

طول تهازين

الدوال اللوغاريتمية

لشعبة علوم تجريبية
معداد : خالربخاخشة

نوفمبر 2019

التمارين

التمرين 1) باك 2009) 1مر 7

(I) دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

(3) أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانياً.

ب- باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

ج- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

د- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

(4) أرسم (C_f) .

(5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

التمرين 2) باك 2010) 1مر 10

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) بين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) عين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازياً للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

(4) أ- أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = \ln(x+a) + b$ حيث a ، b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب- استنتج أنه يمكن رسم (C_f) إنطلاقاً من $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم أرسم $(\mathcal{C})$ و (C_f) .

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ : $g(x) = f(x) - x$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- أحسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ حلا وحيدا α . تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب- أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ في المعلم السابق.

(4) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]\alpha; 1[$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]\alpha; 1[$.

(III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

(1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$.

(2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التقرير 3 (باك 2011) تمر 1 (7 ن)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل)،
بقراءة بيانية:

أ- شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب- حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$.

ج- عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]\alpha; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

ب- أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ- باستعمال الجزء (I) السؤال ج، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]\alpha; +\infty[$.

ب- α عدد حقيقي. بين أن الدالة $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha; +\infty[$.

ج- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ، ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على

المجال $]\alpha; +\infty[$.

التقرير 4 (باك 2012) تمر 2 (7 ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

- بـ أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- (4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$ و $-1.1 < \beta < -1$.
- (5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- (6) أـ نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.
 بين أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .
 بـ بين أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها .
- (7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.
 بين أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

التفريغ 5 (باك 2013) (مر 2) (ن 7)

- (I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.
- (1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) إستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.
- (II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)
- (1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسر النتيجة بيانيا .
 بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) أـ بين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.
 بـ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- جـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.
- (3) أـ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
 بـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- (4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .
 أـ أحسب x_0 .
 بـ أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .
 جـ عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين .

التفريغ 6 (باك 2014) (مر 1) (ن 6)

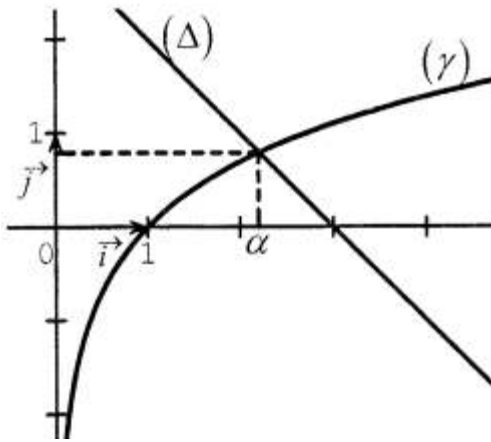
- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسيا .
 بـ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

- (2) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 1$.
 بـ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.
 جـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$.
 (3) أنشئ (T) و (C_f) .

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي : $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$.

- وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.
 أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج ؟
 بـ أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) .
 جـ ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

التمرين 7 ﴿7﴾ باك 2015 ﴿م 1﴾ ﴿7﴾



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 3$

α هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (γ) .

(1) براءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0; +\infty[$.

(2) g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x - 3 + \ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(3) تحقق أن : $2, 2 < \alpha < 2, 3$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ و (C_f) تمثيلها البياني .

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن : $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

(III) الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق : $F(1) = -3$.

(1) بين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما .

(2) بين أن $x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

التمرين 8 ﴿8﴾ باك 2016 - الدورة الأولى - ﴿م 1﴾ ﴿6,5﴾

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) أحسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ،

بـ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

(4) بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y = x - 1$ معادلة له.

بـ أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

(5) أرسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C) .

(6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له.

أـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

بـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$.

(7) أـ جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

بـ أحسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي ($n > 1$).

جـ عين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن : $I_n > 2$.

التمرين (9) باك 2016 - الدورة الثانية - تمر 1 7

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1; +\infty[$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ بين أن $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ و أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسيا.

بـ بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$ ،

جـ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

دـ أرسم المنحنى (C_f) . (نقبل أن : $f(\alpha) = 3,16$)

(2) أـ بين أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1; +\infty[$.

بـ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$.

(3) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1; 1[$ بـ : $k(x) = f(-|x|)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق.

أـ بين أن الدالة k زوجية .

بـ بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه . (دون دراسة تغيرات الدالة k)

جـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $k(x) = m$.

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) بين أن الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانياً.

(2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب.

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

(5) أ- بين المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

(6) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

(7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(2 - 3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

(I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) أحسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانياً.

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$ ، ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) حل في المجال $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها ، ثم أنشئ (C_f).

(II) لتكن الدالة g المعرفة على $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$

(1) أ- أدرس اتجاه تغير الدالة g .

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,2 < \alpha < 1,3$.

ج- استنتج إشارة $g(x)$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماماً من : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

أثبت أن : من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ، $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

(I) الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$:

(C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل المقابل :

- أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

(II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$:

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: بين أن :

ثم فسر النتيجة بيانيا .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$ ،

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن $y = \left(\frac{e^2}{e-1} \right)x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة

تقاطعها مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

(4) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلين متميزين .

(III) n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوى المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = n$ و $x = 1$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n \ln n)$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (I_n) .

f الدالة العددية المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$:

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا .

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " في المعلم السابق .

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) .

(4) أرسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

(5) H الدالة المعرفة على المجال $]3; +\infty[$ بـ : $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما .

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

ب- أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين : $x = 4$ و $x = 3$.

(6) g الدالة المعرفة على $]-1; 0[\cup]-1; -\infty[$ بـ : $g(x) = f(-2x)$:

دون حساب عبارة $g(x)$ حدد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها .

(I) $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$: كما يلي : $]-1; +\infty[$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = -\infty$$

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغير الدالة h :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $x+1 > 0$ و $1+2(x+1)^2 > 0$ ومنه $h'(x) > 0$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	-1	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

حساب $h(0)$ وإستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

$$h(0) = 0^2 + 2 \times 0 + \ln(0+1) = 0$$

• إشارة $h(x)$:

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

(II) $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$: بـ : $]-1; +\infty[$ الدالة العددية المعرفة على

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

بـ باستخدام النتيجة : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، نبرهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

$$\text{نضع } t = \ln u \text{ فيكون } u = e^t \text{ ومنه : } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^t}{t} \right)} = 0$$

جـ- إستنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0 \text{ : لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

د- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0$$

التفسير البياني : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

هـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

لندرس إشارة الفرق $f(x) - (x-1)$.

$$f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1} \text{ وبالتالى إشارة } f(x) - (x-1) \text{ من إشارة } -\ln(x+1) \text{ لأن } x+1 > 0 .$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$		+	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0; -1)$	(C_f) تحت (Δ)

$$(2) \text{ أ- تبين أنه من أجل كل } x \text{ من }]-1; +\infty[, f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2} .$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \left[\frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - 1 \times \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = 1 - \left(\frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right) \\ &= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ \text{ومنه : من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]-1; +\infty[: f'(x) &= \frac{h(x)}{(x+1)^2} . \end{aligned}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

