-\infty; -f(\alpha)[\cup]f(\alpha); +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين و حلا سالبا .

حل التمرين -5-

الجزء الأول :

1. تحديد $g(-2)$ و إشارة $g(-1)$

$$g(-2) < 0 \quad \text{و} \quad g(-1) > 0$$

2. تعليل وجود عدد حقيقي a من المجال $[-2; -1]$: $g(a) = 0$

من التمثيل البياني : g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و من ثم على $[-2; -1]$. ولدينا $g(-2) < 0$ و $g(-1) > 0$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي a وحيد من المجال $[-2; -1]$ يحقق $g(a) = 0$.

3. التحقق حسابيا أن : $-1.48 < a < -1.47$

$g(-1.48) = -0.12$ و $g(-1.47) = 0.0035$. نلاحظ ان 0 محصور بين -0.12 و 0.0035 .
إذن : $a \in]-1.48; -1.47[$.

4. استنتاج إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 + 2}$. معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

2. التحقق أن $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$

من أجل كل x من R لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 + 2) - 2x(x^3 + x^2 - 4)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{3x^4 + 6x^2 + 2x^3 + 4x - 2x^4 - 2x^3 + 8x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 + 12x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها :

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$. نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+
x	-	-	0	+
$f'(x)$	-	+	0	+

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty; \alpha[$ و $]0; +\infty[$ و متناقصة تماما على $[\alpha; 0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	2	$+\infty$

4. تبين أن (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 + 2} - (x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 4 - x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x - 6}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 + 2} - (x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 4 - x^3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 6}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم (Δ):

ندرس إشارة $[f(x) - x]$ بإشارة $\frac{-2x-6}{x^2+2}$, إشارة $\frac{-2x-6}{x^2+2}$ من إشارة البسط. نلخص إشارة $[f(x) - x]$ و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع في (Δ) $A(-3; -2)$	(C_f) تحت (Δ)

5. تبين ان المنحنى يقبل مماسين موازيين لـ (Δ):

$$\text{المعادلة } f'(x) = 1 \text{ تكافئ } \frac{x^4 + 6x^2 + 12x}{(x^2 + 2)^2} = 1 \text{ ومنه } x^4 + 6x^2 + 12x = (x^2 + 2)^2 \text{ ومنه } x^4 + 6x^2 + 12x = x^4 + 4x^2 + 4 \text{ ومنه } x^4 + 6x^2 + 12x = x^4 + 4x^2 + 4$$

$$x^2 + 6x - 2 = 0. \Delta = 44 > 0. \text{ ومنه فالمعادلة } f'(x) = 1 \text{ تقبل حلين متمايزين إذن يوجد مماسين موازيين لـ } (\Delta).$$

6. تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا:

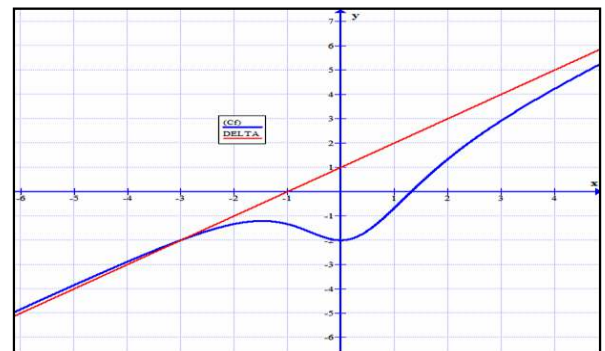
• f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ و من ثم على المجال $[1.3; 1.4]$:
و لدينا: $f(1.3) = -0.03 < 0$ و $f(1.4) = 0.17 > 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[1.3; 1.4]$ حلا وحيدا β .

