



التحضير الجيد للبكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

مسائل شاملة

مرفقة بالحلول

العددية x :
الأسية e^x :
اللوغارتمية $\ln x$:
في الدوال

الإصدار الأول

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 01

فهرس المحتويات

①

أسئلة متنوعة شائعة

في دراسة الدوال والإجابات عليها

- السلوك التقاربي \ المقاربات \ الوضعية النسبية
- عناصر تناظر منحنى \ شفعية دالة
- إشارة دالة \ مبرهنة القيم المتوسطة
- العدد المشتق وتفسيره الهندسي
- المماسات
- إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة a, b
- رسم منحنى (C_g) إنطلاقاً من المنحنى (C_f)

②

قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية

النهايات

- بعض نهايات الدوال المرجعية
- نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$
- حالات عدم التعيين
- طرق إزالة حالات عدم التعيين
- نهاية دالة مركبة
- النهايات بالمقارنة
- المستقيمات المقاربة

③

الدوال العددية:

المسائل الشاملة والحلول

انقر على المسألة أو الحل

- حل المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03

- المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03

- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10

4

انقر على المسألة أو الحل

- حل المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 11
- حل المسألة الشاملة رقم 12

5

انقر على المسألة أو الحل

- حل المسألة الشاملة رقم 01

- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10

الدوال الأسية:

المسائل الشاملة والحلول

- المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- المسألة الشاملة رقم 11
- المسألة الشاملة رقم 12

الدوال اللوغارتمية:

المسائل الشاملة والحلول

- المسألة الشاملة رقم 01

- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 11

- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- المسألة الشاملة رقم 11

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶

1

أسئلة متنوعة شائعة في دراسة الدوال والإجابات عليها

① السلوك التقاربي \ المقاربات \ الوضعية النسبية

السؤال	الإجابة
فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الترتيب، معادلته: $x = a$
فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا محور الفواصل معادلته: $y = b$
فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = ax + b$ عند $\pm\infty$
بين أن المستقيم $y = ax + b$ (Δ): مقارب مائل لـ (C_f)	نبرهن: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته	• إذا كان: $f(x) = ax + b + g(x)$ نبرهن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ ومعادلة المستقيم: $y = ax + b$ • إذا لم يكن ذلك (*): نحسب العددين a و b من $\mathbb{R}$ كما يلي: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$
ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = ax + b$ (Δ): نطبق نفس الإجابة على السؤال: ادرس وضعية المنحنيين (C_f) و (C_g) ، بوضع: $d(x) = f(x) - g(x)$	ندرس إشارة الفرق: $d(x) = f(x) - y$ • $d(x) > 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع فوق (Δ) • $d(x) = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقطع (Δ) • $d(x) < 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع تحت (Δ)
فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$	المنحنيين (C_f) و (C_g) متقاربان عند $\pm\infty$

② عناصر تناظر منحنى \ شفعية دالة

D_f هي مجموعة تعريف الدالة f

السؤال	الإجابة
بين أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f)	نبين أن: $\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$
بين أن $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$
بين أن المستقيم $d: x = \alpha$ محور تناظر (C_f)	نبين أن: $\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) = f(x) \end{cases}$
بين أن $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم $d: x = \alpha$
بين أن الدالة f فردية	نبين أن: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
بين أن الدالة f زوجية	نبين أن: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
بين أن: $f(-x) + f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: f فردية، ومبدأ المعلم مركز تناظر (C_f)
بين أن: $f(-x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: f زوجية، و (C_f) متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب (yy')
بين أن: $f(\alpha - x) + f(x) = \beta$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}\right)$
بين أن: $f(\alpha - x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة: $x = \frac{\alpha}{2}$