(3) تبين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

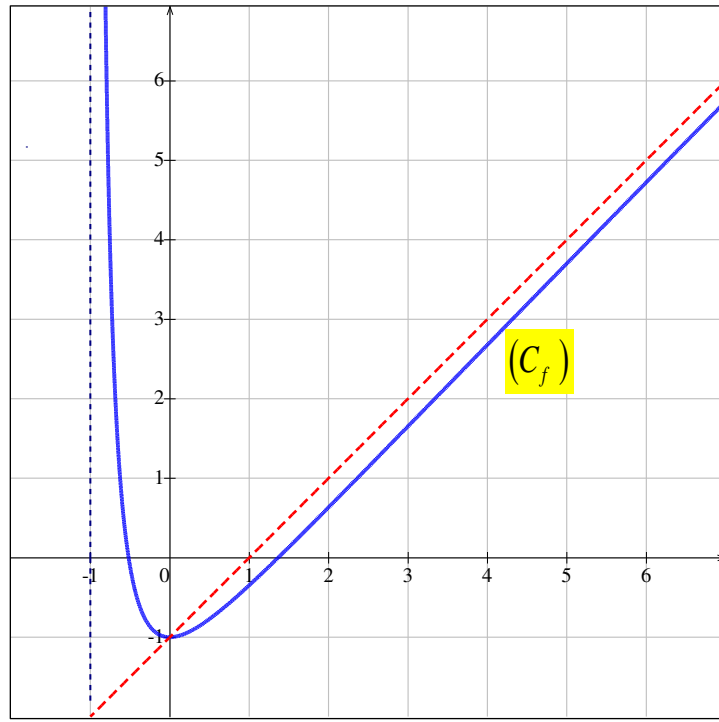
معناه لنثبت أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا محصورا بين 3,3 و 3,4 .

الدالة f مستمرة على المجال $]-1; +\infty[$ وبالتالى فهي مستمرة على $[3,3; 3,4]$ كون $]-1; +\infty[\supset [3,3; 3,4]$.

$$\text{ولدينا } \begin{cases} f(3,3) \approx 1,96 \\ f(3,4) \approx 2,06 \end{cases} \text{ وبالتالى } f(3,3) < 2 < f(3,4) , \text{ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة } f(x) = 2 \text{ تقبل}$$

حلا في المجال $[3,3; 3,4]$.

(4) الرسم :



(5) حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ و $x = 0$ و $x = 1$.

$$S = \int_0^1 [(x - 1) - f(x)] dx = \int_0^1 \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x + 1))^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

حل مقترح للتمرين 2 «باك 2010»

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$.

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (1 + \ln(2x - 1)) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(2x - 1)) = +\infty$$

(2) تبين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

$$f'(x) = \frac{2}{2x - 1}, \quad \text{و من أجل كل } x \text{ من } I, \quad \text{الدالة } f \text{ قابلة للإشتقاق على } I,$$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x - 1 > 0$ أي $f'(x) > 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

جدول تغيرات الدالة f :

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة $f'(x) = 1$ في I .

$$f'(x) = 1 \text{ تكافئ } \frac{2}{2x - 1} = 1 \text{ تكافئ } 2 = 2x - 1 \text{ أي } x = \frac{3}{2}.$$

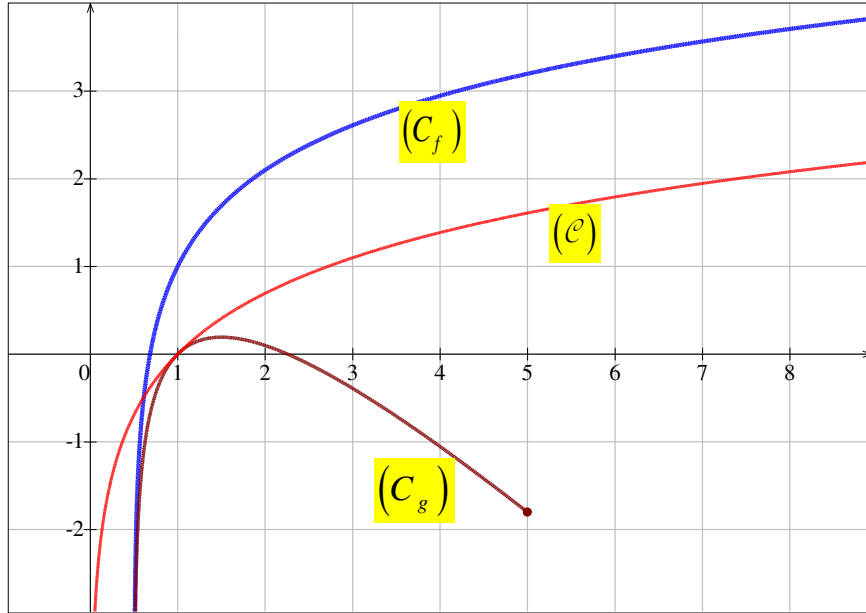
(4) أ- من أجل كل x من I : $f(x) = 1 + \ln(2x - 1) = 1 + \ln\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = 1 + \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$: ومنه : $a = -\frac{1}{2}$

و $b = 1 + \ln 2$

ب- لدينا : $f(x) = h(x + a) + b$ حيث : $h(x) = \ln x$ ومنه (C_f) هو صورة $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} -a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ أي $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 + \ln 2 \end{smallmatrix}\right)$

الرسم :



(II) g الدالة العددية المعرفة على المجال I بـ : $g(x) = f(x) - x$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (1 - x + \ln(2x - 1)) = -\infty$$

$$\left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 : \text{تذكر أن} \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) \left[\frac{1 - x}{2x - 1} + \frac{\ln(2x - 1)}{2x - 1} \right] = -\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g على I :

$$g'(x) = -1 + \frac{2}{2x - 1} = \frac{-2x + 3}{2x - 1} \text{ ، و } g \text{ قابلة للإشتقاق على } I$$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x - 1 > 0$ ، وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x + 3$.

إشارة $g'(x)$:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -

الدالة g متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ ومتناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$		$-\frac{1}{2} + \ln 2$	$-\infty$

(3) أ- لدينا : $g(1) = 0$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ و $g\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0,19$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ حلا وحيدا α .

التحقق أن $2 < \alpha < 3$:

لدينا : $\begin{cases} g(2) \approx 0,09 \\ g(3) \approx -0,39 \end{cases}$ أي : $g(2) \times g(3) < 0$ ومنه $2 < \alpha < 3$.

ب- رسم المنحنى (C_g) : أنظر الشكل السابق .

(4) إشارة $g(x)$:

x	$\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	-

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لدينا : $g(x) = f(x) - x$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$.

إذن : من أجل $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup]\alpha; +\infty[$ ، يكون (C_f) واقعا أسفل (d) .

من أجل $x \in]1; \alpha[$ ، يكون (C_f) واقعا أعلى من (d) .

(C_f) يقطع (d) في النقطتين $A(1;1)$ و $B(\alpha; \alpha)$.

(5) الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$ ومنه : من أجل كل $x \in]1; \alpha[$ فإن : $f(x) \in]f(1); f(\alpha)[$.

ولدينا : $f(1) = 1$ و $f(\alpha) = g(\alpha) + \alpha = \alpha$.

إذن : من أجل كل $x \in]1; \alpha[$ فإن : $f(x) \in]1; \alpha[$.

(III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

(1) تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$.

لدينا : $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \ln\left[2\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 1\right] = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

ومنه : $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$ يعني $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln 3^2 - \ln 2^3 = \ln 9 - \ln 8 = \ln \frac{9}{8}$ أي : $n = 8$.

(2) حساب ، بدلالة n ، المجموع S_n بحيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

ومنه : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + \ln\left(\frac{2}{1}\right) + 1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

أي : $S_n = (1 + 1 + \dots + 1) + \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = n + \ln\left(\frac{2 \times 3 \times \dots \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times \dots \times n}\right) = n + \ln(n+1)$.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

أ- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	1	$+\infty$	1

ب- حل المتراجحة $g(x) > 0$ بيانيا :

$g(x) > 0$ تكافئ $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

ج- تعيين قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$:

$0 < g(x) < 1$ تكافئ $x \in]1; +\infty[$.

