



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

ملخص شامل في الأعداد المركبة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 04 / 05

تعريف وخواص هامة في الأعداد المركبة

1

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ: $\mathbb{C}$
- الشكل الجبري: نسمي العبارة $z = x + iy$ بالشكل الجبري للعدد المركب z حيث: x و y عدنان حقيقيان و i عنصر غير حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{C}$ يحقق: $i^2 = -1$.
- يسمى x بالجزء الحقيقي لـ z ويرمز له بالرمز $Re(z)$.
- يسمى y بالجزء التخيلي لـ z ويرمز له بالرمز $Im(z)$.
- يسمى $\bar{z}$ مرافق العدد المركب z ، حيث: $\bar{z} = z - i(y)$.
- بعض العمليات في $\mathbb{C}$:

ليكن $z_n = x_n + iy_n$ أعداد مركبة، وليكن α عدد حقيقي، لدينا ماييلي:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad \circ$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \quad \circ$$

$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2-(iy)^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \quad ; z \neq 0 \quad \circ$$

خواص عدد مركب:

$$z\bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 = x^2 + y^2 \quad \circ$$

$$z - \bar{z} = 2iIm(z) = 2iy \quad \circ$$

$$z + \bar{z} = 2Re(z) = 2x \quad \circ$$

$$\overline{\bar{z}} = z \quad \circ$$

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \text{مع} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \circ$$

$$z \neq 0 \quad \text{مع} \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \circ$$

$$w \neq 0 \quad \text{مع} \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad \circ$$

ملاحظات:

- إذا كان $y = 0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x = 0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف.
- يكون العدد المركب z معدوما إذا وفقط إذا كان $Re(z) = 0$ و $Im(z) = 0$

التفسير الهندسي للعدد المركب:

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$
- لكل نقطة $M(x; y)$ من المستوي نرفق العدد المركب $z = x + iy$.
- نقول أن النقطة M هي صورة العدد المركب z ، والشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z .
- كل نقطة M هي صورة العدد لعدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، ونقول أن z لاحقة النقطة M .
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ومحور التراتيب يسمى المحور التخيلي والمستوي يسمى المستوي المركب.

● **لاحقة شعاع:** A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $z_B - z_A$.

● **طويلة عدد مركب:** نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ: $|z|$ حيث:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

● **خواص طويلة عدد مركب:**

من أجل كل عددين مركبين z و w . A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب: $AB = |z_B - z_A|$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad \circ$$

$$|z| \geq 0 \quad \circ$$

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \circ$$

$$-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z| \quad \circ$$

$$|\bar{z}| = |z| \quad \circ$$

$$|-z| = |z| \quad \circ$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \circ$$

$$|z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z| \quad \circ$$

$$|z|^n = |z^n| \quad \circ$$

$$w \neq 0 \quad \text{مع} \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \circ$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \circ$$

$$|z - w| \leq |z| + |w| \quad \circ$$

● **التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب:**

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \frac{AB}{AC}$$

● **عمدة عدد مركب:**

○ نسمي عمدة العدد المركب z كل قياس زاوية بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

ونرمز لها بالرمز: $\theta = \arg(z)$ حيث: $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

○ إذا كانت θ عمدة للعدد المركب غير المعدوم z مع $z = x + iy$ و $z \neq 0$ فإن:

$$|z| = r \quad ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

○ كل عدد مركب غير معدوم له عدد غير منته من العمدة، أي إذا كانت θ عمدة لـ z فإن $\theta + 2k\pi$ عمدة

له حيث $k \in \mathbb{Z}$.

○ $\arg(0)$ و $\arg(\infty)$ غير معنيين.

$$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \quad \circ$$

● **خواص عمدة عدد مركب غير معدوم:**

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) \quad \circ$$

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z}{w}\right) &= \arg(z) - \arg(w) \quad \circ \\ \arg(z^n) &= n \cdot \arg(z) + 2k\pi \quad \circ \\ \arg(\bar{z}) &= -\arg(z) + 2k\pi \quad \circ \\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) &= -\arg(z) + 2k\pi \quad \circ \\ \arg(-z) &= \pi + \arg(z) \quad \circ \end{aligned}$$

● التفسير الهندسي لعمدة عدد مركب:

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) &= \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) \\ &= -(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) = -[(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AC})] = -(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

إذن:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$$

● الشكل المثلثي لعدد مركب: نسمي الكتابة: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ بالشكل المثلثي للعدد المركب z ,

$$\text{حيث: } \theta = \arg(z) \quad \text{و} \quad r = |z|$$

● ترميز أولر: نضع: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ، هذا الترميز يسمى ترميز أولر، حيث $e^{i\theta}$ عدد مركب

طويلته 1 و θ عمدة له.

● الشكل الأسّي لعدد مركب: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له، يكتب على الشكل:

$$z = re^{i\theta}$$

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسّي للعدد المركب z .