تفسير النتيجة هندسيا:

β هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

7. إنشاء (Δ) والمنحنى (C_f) , $f(0) = -2$, $f(\alpha) = -1.2$



حل التمرين 6-

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

1. حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^3 + 3x^2 - 3x + 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x^3 + 3x^2 - 3x + 2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$$

2. دراسة تغيرات الدالة g :

من اجل كل x من $\mathbb{R}$, $g'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = 0$, $\Delta = 0$, $x = 1$.
و منه $g'(x) \leq 0$ من اجل كل x من $\mathbb{R}$. الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3. حساب $g(-2)$ و استنتاج إشارة $g(x)$: $g(2) = 0$

g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تتعدم من اجل $x = 2$. وعليه إشارة $g(x)$ كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$		$+$	$-$

إشارة $g(-x)$:

$g(-x) < 0$ إذا كان $-x > 2$ و منه $x < -2$ و $g(-x) > 0$ إذا كان $-x < 2$ و منه $x > -2$ و $g(-x) = 0$ إذا كان $-x = 2$ و منه $x = -2$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$		$-$	$+$

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2}$

1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ م.م عمودي لـ (C_f) .

2. التحقق أن $f'(x) = \frac{2g(-x)}{(x+1)^3}$:

من أجل كل x من $R - \{-1\}$ لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(6x^2 + 14x + 8)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^3 + 7x^2 + 8x + 2 + 3)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)[(6x^2 + 14x + 8)(x+1) - 2(2x^3 + 7x^2 + 8x + 2 + 3)]}{(x+1)(x+1)^3}$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 4}{(x+1)^3} = \frac{2((-x)^3 + 3(-x)^2 + 3(-x) + 2)}{(x+1)^3} = \frac{2g(-x)}{(x+1)^3}$$

3. استنتاج اتجاه تغيرات f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط والمقام . نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول أدناه :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$g(-x)$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

f متزايدة تماماً على المجالين $]-2; -\infty[$ و $]-1; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $[-2; -1]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-3	$-\infty$	$+\infty$

4. تبين أن $f(x) = 2x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2}$:

$$2x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(2x+2)(x^2+2x+1) - 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2} = f(x)$$

5. تبين أن (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[2x + 2 - \frac{1}{(x+1)^2} - (2x + 2) \right] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} -\frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) :

ندرس إشارة $f(x) - y$ أي إشارة $-\frac{1}{(x+1)^2}$. لدينا من أجل كل x من $R - \{-1\}$

$$0 < \frac{-1}{(x+1)^2} \text{ إذن } (C_f) \text{ تحت } (\Delta) \text{ في المجالين }]-\infty; -1[\text{ و }]1; +\infty[.$$

6. تبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a:

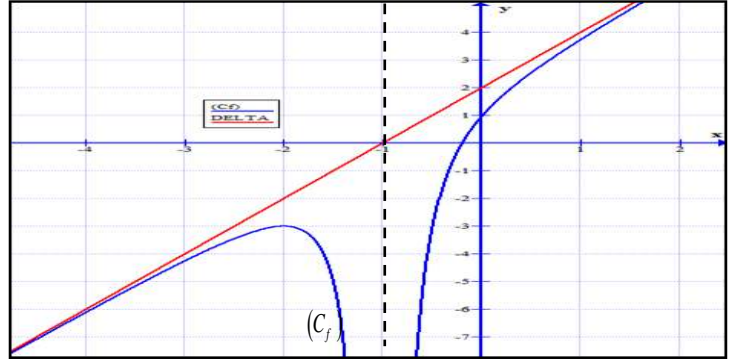
• f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ و من ثم على المجال $[-0.3; -0.2]$:
و لدينا $f(-0.3) = -0.64 < 0$ و $f(-0.2) = 0.0375 > 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-0.3; -0.2[$ حلا وحيدا α .

تفسير النتيجة هندسيا:

α هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

7. إنشاء (Δ) و (C_f) $f(0) = 1$ ، $f(\alpha) = 0$



(Δ)

8. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=2x+m$:

حلول المعادلة $f(x) = 2x + m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + m$ (مناقشة ماثلة)

• إذا كان $m \in]-\infty; 1[$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين.

• إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حلا معدوما و حلا سالبا.

• إذا كان $m \in]1; 2[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

• إذا كان $m \in [2; +\infty[$ المعادلة لا تقبل حولا.

حل التمرين -7-

الجزء الأول: g دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية.