(II) الدالة f معرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = 1$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

(2) أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ يكون : $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1 \times (x+1) - 1 \times (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{x-1}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{(x+1)^2} \left(\frac{2x}{x-1} \right) = \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	1

جدول تغيرات الدالة f :

(3) أ- باستعمال الجزء (I) السؤال ج ، تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.

لدينا حسب الجزء (I) السؤال ج : من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ ، فإن $0 < \frac{x-1}{x+1} < 1$ ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$.

ب- α عدد حقيقي .

تبيان أن الدالة h بحيث $h(x) = (x - \alpha)\ln(x - \alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln(x - \alpha)$ على المجال $]\alpha; +\infty[$.
الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]\alpha; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]\alpha; +\infty[$:

$$h'(x) = 1 \times \ln(x - \alpha) + \frac{1}{x - \alpha} \times (x - \alpha) - 1 = \ln(x - \alpha)$$

ج- التحقق :

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}, \quad x \in]1; +\infty[$$

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1), \quad x \in]1; +\infty[$$

وبالتالي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$ من الشكل :

$$F(x) = x - 2\ln(x+1) + [(x-1)\ln(x-1) - x] - [(x+1)\ln(x+1) - x] = x - (x+3)\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1)$$

مل مقترحي للتمرين 4 ﴿باك 2012﴾

$$f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad \text{ب : }]-\infty; 0[\text{ على المجال المعرفة}$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x+5) = 5 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty \quad \text{لأن :}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

$$\text{ب-} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = -\infty \quad \text{لأن :}$$

$$(2) \quad \text{تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]-\infty; 0[, \quad f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty; 0[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$:

$$f'(x) = 1 + 6 \left(\frac{-1}{\frac{(x-1)^2}{x}} \right) = 1 - \frac{6}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{6}{x(x-1)} = \frac{x(x-1) - 6}{x(x-1)} = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ ، $\frac{x}{x-1} > 0$ ، ومنه $x(x-1) > 0$.
 من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ ، $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ ، ومنه :

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty; -2]$ ومتناقصة على المجال $]-2; 0[$.

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$3 + 6\ln \frac{2}{3}$	$-\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

(3) أ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[6\ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \right] = 0$. ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته له : $y = x + 5$ هو مستقيم

مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - y = f(x) - (x+5) = 6\ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ ، $x > x-1$ ، ومنه $\frac{x}{x-1} < 1$ وبالتالي $\ln \left(\frac{x}{x-1} \right) < 0$.

إذن نستنتج أن (C_f) يقع تحت (Δ) .

(4) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$ و $-1.1 < \beta < -1$.

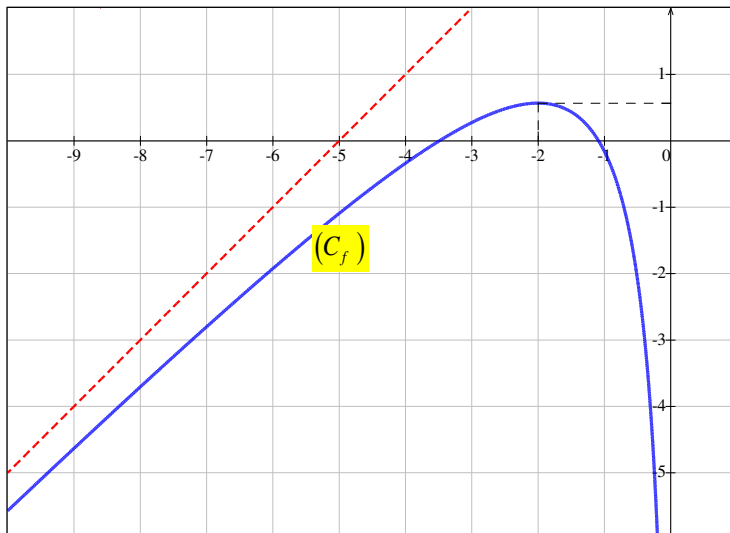
• الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; -2[$ و $]-2; -3.4[$ و $]-3.5; -3.4[$ و $f(-3.4) \approx 0,05$
 $f(-3.5) \approx -0,01$

أي $f(-3.4) \times f(-3.5) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$ ويحقق $f(\alpha) = 0$.

• الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-2; 0[$ و $]-2; 0[$ و $]-1,1; -1[$ و $f(-1.1) \approx 0,02$
 $f(-1) \approx -0,16$

أي $f(-1,1) \times f(-1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي β حيث $-1.1 < \beta < -1$ ويحقق $f(\beta) = 0$.

(5) الرسم :



(6) أ- لدينا : $A \left(-1; 3 + 6 \ln \left(\frac{3}{4} \right) \right)$ و $B \left(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln \left(\frac{3}{4} \right) \right)$.

تبيان أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين A و B تحقق المعادلة المعطاة.

$$y_B = \frac{1}{2}x_B + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4} = \frac{5}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}, \quad y_A = \frac{1}{2}x_A + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4} = 3 + 6 \ln \frac{3}{4}$$

(أو يمكن كتابة معادلة للمستقيم (AB) والحصول على المعادلة المعطاة)

ب- تبيان أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

لدينا : معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ وبالتالي نحل في المجال $]-\infty; 0]$ المعادلة $f'(x) = \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)} = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } x^2 - x - 12 = 0.$$

$$\text{المعادلة } f'(x) = \frac{1}{2} \text{ تقبل في المجال }]-\infty; 0] \text{ حل وهو } x_0 = -3.$$

إذن : المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0; y_0)$ مع $y_0 = f(-3) = 2 + 6 \ln \frac{3}{4}$.

(7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0]$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) + 6 \ln(1-x)$

تبيان أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty; 0]$ ومن أجل كل $x \in]-\infty; 0]$:

$$g'(x) = x + 5 + 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) - \frac{6x}{x(x-1)} - \frac{6}{1-x} = x + 5 + 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) - \frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-1} = f(x)$$

ومنه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

مل مقترح للتدريب (5) باك 2013

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب : $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2 \ln(x+1)$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x+1) = -\infty \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [x^2 + 2x + 4 - 2 \ln(x+1)] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} \right) = +\infty \end{cases} \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} - 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

$$\text{الدالة } g \text{ قابلة للإشتقاق على المجال }]-1; +\infty[\text{ ، و } g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ، لأنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ فإن $x+1 > 0$ و $x+2 > 0$.

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	0 +

الدالة g متناقصة على المجال $]-1; 0]$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة g :

(2) من جدول التغيرات : من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) \geq 4$ ، وبالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x+1} \right) [x(x+1) - 1 + 2\ln(x+1)] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\text{بـ} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

(2) أـ تبين أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ،

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ ، ومن أجل كل $x \in]-1; +\infty[$:

$$f(x) = 1 - \frac{-2}{x+1} (x+1) - 1 \times (1 - 2\ln(x+1)) = 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

بـ دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$:

لدينا : من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ ، وبالتالي $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

جـ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$:

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-1; +\infty[$ حلا وحيدا α .
التحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

لدينا : $]-1; +\infty[\subset]0; 0,5[$ و $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(0,5) \approx 0,37 \end{cases}$ أي $f(0) \times f(0,5) < 0$ ومنه $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أـ لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$ ،

للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

لدينا : $f(x) - x = \frac{-1 + 2\ln(x+1)}{x+1}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-1 + 2\ln(x+1)$.

