

الجزء الأول

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; 2]$ بتمثيلها البياني (C_f) ، المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحني

عند النقطتين $A(1; 1)$ و $B(-1 + \sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2)$.

كما في الشكل المقابل:

(1) أحسب العددين $f'(1)$ و $f'(-1 + \sqrt{2})$ ، ثم

عين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة التي ترتيبتها $2\sqrt{2} - 2$.

(2) عين تقريبا تآلفيا لـ $f(x)$ بجوار العدد 1 ثم استنتج

قيمة مقربة $f(0,98)$ ، $f(1,03)$.

(3) حل في $[0; 2]$ المعادلات التالية:

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0$$

(4) حل في $[0; 2]$ المتراجحات التالية: $f(x) \leq 0$ ، $f'(x) \leq 0$.

الجزء الثاني

f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول على المجال $[0; 2]$ بـ $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + 1}$ حيث a و b عدنان حقيقيان

(1) عين قيمتي a و b .

(2) بفرض أن $a = 0$ و $b = 1$

أ- احسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- عين القيمة الحدية المحلية للدالة f مع التبرير

د- عين حصر لـ $f(x)$ على المجال $[1; 2]$

الجزء الثالث

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-2; 2]$ بـ $g(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1}$

(1) بين أن الدالة g زوجية ثم اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

(2) اشرح كيفية تمثيل (C_g) منحنى الدالة g ، ثم مثله في نفس المستوي السابق.

(3) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $g(x) = m$

الجزء الرابع

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[-1; 0]$ بـ $h(x) = f(-2x)$

• احسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h (دون حساب عبارة الدالة h)

حل الجزء الأول

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; 2]$ بتمثيلها البياني (C_f) ، المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحنى

عند النقطتين $A(1; 1)$ و $B(-1 + \sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2)$.

كما في الشكل المقابل:

(1) حساب العددين $f'(1)$ و $f'(-1 + \sqrt{2})$:

$f'(1)$ هو معامل توجيه المماس في النقطة ذات

الفاصلة 1 وعليه نختار نقطتين من المماس و

لتكن $A(1; 1)$ و $C(0; 0,5)$ ومنه:

$$f'(1) = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{1 - 0,5}{1 - 0} = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}$$

و $f'(-1 + \sqrt{2}) = 0$ لأن المماس في النقطة

$B(-1 + \sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2)$ موازي إلى حامل

محور الفواصل.

• تعيين معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة التي ترتيبها $2\sqrt{2} - 2$:

$$y = f'(-1 + \sqrt{2})(x - (-1 + \sqrt{2})) + f(-1 + \sqrt{2})$$

$$= 0(x - (-1 + \sqrt{2})) + 2\sqrt{2} - 2$$

$$= 2\sqrt{2} - 2$$

(2) تعيين تقريبا تكافيا لـ $f(x)$ بجوار العدد 1 ثم استنتج قيمة مقربة $f(0,98)$ ، $f(1,03)$.

$$f(1,03) \simeq \frac{1}{2}(1,03) + \frac{1}{2}$$

$$\simeq 1,015$$

$$f(0,98) \simeq \frac{1}{2}(0,98) + \frac{1}{2}$$

$$\simeq 0,99$$

$$f(x) \simeq f'(1)(x - 1) + f(1)$$

وعليه

$$\simeq \frac{1}{2}(x - 1) + 1$$

لدينا لما x قريب إلى 1 :

$$\simeq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

(3) حل في $[0; 2]$ المعادلات التالية: $f(x) = 0$ ، $f'(x) = 0$.

$f(x) = 0$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل أي $S = \emptyset$

$f'(x) = 0$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) التي يمكن عندها تمثيل مماس لـ (C_f) موازي إلى حامل محور الفواصل أي $S = \{-1 + \sqrt{2}\}$

(4) حل في $[0; 2]$ المتراجحات التالية: $f(x) \leq 0$ ، $f'(x) \leq 0$.

$f(x) \leq 0$ معناه تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) التي تقع تحت أو تقطع حامل محور الفواصل أي $S = \emptyset$

$f'(x) \leq 0$ معناه تعيين المجالات التي تكون عليها الدالة f متناقصة تماما أي $S = [0; -1 + \sqrt{2}]$.

حل الجزء الثاني

f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول على المجال $[0; 2]$ بـ $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + 1}$ حيث a و b عددا حقيقيان
(1) تعين قيمتي a و b .

من التمثيل البياني لدينا $f(0) = 1$ معناه $b = 1$ وكذلك لدينا $f(1) = 1$ معناه $\frac{1^2 + a + b}{2} = 1$ معناه $\frac{2 + a}{2} = 1$ معناه $2 + a = 2$ ومنه $a = 0$
(2) بفرض أن $a = 0$ و $b = 1$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} \text{ لدينا}$$

أ- حساب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0; 2]$ ومن أجل كل $x \in [0; 2]$:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x+1) - (1)(x^2 + 1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $[x^2 + 2x - 1]$ لأن $(x+1)^2 > 0$

$$\Delta = 8 \quad \text{ونحل المعادلة } x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ : } x_1 = -1 + \sqrt{2} \text{ و } x_2 = -1 - \sqrt{2} \text{ ومنه}$$

ب- جدول تغيرات الدالة f

x	0	$-1 + \sqrt{2}$	2
$f'(x)$	-	0	+

x	0	$-1 + \sqrt{2}$	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$2\sqrt{2} - 2$	$\frac{5}{3}$

ج- عين القيمة الحدية المحلية للدالة f مع التبرير

f' انعدمت و غيرت من إشارتها في القيمة $-1 + \sqrt{2}$ إذن يوجد مجال مفتوح $]0; 1[$ يشمل $-1 + \sqrt{2}$ وعليه $f(-1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة على المجال $]0; 1[$

د- تعين حصر الدالة $f(x)$ على المجال $[1; 2]$

بما أن $x \in [1; 2]$ معناه $1 \leq x \leq 2$ وبما أن الدالة متزايدة تماما على المجال $[1; 2]$ فإن $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ إذن $\frac{5}{3} \geq f(x) \geq 1$.