1. بقراءة بيانية: أ. شكل جدول تغيرات g :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	-2	-6	$+\infty$

ب. عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ ، $g'(1)$ و $g''(1)$:

$$g(0) = -2, g(2) = -6, g'(0) = 0, g'(2) = 0$$

$$g'(1) = \frac{-1 - (-4)}{0 - 1} = -3 \quad (D) \text{ هو معامل توجيه المماس}$$

$g''(1) = 0$: نلاحظ أن المماس (D) يخترق المماس في $A(1; -4)$ ، إذن A نقطة انعطاف و بالتالي: $g''(1) = 0$

ج. اكتب معادلة (D) :

معادلة (D) هي: $y = g'(1)(x-1) + g(1)$ و لدينا $g(1) = -4$ و $g'(1) = -3$

و منه $y = -3(x-1) - 4$. و بالتالي معادلة المماس (D) هي: $y = -3x - 1$

د. حل المتراجحة الآتية $g'(x) < 0$: $x \in]0; 2[$

2. باستعمال (C) ، بين أن $a = 1$ ، $b = -3$ و $c = -2$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ و $g'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$$\begin{cases} c = -2 \\ -a - b = 2 \dots (1) \\ 3a + b = 0 \dots (2) \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} c = -2 \\ a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} c = -2 \\ a + b - 2 = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} g(0) = -2 \\ g(1) = -4 \\ g'(2) = 0 \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد : $2a = 2$ ومنه $a = 1$

نعوض قيمة a في (1) نجد $1 + b = -2$ ومنه $b = -3$

اذن $a = 1$ ، $b = -3$ و $c = -2$: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين العددين 3.1 و 3.2 :

g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[3.1; 3.2]$ ولدينا : $\begin{cases} g(3.1) < 0 \\ g(3.2) > 0 \end{cases}$ أي $g(3.1) \times g(3.2) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α حيث $3.1 < \alpha < 3.2$.

4. استنتج : حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = 3x^2 - 6x$ و $g''(x) = 6x - 6$

$g''(x) > 0$ من أجل $x < 1$ و $g''(x) < 0$ من أجل $x > 1$ و $g(1) = -4$

g'' تتعدم عند 1 مغيرة إشارتها إذن $A(1; -4)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$

1. احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجال تعريفها . وفسر النتائج هندسيا .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$\Leftrightarrow$ المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ م.م عمودي لـ (C_f) .

2. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R - \{1\}$ يكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$.

من أجل كل x من $R - \{1\}$ لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)]}{(x-1)(x-1)^3} = \frac{(3x^2)(x-1) - 2(x^3+1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3 - 2}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 - 2}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

استنتج اتجاه تغير f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$(x-1)^3$	-	+	+
$f'(x)$	+	-	+

f متزايدة تماما على $]-\infty; 1[$ و $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $1; \alpha]$.

و شكل جدول تغيراتها .

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

حساب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$:

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

استنتاج أن (C_f) يقبل م مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x+2) = 0 \text{ معناه } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x - 2 = 0 \text{ معناه } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - x = 2$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

$$f(x) - (x+2) = \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^2} - 2 = \frac{2x^2 - x + 1 - 2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - x + 1 - 2x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2} = \frac{3x - 1}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	1
$f(x) - y$	-	0	+	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) بقطع $B\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

4. بيان أن $f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$:

لدينا $g(\alpha) = 0$ ومنه $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2 = 0$ ومنه $\alpha^3 = 3\alpha^2 + 2$.

$$\text{من جهة أخرى: } f(\alpha) = \frac{\alpha^3 + 1}{(\alpha-1)^2} \text{ ومنه } f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 2 + 1}{(\alpha-1)^2} \text{ ومنه } f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 3}{(\alpha-1)^2} \text{ ومنه } f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 3 + 6\alpha}{(\alpha-1)^2} \text{ ومنه } f(\alpha) = 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$$

$$\text{ومنه } f(\alpha) = \frac{3(\alpha-1)^2 + 6\alpha}{(\alpha-1)^2} \text{ ومنه } f(\alpha) = \frac{3(\alpha-1)^2 + 6\alpha}{(\alpha-1)^2} \text{ ومنه } f(\alpha) = \frac{3(\alpha^2 - 2\alpha + 1) + 6\alpha}{(\alpha-1)^2}$$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

$$\text{لدينا } 3.1 < \alpha < 3.2 \text{ ومنه } 2.1 < \alpha - 1 < 2.2 \text{ ومنه } 4.41 < (\alpha-1)^2 < 4.84 \text{ ومنه } 0.2 < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < 1.32 \text{ ومنه } 1.2 < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < 7.22$$

$$\text{ومنه } 1.2 \times 3.1 < \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 1.32 \times 3.2 \text{ ومنه } 3 + 3.72 < 3 + \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} < 3 + 4.22 \text{ ومنه } 6.72 < f(\alpha) < 7.22 \text{ إذن } 3 + 3.72 < f(\alpha) < 3 + 4.22$$