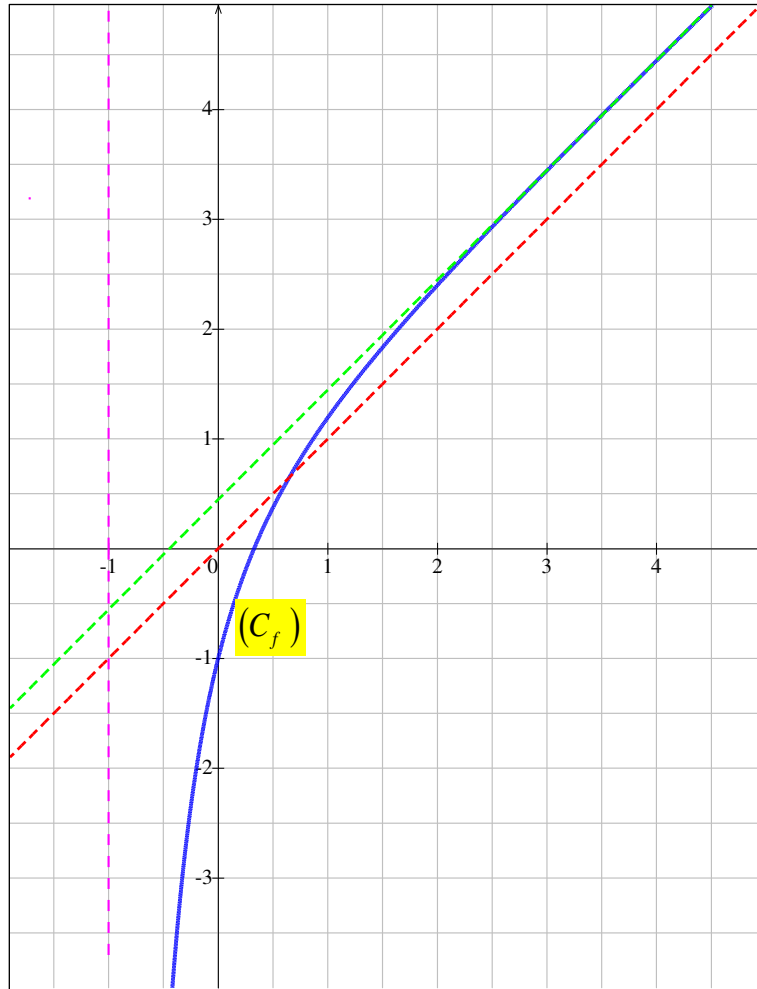
x	-1	$-1 + \sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-1 + \sqrt{e}; -1 + \sqrt{e})$	(C_f) فوق (Δ)

(4) المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ- حساب x_0 :
لدينا :

$$f'(x_0) = 1 \text{ تكافئ } \frac{g(x_0)}{(x_0 + 1)^2} = 1 \text{ تكافئ } g(x_0) = (x_0 + 1)^2 \text{ تكافئ } 2\ln(x_0 + 1) = 3 \text{ تكافئ } x_0 = -1 + \sqrt{e^3}$$

ب- الرسم :



ج- بياناً ، حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$.

إذن : تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين إذا وفقط إذا كان $0 < m < \frac{2}{\sqrt{e^3}}$.

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2 \ln x}{x} \right) = -\infty$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2 \ln x}{x} \right) = 1$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بدراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ، ومن أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 1 \times 2 \ln x}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1 - \ln x$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

الدالة f متزايدة على المجال $]0; e[$ ومتناقصة على المجال $]e; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$1 + 2e^{-1}$	$+\infty$

(2) أدراسة وضعيّة المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

لدينا: $f(x) - y = 1 + \frac{2 \ln x}{x} - 1 = \frac{2 \ln x}{x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $\frac{2}{x} > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; 1)$	(C_f) فوق (Δ)

بكتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا: $(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه $(T): y = 2x - 1$.

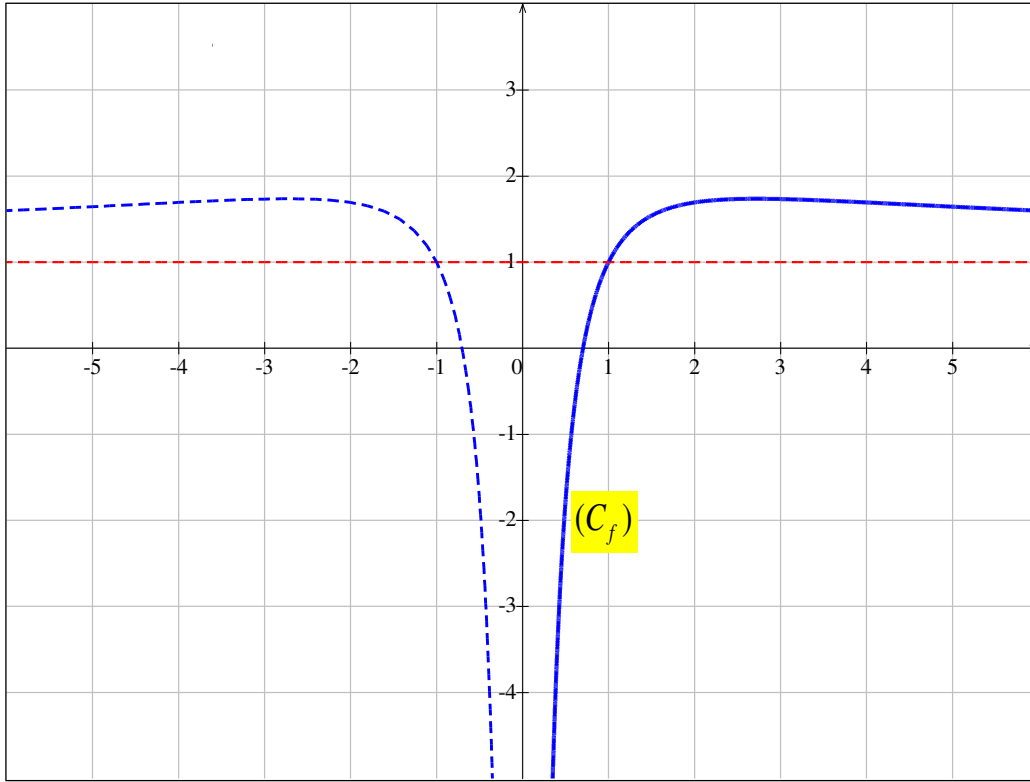
جـ- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ و $]e^{-0.4}; e^{-0.3}[\subset]0; 1[$ و $f(e^{-0.4}) \approx -0,2$ و $f(e^{-0.3}) \approx 0,2$

أي $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا

وحيدا α بحيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

(3) الرسم :



(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$.

أ- من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$h(x) - h(-x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} - 1 - \frac{2\ln|-x|}{|-x|} = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} - 1 - \frac{2\ln|x|}{|x|} = 0$$

نستنتج أن الدالة h زوجية وتمثيلها البياني (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب.

ب- كيفية إنشاء المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) :

من أجل $x \in]0; +\infty[$ ، يكون $f(x) = h(x)$ وبالتالي (C_h) منطبق على (C_f) .

من أجل $x \in]-\infty; 0[$ ، نظير (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الترتيب لكون الدالة h زوجية.

الرسم : أنظر الشكل.

ج- المناقشة البيانية :

$$h(x) = m \text{ أي } 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} = m \text{ تكافئ } 2\ln|x| = (m-1)|x| \text{ تكافئ } \ln x^2 = (m-1)|x|$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_h) والمستقيم ذي المعادلة $y = m$.

١. $m \in]-\infty; 0]$ المعادلة تقبل حلين .

٢. $m \in \left]0; 1 + \frac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربعة حلول .

٣. $m = 1 + \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين (مضاعفين).

٤. $m \in \left]1 + \frac{2}{e}; +\infty\right[$ المعادلة ليس لها حلول .