③ إشارة دالة \ مبرهنة القيم المتوسطة

السؤال	الإجابة
يعطى لك المنحنى (C_f) مرسوماً في معلم م م، • عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل. • استنتج إشارة $f(x)$	• نحل بياناً المعادلة: $f(x) = 0$ • ثم نحدد المجالات التي يكون عليها (C_f) إما فوق محور الفواصل وإما أسفله وأخيراً نحدد إشارة $f(x)$
• أحسب $f(\alpha)$ واستنتج إشارة $f(x)$	نجد $f(\alpha) = 0$ ثم نحدد المجالات حيث: $f(x)$ إما موجبة أو سالبة
• بين أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حل وحيد α حيث: $a < \alpha < b$ أو بصيغة أخرى: بين أن (C_f) يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α	• نبين أن f مستمرة ورتيبة تماماً على $[a; b]$ • ونحسب: $f(a)$ و $f(b)$ ونبين أن k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فينتج وجود α وحيد من $[a; b]$ حيث: $f(\alpha) = k$
• بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $a < \alpha < b$ أو بصيغة أخرى: بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α	• نبين أن f مستمرة ورتيبة تماماً على $[a; b]$ • ونحسب: $f(a)$ و $f(b)$ ونجد: $f(a) \times f(b) < 0$ وينتج وجود α وحيد من $[a; b]$ حيث: $f(\alpha) = 0$

السؤال	الإجابة
فسّر: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l$ أو: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	• f تقبل الاشتقاق عند a و $f'(x) = l$ • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا معامل توجيهه l
فسّر: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = 0$	• f تقبل الاشتقاق عند a و $f'(x) = 0$ • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y = f(a)$
فسّر: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = \pm\infty$	• f لا تقبل الاشتقاق عند a و (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا (أو نصف مماس) يوازي حامل محور الترتيب معادلته $x = a$
فسّر: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l_1$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l_2$ حيث: $l_1 \neq l_2$	• f لا تقبل الاشتقاق عند a. • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ نصف مماسين معاملي توجيههما على الترتيب l_1 و l_2 وتسمى النقطة $A(a; f(a))$ نقطة زاوية.

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب المعادلة $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ثم نحسب $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ و نعوض في المعادلة أعلاه
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الترتيبة y_0	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ثم نكتب معادلة المماس عند x_0
عين بيانيا العدد المشتق $f'(x_0)$ <u>ملاحظة:</u> معامل توجيه المماس $f'(x_0)$	معامل التوجيه $f'(x) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ حيث A و B من المماس
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها يساوي a ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(a; b)$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟ (في معلم متعامد ومتجانس)	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات

⑥ إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة a, b

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت: a, b, c
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_0; y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل. <u>أو:</u> (C_f) يقبل ذروة في النقطة $A(x_0; y_0)$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة: $y = mx + k$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

٧ رسم منحنى (C_g) إنطلاقاً من المنحنى (C_f)

الدوال	شرط الوجود	التحويل
$g(x) = f(x) + b$	$x \in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(b\vec{j})$
$g(x) = f(x + a)$	$x + b \in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(-a\vec{i})$
$g(x) = f(x + a) + b$	$x + b \in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(-a\vec{i} + b\vec{j})$
$g(x) = -f(x)$	$x \in D$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')
$g(x) = f(x) $	$x \in D$	لما $f(x) \geq 0$: (C_g) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \leq 0$: (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')
$g(x) = f(x)$	$ x \in D$	لما $x \geq 0$: (C_g) ينطبق على (C_f) إذا $x \leq 0$: (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب (yy')

2

قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية النهايات

بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$:

• النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = +\infty$$

مثال:

• النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} \right) = 3$$

حالات عدم التعيين:

① $\infty - \infty$

② $0 \times \infty$

③ $\frac{\infty}{\infty}$

④ $\frac{0}{0}$

طرق إزالة حالات عدم التعيين:

(1) التحليل والإختزال:

نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ حيث: $f(x_0) = g(x_0) = 0$

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين f و g وكتابتهم على الشكل: $Q(x)(x - x_0)$ ثم نختزل الكسر ونحسب النهاية من جديد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x^2 + 3x - 7}{x^2 + 2x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x+7}{x+3} \right) = \frac{11}{4} \quad \text{مثال 1:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x-2} \right) = -3 \quad \text{مثال 2:}$$

ملاحظة: توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$:

ط1: المطابقة:

مثال: كتابة العبارة $4x^2 + 3x - 7$ على الشكل: $(x-1)Q(x)$:

بما أن $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يكتب على شكل $ax + b$ ومنه:

$$(x-1)Q(x) = (x-1)(ax+b) = ax^1 + (b-x)x - b$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b - a = 3 \\ -b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = (x-1)(4x+7)$$

ط2: القسمة الإقليدية:

مثال:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 8 & x + 2 \\ \hline -x^3 - 2x^2 & x^2 - 2x + 4 \\ \hline -2x^2 + 8 & \\ +2x^2 + 4x & \\ \hline +4x + 8 & \\ -4x - 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ط3: خوارزمية هورنر:

وهي أسهل الطرق، خاصة لما يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق:

$$\text{مثال: } x_0 = 1, p(x) = 4x^2 + 3x - 7$$

$$\begin{cases} a' = a = 4 \\ b' = aa' + b = 1(4) + 3 = 7 \\ c' = x_0 b' + c = 1(7) - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = (x - 1)(4x + 7)$$

	$a = 4$	$b = 3$	$c = -7$	معاملات $p(x)$
$x_0 = 1$	$\downarrow$			الجذر x_0
	$a' = 4$	$b' = 7$	$c' = 0$	معاملات $Q(x)$

(2) استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية):

مثال 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{x+8} - 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{5-x} - 2)(\sqrt{5-x} + 2)(\sqrt{x+8} + 3)}{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{5-x} + 2)(\sqrt{x+8} + 3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(1-x)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{\sqrt{x+8} + 3}{\sqrt{x+8} + 3} \right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

ملاحظة: لما يؤول x إلى $\pm\infty$ ، إما نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات x داخل الجذر وخارجه (المثال 3)

أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال 4)

مثال 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2})(x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2})}{(x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2})} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x+1)^2 - (x^2 + x - 2)}{x+1 + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1 + |x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}\right)} \right) \quad (x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x| = x) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} \right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

مثال 4:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 - x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \Rightarrow (x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(\underbrace{2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}_{\rightarrow 1} \right) \right) = -\infty
\end{aligned}$$

(2) استعمال العدد المشتق:

لاستعمال هذه الطريقة لا بد أن تكون النهاية من الشكل:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{x-1}; f(2) = 1; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

مثال 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0) = 1$$

$$f(x) = \sin(x); f(0) = 0; f'(x) = \cos(x)$$

نهاية دالة مركبة:

$$f = v \circ u: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow v} v(x) = c \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2 - 2x - 1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 3}} \right); \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 3} \right) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x}}{u(x)} \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

النهايات بالمقارنة:

الحالة ①:

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \cos(x)}{x + 1} \right) \text{ احسب}$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow 2x - 1 \leq 2x + \cos(x) \leq 2x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x - 1}{x + 1} \leq \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} \leq \frac{2x + 1}{x + 1}$$

ملاحظة: المتراجحة لم تتغير لأنه لما $(x \rightarrow +\infty)$ فإن: $(x + 1 > 0)$

أما إذا كان $(x \rightarrow -\infty)$ فإن: $(x + 1 < 0)$ ، منه تتغير المتراجحة عند القسمة على $(x + 1)$

$$\begin{cases} \frac{2x - 1}{x + 1} \leq \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} \leq \frac{2x + 1}{x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 1}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 1}{x + 1} \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} = 2$$

الحالة ②:

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2 - \sin(x)} \right) \text{ احسب}$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\sin(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2 - \sin(x) \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin(x)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin(x)} \leq x$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2 - \sin(x)} \geq \frac{x}{3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{3} \right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2 - \sin(x)} \right) = +\infty$$

الحالة ③:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

مثال:

$$\text{احسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x \cos(x))$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow x \leq x \cos(x) \leq -x$$

$$\Rightarrow -2x^2 + x \leq -2x^2 + \cos(x) \leq -2x^2 - x$$

$$\begin{cases} -2x^2 + \cos(x) - 2x^2 - x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 - x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + \cos(x)) = -\infty$$

ملاحظة:

غالباً ما نستعمل المقارنة لحساب نهايات الدوال المثلثية $(\sin(x); \cos(x))$ لما x يؤول $\pm\infty$.

حيث أن هذه الدوال لا تقبل نهاية عند $\pm\infty$.

ولحصر $f(x)$ دائماً ننتقل من حصر الدالة المثلثية $(\sin(x); \cos(x))$ بين (-1) و $(+1)$.