5. تبين أن: (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) :

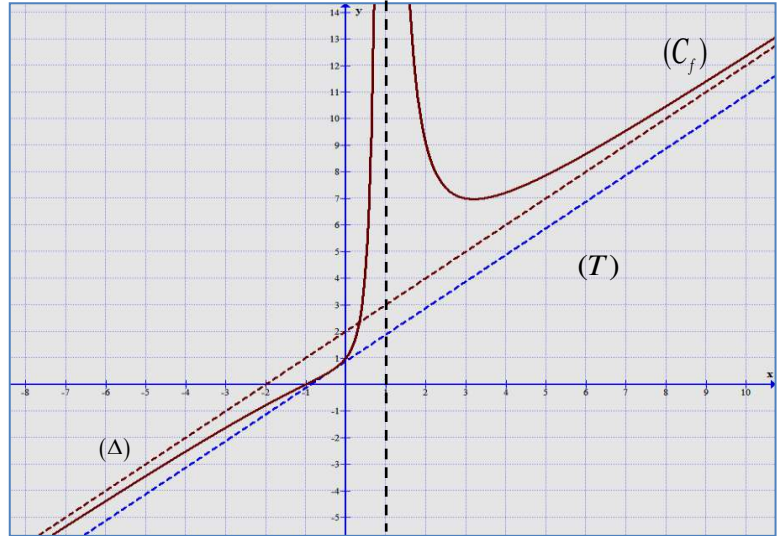
$$f'(x) = 1 \text{ ومنه } \frac{x^3 - 3x^2 - 2}{(x-1)^3} = 1 \text{ ومنه } x^3 - 3x^2 - 2 = (x-1)^3 \text{ ومنه } x = \frac{-1}{3}$$

$$(C_f) \text{ يقبل مماسا } (T) \text{ موازيا لـ } (\Delta) \text{ عند النقطة ذات الفاصلة } x = \frac{-1}{3}.$$

معادلته:

معادلة (T) هي : $y = f' \left(\frac{-1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{3} \right) + f \left(\frac{-1}{3} \right)$ و منه $y = 1 \left(x + \frac{1}{3} \right) + \frac{13}{24}$. و بالتالي معادلة المماس (D) هي : $y = x + \frac{7}{8}$

6. حساب $f(-1)$ ثم انشاء (Δ) و المنحنى (C_f) :



7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد حلول المعادلة : $f(x) = m$ (المناقشة أفقية)

⇔ إذا كان $m \in]-\infty; f(\alpha)[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا . ⇔ إذا كان $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلان .
 ⇔ إذا كان $m \in]f(\alpha); +\infty[$ المعادلة تقبل 3 حلول .

و المعادلة $f(x) = x + m$:

⇔ إذا كان $m \in]-\infty; \frac{7}{8}[$ لا توجد حلول . ⇔ إذا كان $m = \frac{7}{8}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا .
 ⇔ إذا كان $m \in \left[\frac{7}{8}; 2 \right[$ المعادلة تقبل حلان . ⇔ إذا كان $m = 2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .
 ⇔ إذا كان $m \in]2; +\infty[$ المعادلة تقبل حلان .

8. الدالة المعرفة على المجال $R - \{1\}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$

⇔ أدرس اتجاه تغير h وشكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة) :

من أجل كل x من $R - \{1\}$ لدينا ، $h'(x) = 2 \times [f'(x)] \times [f(x)]$

x	$-\infty$	-1	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	+		- 0 +	
$f(x)$	-	0 +		+ +	
$h'(x)$	-	0 +		- 0 +	

f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1; 1[$ و $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -1]$ و $]1; \alpha]$.

x	$-\infty$	-1	1	α	$+\infty$
$h'(x)$	-	0 +		- 0 +	
$h(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↗ $+\infty$			$+\infty$ ↘ $[f(\alpha)]^2$ ↗ $+\infty$	