(I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .
(1) بقراءة بيانية :

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]0; +\infty[$:

من أجل $x \in]0; \alpha[$ ، (γ) يقع تحت (Δ) .

من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(2) إشارة $g(x)$:

(3) التحقق أن : $2, 2 < \alpha < 2, 3$.

لدينا : $\begin{cases} g(2, 2) \approx -0,011 \\ g(2, 3) \approx 0,13 \end{cases}$ ومنه $g(2, 2) \times g(2, 3) < 0$ أي $2, 2 < \alpha < 2, 3$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$.

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 2) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن ، } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\right] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن ، } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\right] = +\infty$$

(2) تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{-3 + x + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) تبين أن : $f(\alpha) = \frac{-(\alpha - 1)^2}{\alpha}$

لدينا : $g(\alpha) = 0$ أي $\ln \alpha = -\alpha + 3$ وبالتالي : $f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln \alpha - 2) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)(-\alpha + 1) = \frac{-(\alpha - 1)^2}{\alpha}$

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

$$\frac{(1,2)^2}{2,3} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \frac{(1,3)^2}{2,2} \text{ ومنه } \begin{cases} \frac{1}{2,3} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2,2} \\ 1,2 < \alpha - 1 < 1,3 \\ (1,2)^2 < (\alpha-1)^2 < (1,3)^2 \end{cases} \text{ لدينا : } 2,2 < \alpha < 2,3 \text{ يكافئ :}$$

$$\text{ومنه : } -\frac{(1,2)^2}{2,3} < f(\alpha) < -\frac{(1,3)^2}{2,2} \text{ أي : } -0,76 < f(\alpha) < -0,62$$

(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

لندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

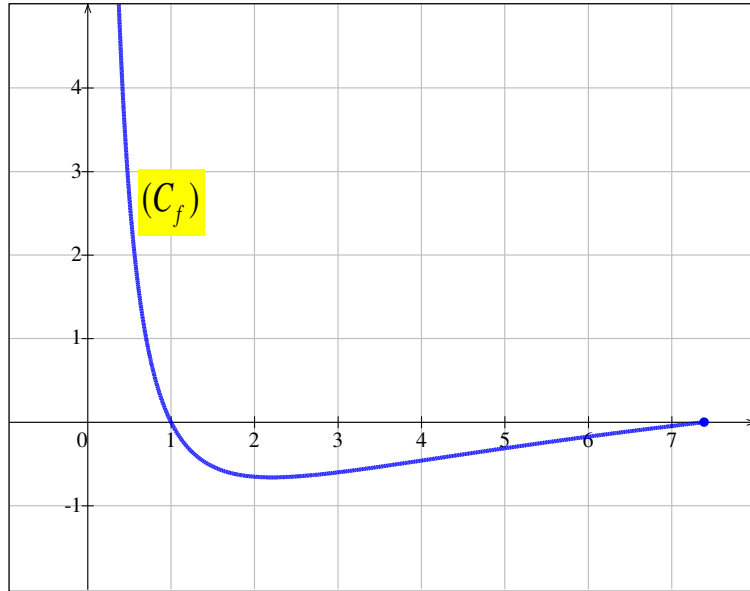
$$\text{لدينا : } f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = \frac{1}{x}(x-1)(-2 + \ln x) \text{ ومنه إشارة } f(x) \text{ من إشارة } (x-1)(-2 + \ln x)$$

x	0	1	e^2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

ومن (C_f) فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين $]e^2; +\infty[$ و $]0; 1[$ وتحت على المجال $]1; e^2[$ ، ويتقاطعان في

النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

الرسم :



(III) الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق : $F(1) = -3$.

(1) تبين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ يعني : من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = 0$ تكافئ $f(x) = 0$ ، ومنه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور

الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

(2) تبين أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$:

نضع : $u(x) = x \ln x - x$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $u'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x$ ،

ومنه الدالة u هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة F :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \left(\ln t - 2 - \frac{\ln t}{t} + \frac{2}{t} \right) dt = \left[t \ln t - t - 2t - \frac{1}{2} (\ln t)^2 - 2 \ln t \right]_1^x = (2+x) \ln x - \frac{1}{2} (\ln x)^2 - 3x$$

حل مقترح للتمرين 8 ﴿باك 2016 - الدورة الأولى﴾

(I) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$ ،

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2 - 1$:

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

الدالة g متناقصة على المجال $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ومتزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$.

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad (2)$$

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0; +\infty[$ هي $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ وبالتالي من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$.

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + x - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + x - 1 \right) = +\infty$$

(2) أـ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ،

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ ،

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$ ، إذن من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة f متزايدة

تماما على المجال $]0; +\infty[$.

بـ جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 :

لدينا : $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ و منه $(T) : y = 2x - 2$.

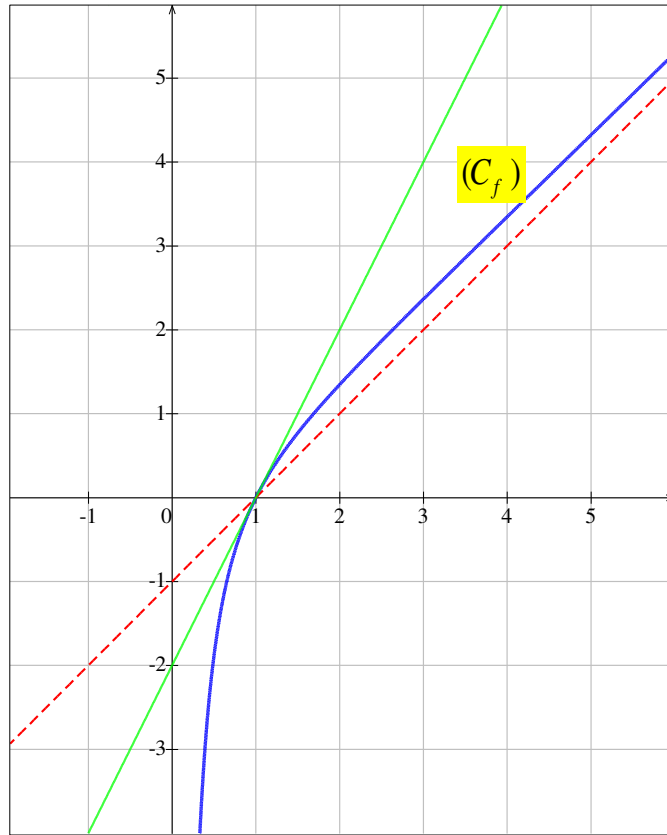
(4) أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ومنه المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y = x - 1$ معادلة له .

ب- دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) :

لدينا $f(x) - y = \frac{\ln x}{x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$:

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$	(C_f) فوق (Δ)

(5) الرسم :



(6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له .

أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

لدينا $y_A = mx_A - m$ أي $0 = m - m$ وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي m ، $A \in (\Delta_m)$ ،

ب- المناقشة البيانية :

لدينا : (Δ_m) معامل توجيهه m ويشمل النقطة $A(1;0)$.

إذا كان $m \in]-\infty; 1]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

إذا كان $m \in]1; 2]$ فإن المعادلة تقبل حلين .

إذا كان $m = 2$ فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) وهو 1.

إذا كان $m \in]2; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

(7) أ- إيجاد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على $]0; +\infty[$ من الشكل: $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ من الشكل $u' \times u$)

ب- حساب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي ($n > 1$).

$$I_n = \int_1^n [f(x) - (x - 1)] dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

ج- تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن $I_n > 2$.