● دستور موافر:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

● خواص (دستور موافر):

z و w عدنان مركبان، θ و α عمدتهما على الترتيب، لدينا ما يلي:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z \cdot w| e^{i(\theta+\alpha)} \quad \circ \\ |w| \neq 0 \quad \text{مع} \quad \frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|} e^{i(\theta-\alpha)} \quad \circ \\ |w| \neq 0 \quad \text{مع} \quad \frac{1}{w} &= \frac{1}{|w|} e^{i(-\alpha)} \quad \circ \\ \bar{z} &= |z| e^{i(-\theta)} \quad \circ \\ n \in \mathbb{N} \quad \text{حيث} \quad z^n &= |z|^n e^{in\theta} \quad \circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N}^* \text{ و } k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث} \quad \sqrt[n]{z} &= z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \quad \circ \\ -e^{i\theta} &= e^{i(\theta+\pi)} \quad \circ \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \circ \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \circ \end{aligned}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = i \quad \circ$$

$$e^{-i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = -i \quad \circ$$

$$e^{i2k\pi} = 1 \quad \circ$$

$$e^{i(2k+1)\pi} = -1 = i^2 \quad \circ$$

توطئة: ●

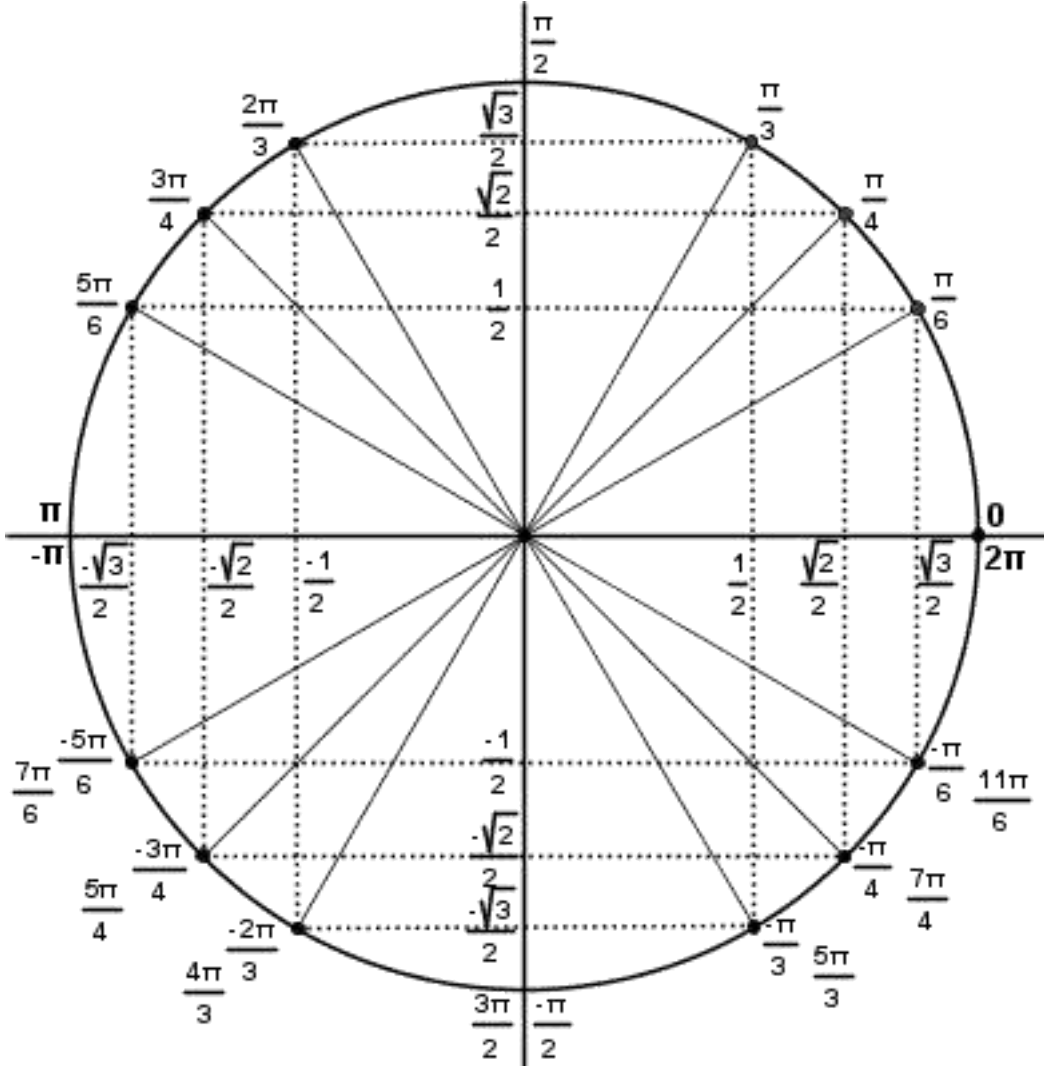
ليكن z عدد مركب، θ عمدة له، $r = |z|$ و $k \in \mathbb{Z}$ ، لدينا:

$$z = \underbrace{z + iy}_{\text{الشكل الجبري}} = \underbrace{r[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)]}_{\text{الشكل المثلثي}} = \underbrace{re^{i(\theta+2k\pi)}}_{\text{الشكل الأسّي}}$$

● كيفية تعيين قيم العدد الطبيعي n :