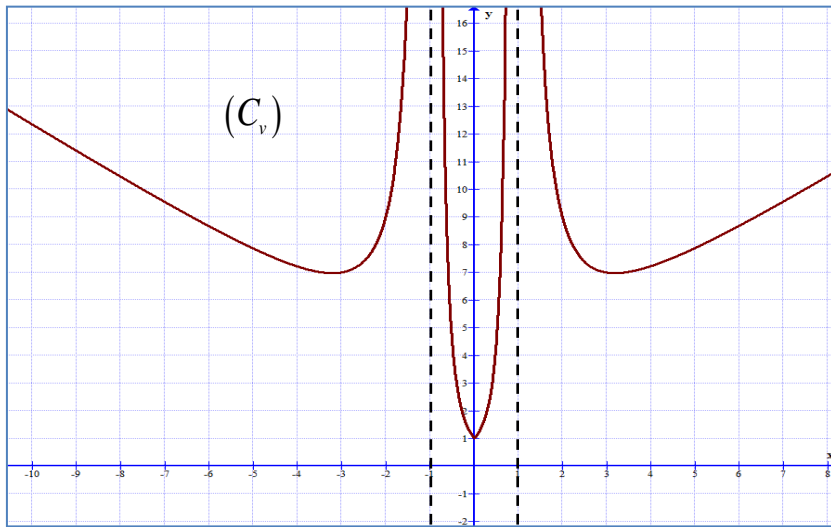
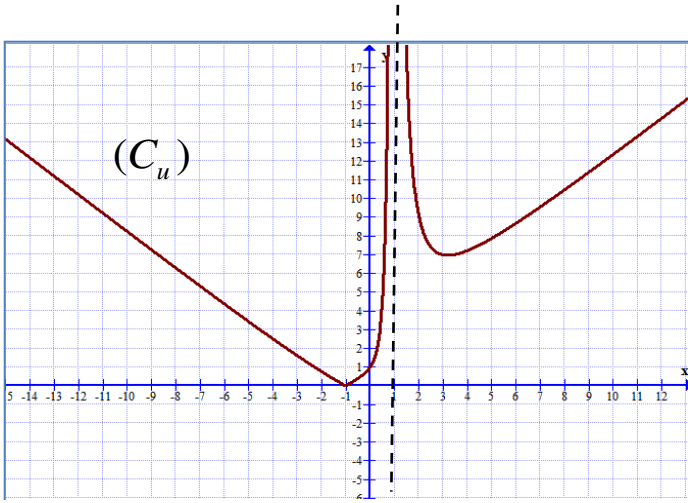
9. الدالة المعرفة على المجال $R - \{1\}$ كما يلي :

$u(x) = |f(x)|$ هو التمثيل البياني للدالة u .

← **أنشاء** (C_u) **انطلاقا من** (C_f) :

يكون (C_u) منطبقا على (C_f) في المجالات التي يكون فيه (C_f) فوق محور الفواصل .

يكون (C_u) منظر لـ (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي يكون فيه (C_f) تحت محور الفواصل .



10. الدالة المعرفة على المجال $R - \{-1;1\}$ كما

يلي : $v(x) = f(|x|)$ هو التمثيل البياني للدالة v .

← **بين أن** v **زوجية**

من اجل $x \in D_u, -x \in D_u$ و :

$v(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = v(x)$ إذن الدالة u زوجية .

← **أنشاء** (C_v) **انطلاقا من** (C_f) :

يكون (C_v) منطبقا على (C_f) في المجال

$[0;1[\cup]1;+\infty[$ ، و بما أن الدالة u زوجية فإن منحنيا منتظر بالنسبة إلى محور الترتيب .

11. الدالة المعرفة على المجال $R - \{2\}$ كما يلي : $k(x) = f(x-1) + 2$ هو التمثيل البياني للدالة k .

← **اشرح كيفية أنشاء** (C_k) **انطلاقا من** (C_f) :

$k(x) = f(x-1) + 2$ من الشكل $k(x) = f(x+a) + b$ مع $a = -1$ و $b = 2$.

إذن (C_k) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(1;-2)$.

وفقكم الله تلاميذ بكالوريا
2025