$I_n > 2$ معناه $(\ln n)^2 > 4$ أي $\ln n > 2$ أو $\ln n < -2$ (مرفوض) ومنه $n > e^2$ وعليه: أصغر قيمة لـ n_0 هي $n_0 = 8$.

كل مترجح للتمرين 9 ﴿﴾ باك 2016 - الدورة الثانية - ﴿﴾

(I) الدالة المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x + 1)e + 2\ln(x + 1)$.
1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-1 + (x + 1)e + 2\ln(x + 1)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [-1 + (x + 1)e + 2\ln(x + 1)] = -\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $] -1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $] -1; +\infty[$: $g'(x) = e + \frac{2}{x + 1}$.
من أجل كل $x \in] -1; +\infty[$ ، $g'(x) > 0$ ، وبالتالي الدالة g متزايدة تماماً على المجال $] -1; +\infty[$.

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة g :

(2) تبين أنه للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماماً على $] -1; +\infty[$ و $\begin{cases} g(-0,34) \approx -0,03 \\ g(-0,33) \approx 0,02 \end{cases}$ أي $g(-0,34) \times g(-0,33) < 0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,34 < \alpha < -0,33$.

(3) إشارة $g(x)$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

(II) الدالة المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{e}{x + 1} + \frac{\ln(x + 1)}{(x + 1)^2}$.

(1) أتبين أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{e}{x + 1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x + 1)}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{(x + 1)^2} \times \ln(x + 1) \right] = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{e}{x + 1} + \frac{\ln(x + 1)}{(x + 1)^2} \right] = -\infty$$

التفسير البياني: المسقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right) \left[e + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

التفسير البياني : المسقيم ذو المعادلة $y = 0$ (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}, \quad]-1; +\infty[\text{ من المجال } x \text{ أجل كل}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{e}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1)^2 - 2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-e(x+1) + 1 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

جـ-دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$:

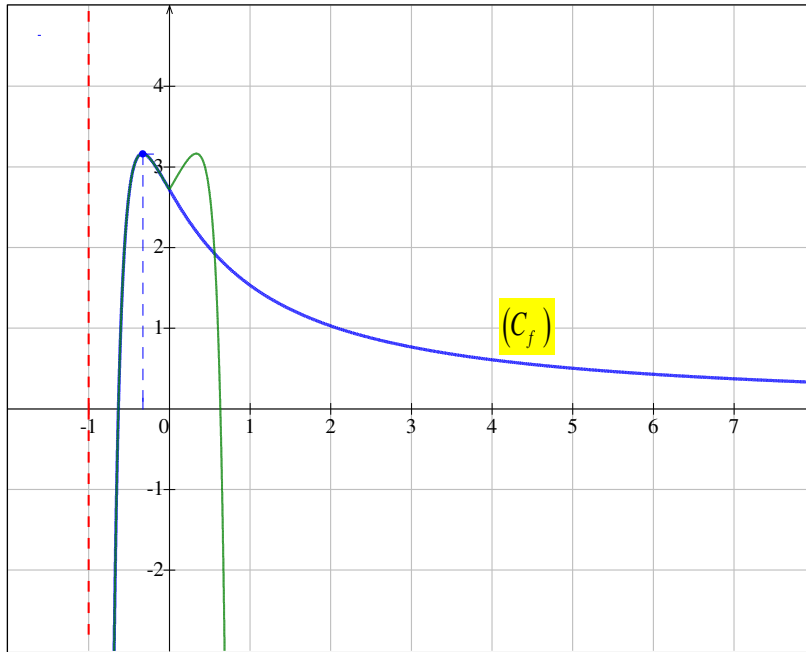
x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $-$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha; +\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1; \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $-$	
$f(x)$		$f(\alpha)$	0

د-الرسم :



(2) أ- تبيان أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1; +\infty[$

نضع : $h(x) = \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ ، الدالة h قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ و من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$:

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} [1 + \ln(x+1)] + \left(\frac{1}{x+1} \right) \times \left(\frac{-1}{x+1} \right) = \frac{1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = 0$

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] dx = \left[e \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} [1 + \ln(x+1)] \right]_0^1 = \frac{1 + (2e-1)\ln 2}{2}$$

$$(3) \quad k(x) = f(-|x|) : \text{بـ }]-1; 1[$$

أ- تبين أن الدالة k زوجية :

$$\text{المجال }]-1; 1[\text{ متناظر بالنسبة للصفر ومن أجل كل } x \in]-1; 1[: k(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = k(x)$$

وبالتالي الدالة k زوجية .

بـ شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) انطلاقاً من المنحنى (C_f) :

$$k(x) = f(-|x|) = \begin{cases} f(x); x \in]-1; 0] \\ f(-x); x \in [0; 1[\end{cases}$$

إذن : من أجل $x \in]-1; 0]$ ، ينطبق على (C_k) ينطبق على (C_f) ونتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لمحور الترتيب لكون k زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

جـ المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $k(x) = m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_k) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$.

إذا كان $m > f(\alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل حلولاً .

إذا كان $m = f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة .

إذا كان $e < m < f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان وحلان موجبان .

إذا كان $m = e$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب وآخر موجب والثالث معدوم .

إذا كان $m < e$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

مل مقترح للتدريب 10 - الدورة العادية - باك 2017

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) : \text{بـ } D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

(1) تبين أن الدالة f فردية :

المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر (من أجل كل $x \in D$ ، $-x \in D$)

$$f(-x) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{3}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x) , x \in D$$

التفسير البياني : مبدأ المعلم O مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب معادلتيهما : $x = -1$ و $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 : \text{لأن } , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

$$(3) \quad \text{تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } D , \quad f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D ، من أجل كل عدد حقيقي x من D :

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)} = \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)} = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$$

إتجاه تغيّر الدالة f :

لدينا : من أجل كل x من D ، $x^2 - 1 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على D .

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow +\infty$

(4) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و $]1,8; 1,9[\subset]1; +\infty[$ و $f(1,9) \approx 0,10$
 $f(1,8) \approx -0,05$

أي $f(1,8) \times f(1,9) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1; +\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.

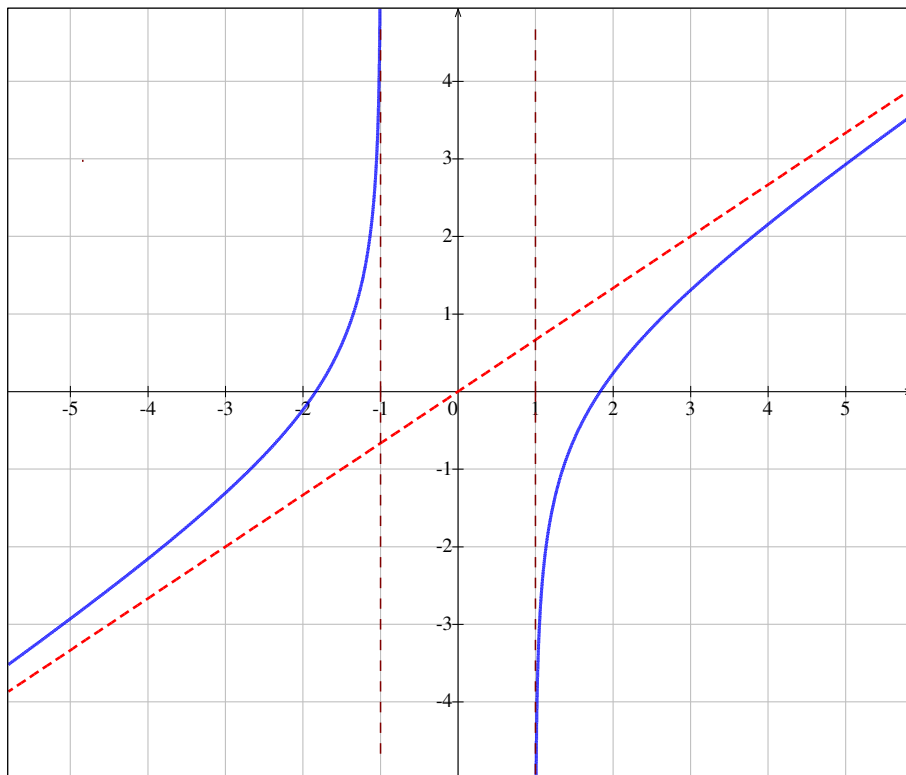
(5) لدينا : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 1$ ، لأن : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{2}{3}x \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = \frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