$\arg(z) = k\pi$	يكافئ	z عدد حقيقي غير معدوم	○
$n \cdot \arg(z) = k\pi$	يكافئ	z^n عدد حقيقي غير معدوم	إذن ○
$\arg(z) = 2k\pi$	يكافئ	z عدد حقيقي موجب تماما	○
$n \cdot \arg(z) = 2k\pi$	يكافئ	z^n عدد حقيقي موجب تماما	إذن ○
$\arg(z) = \pi + 2k\pi$	يكافئ	z عدد حقيقي سالب تماما	○
$n \cdot \arg(z) = \pi + 2k\pi$	يكافئ	z^n عدد حقيقي سالب تماما	إذن ○
$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	يكافئ	z تخيلي صرف غير معدوم	○
$n \cdot \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	يكافئ	z^n تخيلي صرف غير معدوم	إذن ○
$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	يكافئ	z تخيلي صرف موجب تماما	○
$n \cdot \arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	يكافئ	z^n تخيلي صرف موجب تماما	إذن ○
$\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	يكافئ	z تخيلي صرف سالب تماما	○
$n \cdot \arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	يكافئ	z^n تخيلي صرف سالب تماما	إذن ○
$\sin \theta = 0$	يكافئ	z حقيقي	○
$\sin \theta = 0$ و $\cos \theta \geq 0$	يكافئ	z حقيقي موجب	○
$\sin \theta = 0$ و $\cos \theta \leq 0$	يكافئ	z حقيقي حقيقي سالب	○
$\cos \theta = 0$		z تخيلي	○
$\cos \theta = 0$ و $\sin \theta \geq 0$	يكافئ	z تخيلي صرف موجب	○
$\cos \theta = 0$ و $\sin \theta \leq 0$	يكافئ	z تخيلي صرف سالب	○

● الدائرة المثلثية:



● **نتائج (من الدائرة المثلثية):** من أجل كل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \quad \circ$$

$$\sin(k\pi) = 0 \quad \circ$$

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & ; \text{ زوجي } k \\ -1 & ; \text{ فردي } k \end{cases} \quad \circ$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} 1 & ; \text{ زوجي } k \\ -1 & ; \text{ فردي } k \end{cases} \quad \circ$$

$$\cos \theta = \sin \theta \quad \text{يكافئ} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \circ$$

$$\cos \theta = -\sin \theta \quad \text{يكافئ} \quad \theta = \frac{\pi}{4} - k\pi \quad \circ$$

● **علاقات مثلثية هامة:**

$$\cos(\theta + \alpha) = \cos(\theta) \cos(\alpha) - \sin(\theta) \sin(\alpha) \quad \circ$$

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta) \cos(\alpha) + \sin(\theta) \sin(\alpha) \quad \circ$$

$$\begin{aligned}
\sin(\theta + \alpha) &= \sin(\theta) \cos(\alpha) + \cos(\theta) \sin(\alpha) \quad \circ \\
\sin(\theta - \alpha) &= \sin(\theta) \cos(\alpha) - \cos(\theta) \sin(\alpha) \quad \circ \\
\cos^2(\theta) &= \frac{1}{2} [\cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta - \alpha)] \quad \circ \\
\sin^2(\theta) &= \frac{1}{2} [\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta + \alpha)] \quad \circ \\
\sin(\theta) \cos(\alpha) &= \frac{1}{2} [\sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta - \alpha)] \quad \circ \\
\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) &= 1 \quad \circ \\
\cos(2\theta) &= 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \quad \circ \\
\sin(2\theta) &= 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \quad \circ \\
\sin(-\theta) &= -\sin(\theta) \quad \circ \\
\cos(-\theta) &= \cos(\theta) \quad \circ \\
\sin(\pi - \theta) &= \sin(\theta) \quad \circ \\
\cos(\pi - \theta) &= -\cos(\theta) \quad \circ \\
\sin(\pi + \theta) &= -\sin(\theta) \quad \circ \\
\cos(\pi + \theta) &= -\cos(\theta) \quad \circ \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos(\theta) \quad \circ \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \sin(\theta) \quad \circ \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \cos(\theta) \quad \circ \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\sin(\theta) \quad \circ \\
\sin(\theta + 2k\pi) &= \sin(\theta) \quad \circ \\
\cos(\theta + 2k\pi) &= \cos(\theta) \quad \circ \\
\sin(\theta + k\pi) &= (-1)^k \sin(\theta) \quad \circ \\
\cos(\theta + k\pi) &= (-1)^k \cos(\theta) \quad \circ
\end{aligned}$$

المرجح في المستوي المركب

2

● المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط A ، B و C من المستوي. α ، β و γ أعداد حقيقية.

○ إذا كان: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ فإن G توجد نقطة وحيدة من المستوي تحقق العلاقة الشعاعية التالية:

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$$

تسمى هذه النقطة مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب، وتسمى أيضا

مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$

○ إذا كان: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فإن G تكون مركز ثقل الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$

● **خواص المرجح:**

○ إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ فإن النقطة G هي منتصف قطعة المستقيم (AB) .

- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \alpha)\}$ فإن النقط A, B و G على استقامة واحدة.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \alpha); (C; \alpha)\}$ مع $\alpha \neq 0$ وكانت النقط A, B و C ليست على استقامة فإن: G هي مركز ثقل المثلث ABC .
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta); (C; \gamma)\}$ فإن G مرجح الجملة إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; k\alpha), (B; k\beta); (C; k\gamma)\}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta); (C; \gamma)\}$ و H مرجح الجملة إذا كانت G مرجح الجملة $\{(H; \alpha + \beta), (C; \gamma)\}$.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta); (C; \gamma)\}$ فإنه من أجل نقطة M من المستوي يكون:

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta); (C; \gamma)\}$ فإنه من أجل أي نقطة M من المستوي يكون:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma) MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$$

● لاحقة المرجح:

إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta); (C; \gamma)\}$ فإن لاحقة النقطة G تُعطى بالعلاقة:

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

3 الدائرة وخصائصها

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما $z_A = a_1 + ia_2$ و $z_B = b_1 + ib_2$ على الترتيب، لدينا:

● المعادلة الديكارتية للدائرة (C) ذات المركز I ذو اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ وطول نصف القطر $r = \frac{\sqrt{|z_B - z_A|}}{2}$ تُعطى بالعلاقة التالية:

$$x^2 + y^2 - x(a_1 + b_1) - y(a_2 + b_2) + a_2 + b_2 = 0$$

● الدائرة المحيطة بالمثلث القائم يكون قطرها هو وتر هذا المثلث.

● الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع يكون مركزها هو ثقل هذا المثلث.

● إذا كان $|z_A - z_W| = |z_B - z_W| = |z_C - z_W| = r$ ، فإن النقط A, B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز W ونصف القطر r .

4 المستقيم وخصائصه

لتكن النقطت $A(x_A; y_A)$ ، $B(x_B; y_B)$ ، C و D من المستوي.
المعادلة المختصرة لمستقيم تعطى بـ $y = ax + b$ حيث a هو ميل المستقيم أو معامل توجيهه و b الترتيبة عند المبدأ.

- معامل توجيه مستقيم مار من النقطتين A و B غير المتطابقتين يعطى بالعلاقة: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- معادلة المستقيم المار بالنقطة A والموازي لمحور الفواصل تعطى بالعلاقة التالية: $y = y_A$
- معادلة المستقيم المار بالنقطة A والموازي لمحور الترتيب تعطى بالعلاقة التالية: $x = x_A$
- يتوازي مستقيمان إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه.
- يتعامد مستقيمان إذا وفقط إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 .
- يتوازي مستقيمان إذا وفقط إذا كانا عموديان على نفس المستقيم.
- لاثبات أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً، ولأجل ذلك يكفي إثبات أحد العلاقات التالية:

$$\overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB} \quad \circ$$

$$\text{حيث } \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = t \quad \circ \quad t \in \mathbb{R}^*$$

- لاثبات أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدين يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدين، ولأجل ذلك يكفي إثبات أحد العلاقات التالية:

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \circ$$

$$(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \circ$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \circ$$

$$\text{حيث } \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = ki \quad \circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

- لاثبات أن النقط A ، B و C في استقامة، يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً

5 التعرف على طبيعة مثلث

● المثلث القائم:

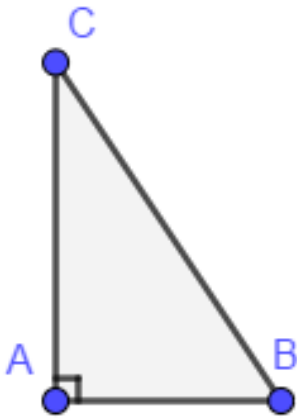
إذا كان: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = iy$ حيث: $y \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$

مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

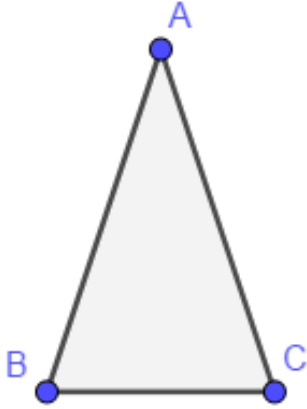
فإن: المثلث ABC قائم في A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg(iy) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$



● المثلث متساوي الساقين:



إذا كان: $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \theta + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ و $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$

حيث: $\theta \neq \left\{\pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{\pi}{3}\right\}$

مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

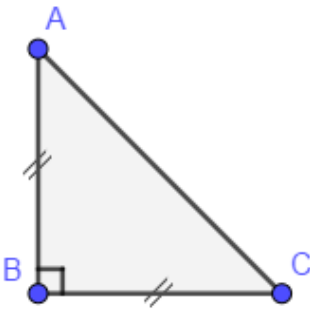
فإن: المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC = AB \Leftrightarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \theta + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

● المثلث القائم ومتساوي الساقين:



مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

إذا كان: $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \pm i$

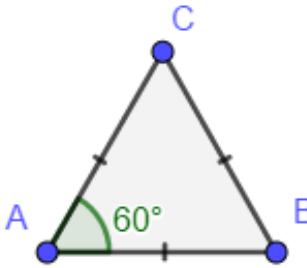
فإن: المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC = AB \Leftrightarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = |\pm i| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg(\pm i) = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

● المثلث المتقايس الأضلاع:



إذا كان: $\left\{\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ و $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$

مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

فإن: المثلث ABC متقايس الأضلاع رأسه A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC = AB \Leftrightarrow \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

● ملاحظات هامة:

- الارتفاع هو قطعة مستقيم تكون صادرة من رأس من رؤوس المثلث و تكون عمودية على الضلع المقابل و يمثل الارتفاع البعد بين الرأس و الضلع المقابل كما تتقاطع الارتفاعات في نقطة تسمى المركز القائم.

- المحور هو مستقيم يمر من أحد أضلاع المثلث في منتصفه و يكون عمودياً عليه و تتلاقى محاور مثلث في نقطة تسمى مركز الدائرة المحيطة بمثلث و يكون لهذه النقطة نفس البعد عن رؤوس المثلث الثلاث و يكون تقاطع محورين فقط كافياً لمعرفة مركز هذه الدائرة.

○ **المتوسط** هو قطعة مستقيم تنطلق من رأس من رؤوس المثلث و تمر من منتصف الضلع المقابل وتتقاطع المتوسطات الثلاث في نقطة تسمى مركز ثقل المثلث و يكون تقاطع متوسطين فقط كافيا لمعرفة مركز الثقل. كما يكون البعد بين رأس المثلث و مركز الثقل مساويا لـ $\frac{2}{3}$ المتوسط الصادر من ذلك الرأس.