حل الجزء الثالث

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-2; 2]$ بـ $g(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1}$

(1) تبين أن الدالة g زوجية.

لدينا من أجل كل $x \in [-2; 2]$ نجد $-x \in [-2; 2]$ و $g(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{|-x| + 1} = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1} = g(x)$ و $(|-x| = |x|)$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = f(x) & ; x \in [0; 2] \\ \frac{x^2 + 1}{-x + 1} & ; x \in [-2; 0] \end{cases}$$

✓ كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

مسألة شاملة في الاشتقاقية

(2) شرح كيفية تمثيل (C_g) منحنى الدالة g ، ثم مثله في نفس المستوى السابق.

بما أن $g(x) = f(x)$ على المجال $[0; 2]$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f) ونكمل التمثيل على المجال $[-2; 0]$ بالتناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب لأن g دالة زوجية.

(3) مناقشة بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول

$$g(x) = m$$

عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو

$$y = m$$

لما $m \in]-\infty; 2\sqrt{2} - 2[$ ليس للمعادلة حل على المجال $[-2; 2]$

لما $m = 2\sqrt{2} - 2$ للمعادلة حلان كلاهما مضاعف في المجال

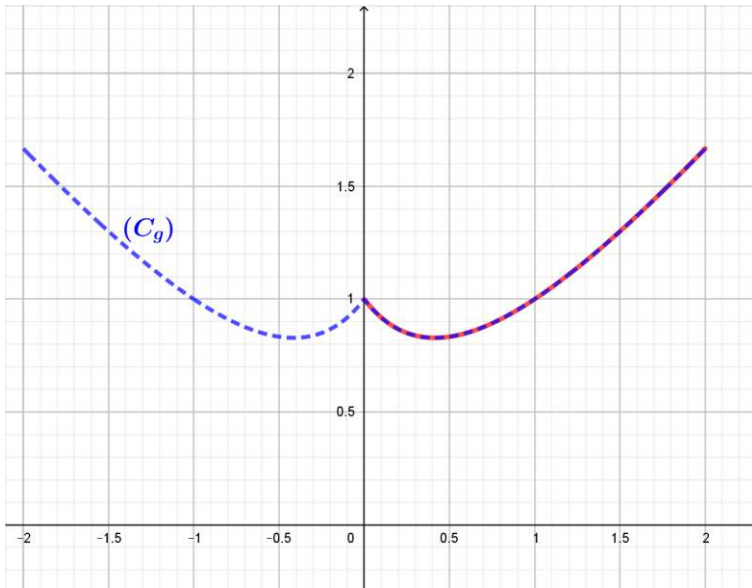
$$x \in [-2; 2]$$

لما $m \in]2\sqrt{2} - 2; 1[$ للمعادلة أربعة حلول على المجال $[-2; 2]$

لما $m = 1$ للمعادلة ثلاثة حلول على المجال $[-2; 2]$

لما $m \in]1; \frac{5}{3}]$ للمعادلة حلان على المجال $[-2; 2]$

لما $m \in] \frac{5}{3}; +\infty[$ ليس للمعادلة حل على المجال $[-2; 2]$



حل الجزء الرابع

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[-1; 0]$ بـ $h(x) = f(-2x)$.

• حساب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h (دون حساب عبارة الدالة h)

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $[-1; 0]$ ومن أجل كل $x \in [-1; 0]$: $h'(x) = -2f'(-2x)$

✓ ندرس إشارة $f'(-2x)$:

لدينا $f'(x) \leq 0$ لما $0 < x \leq -1 + \sqrt{2}$

نستبدل $-2x$ بـ x نجد : $f'(-2x) \leq 0$ لما $0 < -2x \leq -1 + \sqrt{2}$ يكافئ $\frac{-1 + \sqrt{2}}{-2} \leq x < 0$ أي لما $x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{2}}{-2}; 0 \right]$

ولدينا $f'(x) \geq 0$ لما $-1 + \sqrt{2} \leq x < 2$

نستبدل $-2x$ بـ x نجد : $f'(-2x) \geq 0$ لما $-1 + \sqrt{2} \leq -2x < 2$ يكافئ $-1 < x \leq \frac{-1 + \sqrt{2}}{-2}$ أي لما $x \in \left[-1; \frac{-1 + \sqrt{2}}{-2} \right]$

وعليه:

ومنه الدالة متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{-1 + \sqrt{2}}{-2}; 0 \right]$ و متزايدة تماما على المجال

$$\left[-1; \frac{-1 + \sqrt{2}}{-2} \right]$$

x	-1	$\frac{-1 + \sqrt{2}}{-2}$	0
$f'(-2x)$		$+$	$-$
-2		$-$	$-$
$h'(x)$		$-$	$+$