دراسة وضعيّة المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - \frac{2}{3}x = f(x) - y = f(x) - \frac{2}{3}x$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+			-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)			(C_f) تحت (Δ)



(6) الرسم :

(7) المناقشة البيانية :

$$\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = |m|x \text{ تكافئ } 2x - 3|m|x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \text{ تكافئ } (2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

أي $f(x) = |m|x$ ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = |m|x$ (مناقشة دورانية)

إذا كان $|m| \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$ أي $m \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$ فإن المعادلة تقبل حلين متميزين .

إذا كان $|m| \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$ أي $m \in \left[-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

2. مقترح للتدريب 11 - الدورة الإستثنائية -

$$(I) \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال } \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ كما يلي : } f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \left[\left(\frac{1}{(2x+1)^2} \right) [1+2\ln(2x+1)] \right] = -\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(2x+1)^2} + 2 \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} \right] = 0$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{4}{2x+1} \times (2x+1)^2 - 4(2x+1)[1+2\ln(2x+1)]}{(2x+1)^4} = \frac{(2x+1)[-8\ln(2x+1)]}{(2x+1)^4} = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-8\ln(2x+1)$ لأن $(2x+1)^3 > 0$ من أجل x من $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$:

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2}; 0\right]$ ومتناقصة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		1	0

(3) حل في المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ المعادلة $f(x) = 0$:

$f(x) = 0$ تكافئ $1 + 2\ln(2x + 1) = 0$ تكافئ $\ln(2x + 1) = -\frac{1}{2}$ تكافئ $2x + 1 = e^{-\frac{1}{2}}$ أي $x = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{2}$ إشارة $f(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right)$	$+\infty$
$f(x)$		- 0 +	

(4) تبين المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها:

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$:

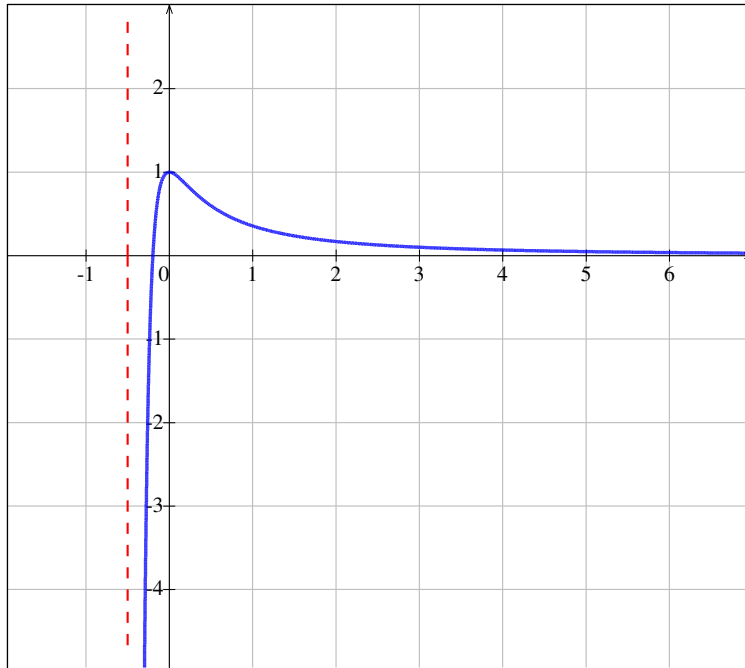
$$f''(x) = \frac{\frac{-8 \times 2}{2x+1} \times (2x+1)^3 - 3 \times 2(2x+1)^2 \times [-8\ln(2x+1)]}{(2x+1)^6} = \frac{16(-1+3\ln(2x+1))}{(2x+1)^4}$$

$f''(x) = 0$ تكافئ $-1 + 3\ln(2x + 1) = 0$ تكافئ $\ln(2x + 1) = \frac{1}{3}$ تكافئ $2x + 1 = e^{\frac{1}{3}}$ أي $x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right)$ إشارة $f''(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right)$	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω إحداثيها: $\left(\frac{e^{\frac{1}{3}} - 1}{2}; \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

الرسم:



(II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ كما يلي : $g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$.

(1) أ-دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$:

$$g'(x) = 2\left[-1 + \frac{2}{2x+1}\right] = 2\left[\frac{-2x+1}{2x+1}\right]$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+1$:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -

الدالة g متزايدة على المجال $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ومتناقصة على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$.

ب- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $1,2 < \alpha < 1,3$.

لدينا : $g(0) = 0$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right] \subset]1,2; 1,3[$ و $\begin{cases} g(1,2) \approx 0,05 \\ g(1,3) \approx -0,04 \end{cases}$

أي $g(1,2) \times g(1,3) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ حلا

وحيدا α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$.

ج- إشارة $g(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	0 +	0 -

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 : $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

إثبات أن : من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ، $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$.

لدينا : من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ، $f(x) - \frac{1}{2x+1} = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2} - \frac{2x+1}{(2x+1)^2} = \frac{g(x)}{(2x+1)^2}$ ،

ولدينا : من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ، $g(x) < 0$ وبالتالي $f(x) < \frac{1}{2x+1}$.

ومن جهة أخرى لدينا : من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ، $f(x) > 0$.

إذن : من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ، $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$.

استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$:

لدينا : $0 < I_n < \int_n^{n+1} \frac{1}{2x+1} dx$ ومنه $0 < \int_n^{n+1} f(x) dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{2x+1} dx$

ولدينا $0 < I_n < \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ومنه $\int_n^{n+1} \frac{1}{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(2x+1)\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$.

• حساب $g(1)$: $g(1) = 1 - (\ln 1)^2 - \ln 1 - 1 = 0$

• إشارة $g(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		+	0 -

(II) الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 : \text{تذكر أن} \right) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x \ln x) = 1 \end{cases} \text{ : لأن , } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

• تبيان أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$:

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 : \text{تذكر أن} \right) , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} + \ln x} \right) = 0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$(2) \text{ - تبيان أنه من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2} .$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + x \ln x) - (\ln x + 1)(1 + x \ln x)}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (1 + \ln x)^2}{(1 + x \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(1 + x \ln x)^2}$$

$$\text{ومنه : من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2} .$$

ب- اتجاه تغير الدالة f :

إشارة من إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

الدالة f متزايدة على المجال $]0; 1[$ ومتناقصة على المجال $]1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	1	0

(3) تبين أن $y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل :

أولاً : تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

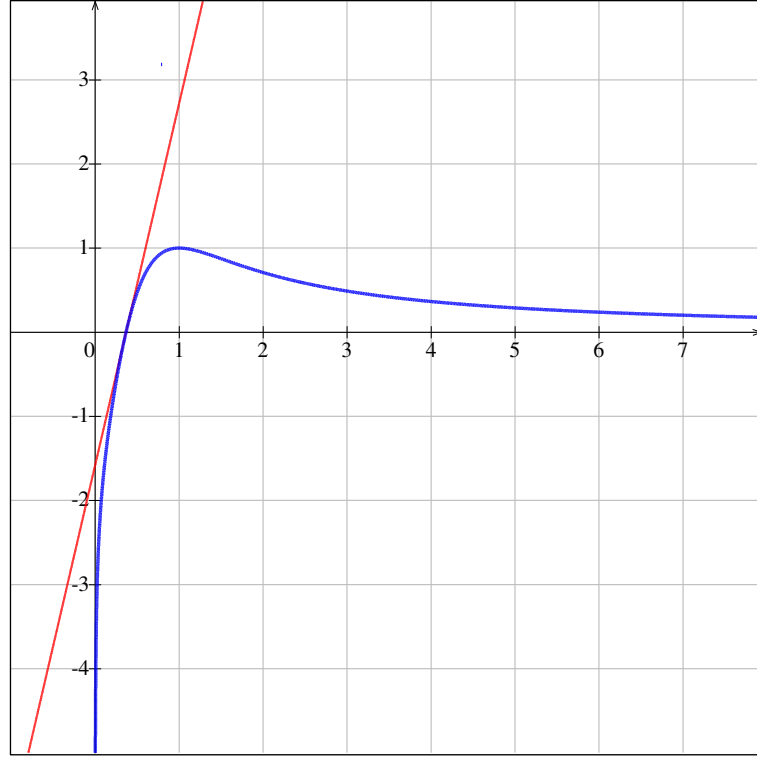
نحل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة : $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} = 0 \text{ تكافئ } 1+\ln x = 0 \text{ تكافئ } \ln x = -1 \text{ أي } x = \frac{1}{e} .$$

معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$:

$$\text{لدينا : } (T): y = f' \left(\frac{1}{e} \right) \left(x - \frac{1}{e} \right) + f \left(\frac{1}{e} \right) \text{ و منه } (T): y = \left(\frac{e^2}{e-1} \right) x - \frac{e}{e-1} .$$

الرسم :



(4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلين متميزين .

$$(e-1)f(x) = e^2x - me \text{ تكافئ } f(x) = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}m$$

حلل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (T_m) ذي

$$\text{المعادلة } y = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}m .$$

من البيان : المعادلة تقبل حلين متميزين لما $-\frac{e}{e-1}m < -\frac{e}{e-1}$ أي $m > 1$.

(III) n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = n$ و $x = 1$.

(1) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n \ln n)$.

$$\text{لدينا : } I_n = \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \left(\frac{1+\ln x}{1+x \ln x} \right) dx = [\ln(1+x \ln x)]_1^n = \ln(1+n \ln n) . \text{ (لاحظ أن } f \text{ من الشكل : } \frac{u'}{u} \text{)}$$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1} - I_n$

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_1^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx - \int_1^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

لدينا : $\int_n^{n+1} f(x) dx > 0$ وبالتالي المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

حل مقترح للتمرين 13 باك 2019

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x \quad : \text{ب} \quad]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

(1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = -\infty$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x \right] = +\infty \quad \text{ب-}$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; 2[\cup]2; +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{-x + x^2 - 4x + 4}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - 5x + 4$ لكون $x(x-2)^2 > 0$ من أجل كل x من $]0; 2[\cup]2; +\infty[$.

• إشارة $f'(x)$:

x	0	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

ومنه : الدالة f متزايدة على المجالين $[4; +\infty[$ و $]0; 1]$ ومتناقصة على المجالين $]1; 2[$ و $]2; 4]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	$\frac{1}{2} + \ln 4$	$+\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-2} \right) = 0 \quad \text{أ- (3)}$$

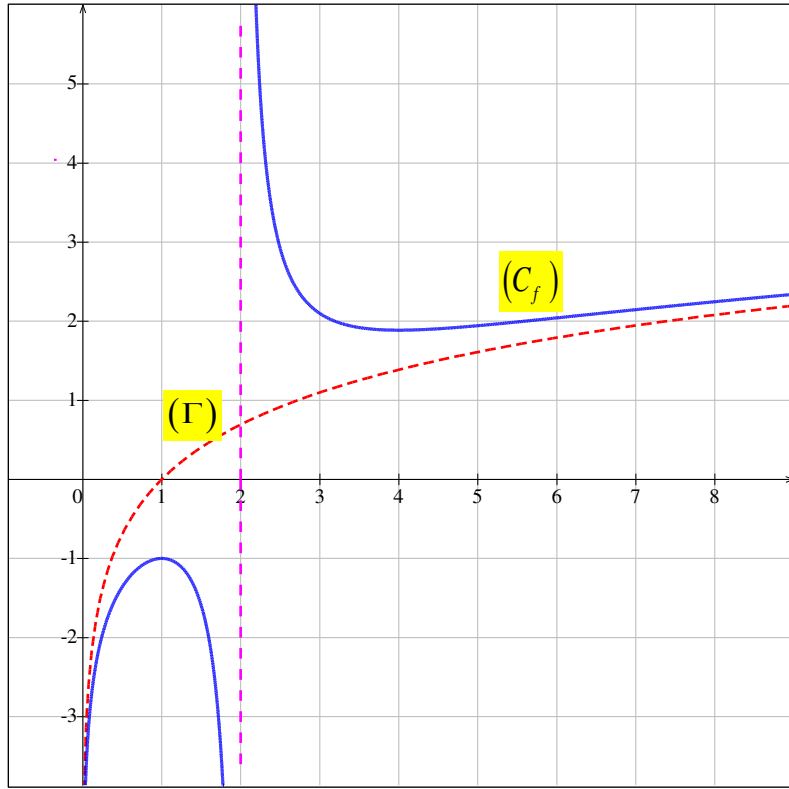
التفسير : المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) :

لدينا : $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-2}$ ومنه إشارة الفرق $f(x) - \ln x$ من إشارة $x - 2$.

على المجال $]0; 2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) .

على المجال $]2; +\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ) .



(5) H الدالة المعرفة على المجال $]3; +\infty[$ بـ : $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

نضع $u(t) = \ln(t)$ ، $v'(t) = 1$ و منه $u'(t) = \frac{1}{t}$ ، $v(t) = t$ ،
بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x) = [t \ln t]_3^x - \int_3^x \frac{1}{t} \times t dt = x \ln x - 3 \ln 3 - \int_3^x dt = x \ln x - 3 \ln 3 - [t]_3^x$$

ومنه $H(x) = x \ln x - 3 \ln 3 - (x - 3)$ أي : $H(x) = -x + 3 + x \ln x - 3 \ln 3$.

ب- حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x = 4$ و $x = 3$.

$$A = \int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} + \ln x \right) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} \right) dx + \int_3^4 \ln x dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} \right) dx + H(4) = [\ln|x-2|]_3^4 + H(4)$$

ومنه $A = (-1 + 9 \ln 2 - 3 \ln 3)(u.a)$ أي : $A = \ln 2 + 4 \ln 4 - 4 - 3 \ln 3 + 3$.

(6) g الدالة المعرفة على $]-1; 0[\cup]-1; -\infty[$ بـ : $g(x) = f(-2x)$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-1; 0[\cup]-1; -\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ، و $g'(x) = -2f'(-2x)$.
إتجاه تغيير الدالة g :

$$g'(x) > 0 \text{ تكافئ } f'(-2x) < 0 \text{ تكافئ : } \begin{cases} 1 < -2x < 2 \\ 2 < -2x < 4 \end{cases} \text{ تكافئ : } \begin{cases} -1 < x < -\frac{1}{2} \\ -2 < x < -1 \end{cases}$$

ومنه الدالة g متزايدة على $]-1; -\frac{1}{2}[\cup]-2; -1[$ و متناقصة على $]-\frac{1}{2}; 0[\cup]-\infty; -2[$.

بالتوفيق للجميع