○ **المنصف**: هو مستقيم يمرّ من رأس من رؤوس المثلث و يقسم الزاوية إلى نصفين و تتقاطع المنصفات الثلاثة في مركز الدائرة المحاطة بالمثلث وهي الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلث الثلاث.

6 التعرف على طبيعة رباعي

● متوازي الأضلاع:

$ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

○ أي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أو $z_B - z_A = z_C - z_D$

○ القطران متناصفان أي:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

● المربع:

$ABCD$ مربع إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

○ إذا تحققت الشروط الثلاثة معا:

• أي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أو $z_B - z_A = z_C - z_D$

• أي: $AB = AD$ أو $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

• أي: $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \pm \frac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$

○ القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان أي إذا تحققت الشروط

الثلاثة التالية:

• $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$

• $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$

• $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

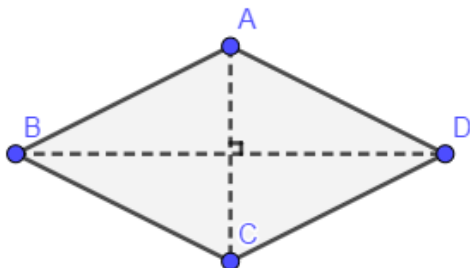
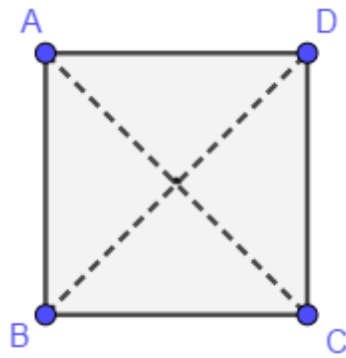
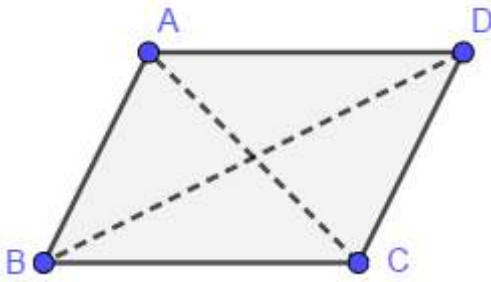
● المعين:

$ABCD$ معين إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

○ إذا تحقق الشرطين التاليين معا:

• أي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أو $z_B - z_A = z_C - z_D$

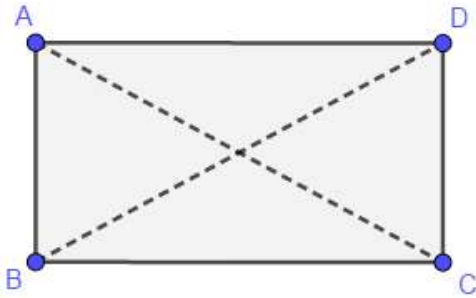
• أي: $AB = AD$ أو $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$



○ القطران متناصفان ومتعامدان أي إذا تحقق الشرطين التاليين معا:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$



● المستطيل:

ABCD مستطيل إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

○ إذا تحقق الشرطين التاليين معا:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{أي} \quad z_B - z_A = z_C - z_D$$

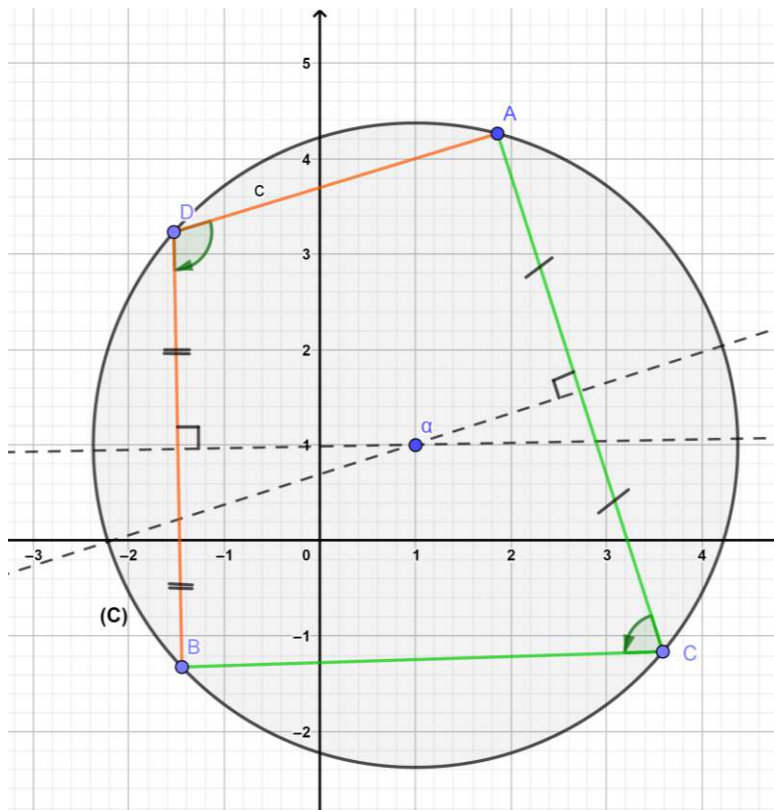
$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{أي} \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \pm \frac{\pi}{2}$$

○ القطران متناصفان ومتساويان أي إذا تحقق الشرطين التاليين معا:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

$$|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$$

● نتيجة:



تكون النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

أي: $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ ○
 $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$
وهذا معناه أن الزاويتان $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$ و $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB})$ متكاملتان.
أو: ○

$$\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \cdot \left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right) = \alpha ; \alpha \in \mathbb{R}$$

المعادلات في $\mathbb{C}$

7

● المعادلة $z^2 = a$: حيث: $a \in \mathbb{R}^*$

○ إذا كان $a > 0$ فإن للمعادلة حلان هما: $z = \sqrt{a}$ ، $z = -\sqrt{a}$
○ إذا كان $a < 0$ فإن للمعادلة حلان هما: $z = i\sqrt{-a}$ ، $z = -i\sqrt{-a}$

● المعادلة $az^2 + bz + c = 0$: حيث a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى المميز.

○ إذا كان $\Delta > 0$ فإن للمعادلة حلين مختلفين هما:

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

○ إذا كان $\Delta = 0$ فإن للمعادلة تقبل حل حقيقي مضاعف هو:

$$z = -\frac{b}{2a}$$

○ إذا كان $\Delta < 0$ فإن للمعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين ومختلفين هما:

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} ; z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

● نتائج:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) \quad \circ$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \circ \quad \text{و} \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

مجموعات النقط في المستوي المركب

8

لنعتبر في كل ما سيأتي أن A, B و M نقط من المستوي المركب لاحقاتها على الترتيب: z_A, z_B و z

مع $a; z_0 \in \mathbb{C}^*$: $|az - z_A| = |z_0|$ ●

○ إذا كان $a = 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = |z_0|$

$$(AM = r \text{ يكافئ } |z - z_A| = |z_0|)$$

○ إذا كان $a \neq 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $\frac{z_0}{a}$ ونصف قطرها

$$r = \left| \frac{z_0}{a} \right|$$

مع $z_A \neq z_B$ و $k \in \mathbb{C}$: $|z - z_A| = |kz_0 - z_B|$ ●

○ إذا كان $k = 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = |z_B|$

○ إذا كان $k = 1$ فإن مجموعة النقط M هي محور قطعة المستقيم (AB)

$$(AM = BM \text{ يكافئ } |z - z_A| = |z - z_B|)$$

○ إذا كان $k = -1$ فإن مجموعة النقط M هي محور قطعة المستقيم (AB') ، حيث B' لاحقتها

$$\text{هي: } z_{B'} = -z_B$$

$$(AM = B'M \text{ يكافئ } |z - z_A| = |-z - z_B| = |-(z - (-z_B))| = |z - z_{B'}|)$$

○ إذا كان $k \in \mathbb{C}^*$ و $|k| \neq 1$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي دائرة قطرها $[GH]$ ، حيث G

هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (E; -k)\}$ و H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (E; k)\}$ مع E

$$\text{نقطة لاحقتها } z_E = \frac{z_B}{k}$$

مع $z_0 \in \mathbb{C}$: $(z - z_A)(\overline{z - z_A}) = |z_0|$ ●

○ إذا كان $z_0 \neq 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = \sqrt{|z_0|}$

○ إذا كان $z_0 = 0$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة A .

$$(z - z_A)(\overline{z - z_A}) = 0 \text{ وعليه } (z - z_A) : \overline{(z - z_A)} = 0 \text{ هذا يعطينا } z = z_A \text{ أو } \overline{z} = \overline{z_A}$$

مع $z \neq z_A \neq z_B$ و $\theta \in \mathbb{R}$: $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \theta$ ●

○ إذا كان $\theta = 0 + 2k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء

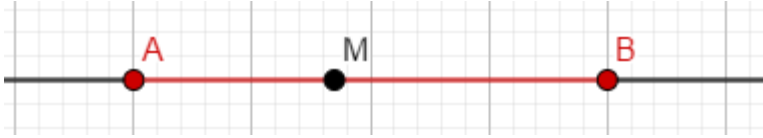
القطعة المستقيمة $]AB[$.



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

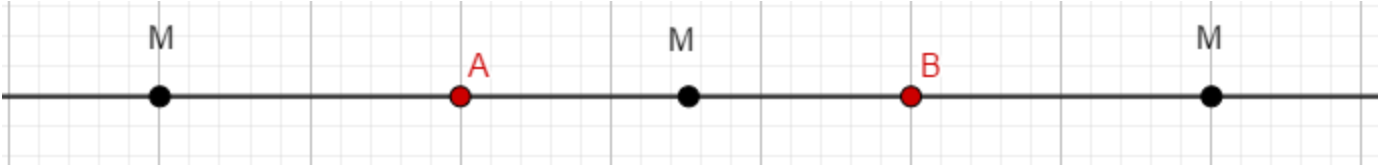
○ إذا كان $\theta = \pi + 2k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي القطعة المستقيمة $]AB[$

باستثناء النقطتين A و B



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

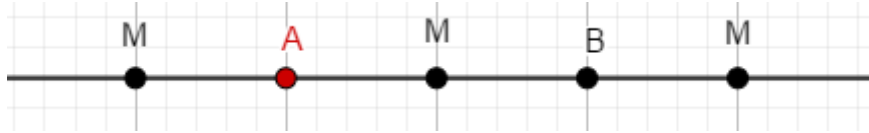
- إذا كان $\theta = 0 + k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

مع $z \neq z_A$: $L = \frac{z - z_B}{z - z_A}$ ●

- إذا كان L حقيقي فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A ونرمز لها بالرمز $(AB) - \{A\}$.



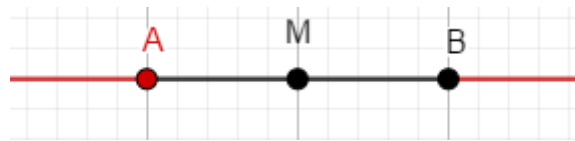
- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

- إذا كان L حقيقي موجب فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$ ، ونرمز لها بالرمز $(AB) - [AB]$.

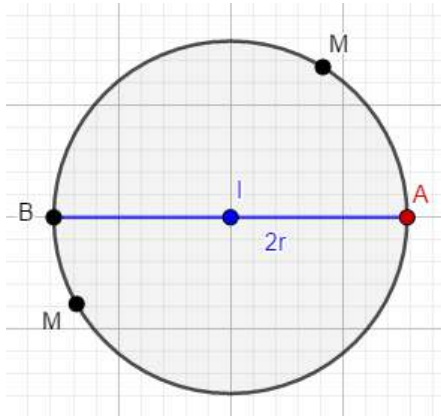


- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

- إذا كان L حقيقي سالب فإن مجموعة النقط M من المستوي هي قطعة المستقيم $[AB]$ باستثناء النقطة A ، ونرمز لها بالرمز $[AB] - \{A\}$.



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -



-شكل يوضح مجموعة النقط M

والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

- إذا كان L تخيلي صرف: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي مركزها النقطه I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطه A

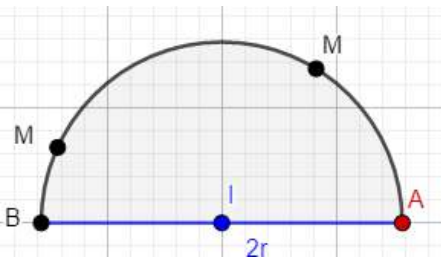
- إذا كان L تخيلي موجب: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع فوق المستقيم (AB) في الاتجاه المباشر) التي مركزها النقطه I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطه A



-شكل يوضح مجموعة النقط M

والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

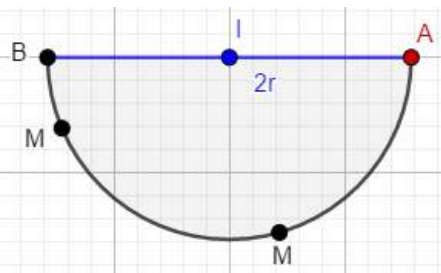
- إذا كان L تخيلي سالب: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع تحت المستقيم (AB) في الاتجاه المباشر) التي مركزها النقطه I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطه A



-شكل يوضح مجموعة النقط M

والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

$$\text{مع } z \neq z_A : \boxed{\arg(z - z_A) = \overline{\arg(z - z_A)}} \quad \bullet$$

- مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AM) الموازي لحامل محور الفواصل باستثناء النقطه A .

● مع $\theta \in \mathbb{R}$ (متغير) و $q \in \mathbb{R}^*$ (معلوم): $z = z_A + qe^{i\theta}$

مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي مركزها النقطة A وطول نصف قطرها r حيث: $r = |q|$

● مع $\theta \in \mathbb{R}$ (معلوم) و $q \in \mathbb{R}^*$ (متغير): $z = z_A + qe^{i\theta}$

○ إذا كان: $q \in \mathbb{R}$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع

توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \theta + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

○ إذا كان: $q \in \mathbb{R}_+$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A

وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \theta + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

○ إذا كان: $q \in \mathbb{R}_-$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع

توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \theta + (2k + 1)\pi ; k \in \mathbb{Z}$

● مع $\theta \in \mathbb{R}$ (معلوم) و $q \in \mathbb{R}^*$ (متغير): $\arg(z - z_A) = \arg(qz - z_B)$

○ إذا كان: $q = 1$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B

○ إذا كان: $q = -1$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB') باستثناء النقطتين A و B'

مع B' مع $z'_B = -z_B$

○ إذا كان: $q = i$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع فوق المستقيم

(AB') في الاتجاه المباشر) التي طول نصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB'}{2}$ ومركزها النقطة I ذات

اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_{B'}}{2}$ ، باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$

○ إذا كان: $q = -i$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع تحت المستقيم

(AB') في الاتجاه المباشر) التي طول نصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB'}{2}$ ومركزها النقطة I ذات

اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_{B'}}{2}$ ، باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$

● توجيه :

إذا صعب عليك تعيين مجموعة النقط فاستعمل الطريقة التحليلة وذلك بوضع $z = x + iy$ ، وركز جيدا في النشر والتبسيط والحساب.

التحويلات النقطية في المستوي المركب

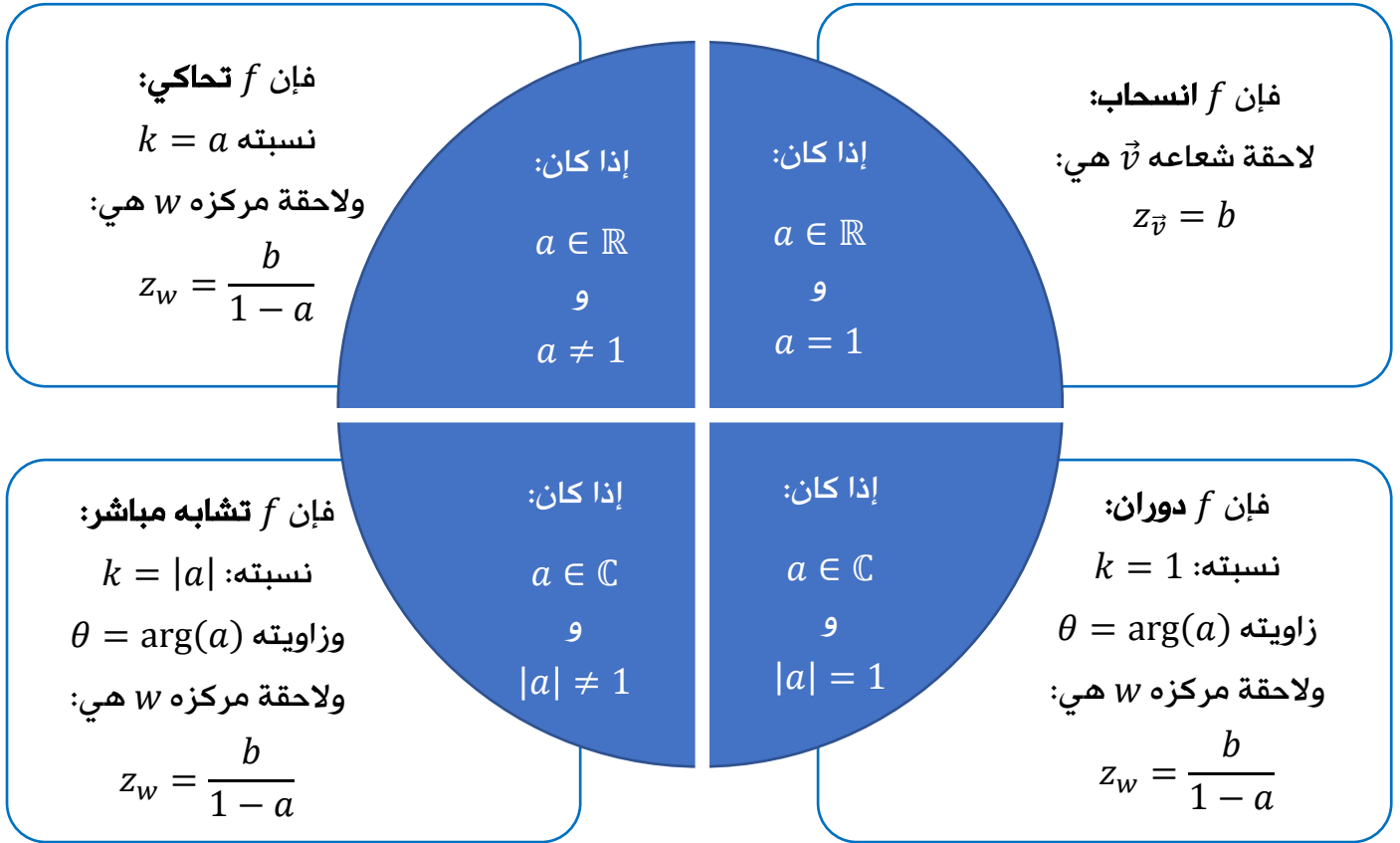
9

f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ والمعرف كما يلي:

$$f(z) = az + b$$

M' هي صورة النقطة M : $M' = f(M)$

● في حالة الشكل المركب: $z' = az + b$:



● في حالة الشكل المركب: $z' - z_w = a(z - z_w)$:

- f تحاكي: نسبته k ولاحقة مركزه z_w . عبارته المركبة: $z' - z_w = k(z - z_w)$
- f دوران: زاويته θ ولاحقة مركزه z_w . عبارته المركبة: $z' - z_w = e^{i\theta}(z - z_w)$
- f تشابه مباشر: نسبته k وزاويته θ ولاحقة مركزه z_w . عبارته المركبة: $z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w)$

● تعيين تحويل نقطي يحول نقطتين :

يطلب السؤال بالشكل التالي:

أوجد طبيعة التحويل R الذي يحول النقطة A إلى النقطة B ويحول النقطة C إلى النقطة D مع تعيين عناصره المميزة.

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \dots (1) \\ z_D = az_C + b \dots (2) \end{cases}$$

ب طرح (2) من (1) نجد: $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

من a نعين طبيعة التحويل R ، بعد ذلك نعوض قيمة a في (1) أو (2) ثم نجد العناصر المميزة للتحويل R .

● الاستنتاج من علاقة أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل:

إذا كان $a = \frac{z_B - z_W}{z_A - z_W}$ فإن: $z_B - z_W = a(z_A - z_W)$ وهذا يعني أن النقطة B هي صورة النقطة A بالتحويل الذي مركزه W ، ويتم تحديد طبيعة التحويل من خلال قيمة a كما ذكرنا سابقاً.

● تركيب التحويلات النقطية:

- تركيب عدة انسحابات هو انسحاب، شعاعه هو مجموع أشعتها.
- تركيب عدة تحاكيات لها نفس المركز هو تحاكي، له نفس المركز ونسبته هي جداء النسب.
- تركيب عدة دورانات لها نفس المركز هو دوران، له نفس المركز، وزاويته هي مجموع الزوايا.
- تركيب عدة تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو تشابه مباشر، له نفس المركز ونسبته هي جداء النسب وزاويته هي مجموع الزوايا.
- إذا اختلفت مركز التحويلات النقطية أو كانت من طبائع مختلفة، نتعرف على طبيعة مركباتها باستعمال العبارة المركبة ونستعمل نفس الطريقة المستخدمة في تركيب الدوال العددية.

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