المستقيـمات المقاربة:

- ① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ المستقيم $x = a$ مستقيم مقارب عمودي
(يوازي محور الترتيب)
- ② $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow$ المستقيم $y = b$ مستقيم مقارب أفقي
(يوازي محور الفواصل)
- ③ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Rightarrow$ المستقيم $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل

③

الدوال العددية

المسائل الشاملة

01

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x - 1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.(1) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.(2) أ- عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + b}{(x - 1)^2}$$

ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) والمستقيم (d) الذي معادلته $y = x - 2$ ؟ برر.ج- حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) ، ولتكن A نقطة تقاطعهما.(3) بين أنه يوجد مماس $(T) \perp (C_f)$ مواز للمستقيم (d) .(4) بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty; 1[$ ، استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α .(5) مثل بيانيا المستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f) .(6) استنتج بيانيا حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث m وسيط حقيقي.(7) أ- نريد إيجاد نتيجة السؤال (5) باستعمال الحساب، بين أن فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y = x + m$ هي حلول المعادلة (E) حيث:

$$(E): (m + 2)x^2 - (2m + 7)x + m + 4 = 0$$

ب- جد حسب قيم m حلول المعادلة (E) .

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]-1.48; 1.47[$

ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(3) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(4) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب- ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(5) بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(6) مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .

03

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل



لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x - 7}{2 - x}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسياً.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن النقطة $A(2; -3)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

(3) بين أنه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازياً للمستقيم ذو المعادلة:

$$y = -x + 4$$

(4) اوجد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.

(5) مثل بيانياً المنحني (C_f) .

04

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل



لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أوجد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.

(4) أ- بين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4 - x) \in D_f$.

ب- بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) .

(5) مثل بيانيا المنحني (C_f) .

05

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.(1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية: a, b, c بحيث كل x من D_f :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

(2) استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) عند $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.- حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .(3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.(4) جد إحداثي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين، وأثبت أنها مركز تناظر للمنحني (C_f) .(5) أنشئ المنحني (C_f) .(6) استنتج رسم المنحني (C_h) الممثل للدالة h المعرفة بـ:

$$h(x) = \frac{(x - 4)^2}{|x - 3|}$$

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.4 < \alpha < -0.3$

ب- حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) بين من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن:

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x - 1}$$

(2) أ- احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

ب- ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) احسب: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$

وماتفسيرك الهندسي للنتيجة.

(4) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) و المنحني (C_p) الممثل للدالة:

$$p(x) = x^2 - 2x - 1$$

(5) بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2$$

واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

(6) أنشئ بيانيا كل من (C_p) و (C_f) .

(I) لتكن الدالة f المعرفة بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 3x + 2}$$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f ، ثم بين أنه من أجل كل x من D_f فإن:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.(2) أ/ ادرس تغيرات الدالة f .ب/ أوجد المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ) :(3) عين تقريب تآلفي للدالة f عند 0.(4) أنشئ بياناً للمنحني (C_f) .(II) نعرف الدالة h كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة h .(2) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.(3) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0.(4) ادرس شفعية الدالة h .(5) استنتج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقاً من (C_f) .(6) ناقشاً بياناً حسب الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة:

$$(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m-1 = 0$$

لتكن F دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، حيث: $F(0) = 0$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

نقبل أن الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

(I) G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$G(x) = F(x) + F(-x)$$

(1) برر أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $G'(x)$ من أجل كل x حقيقي.

(2) احسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة F فردية.

(II) H الدالة المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بـ:

$$H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

(1) برر أن H تقبل الاشتقاق على I وأحسب $H'(x)$ من كل x من I .

(2) برهن أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$

(3) استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2F(1)$ ، ماذا ينتج عن المنحني (C) ؟

(III) T الدالة المعرفة على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ بـ:

$$T(x) = F(\tan x) - x$$

(1) أحسب $T'(x)$ ، ماذا ينتج عن الدالة T ؟

(2) أحسب $F(1)$.

(IV)

(1) انجز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

(2) أرسم المنحني (C) ، ومستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 و 1 .

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب/ أعط حصرا سعته 0.1 للعدد α .

ج/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x - 1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها واعط تفسيراً هندسياً للنتائج.

(2) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ ، مع تحديد الأعداد الحقيقية a, b, c .

(3) أ- بين أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً (d) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

ب- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f).

(4) أ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب- بين أن (C_f) يقطع مرة واحدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β حيث $-1 < \beta < 0$.

ج- بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصراً للعدد $f(\alpha)$.

(5) أحسب $f(0)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين والمنحني (C_f).

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

أ- بين أن h زوجية.

ب- أشرح كيف تنشئ (C_h) ثم أنشئه.

ج- ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين:

$$f(x) = x + m \quad \text{و} \quad f(x) = m$$

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$$

- (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على مجال تعريفها.
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه.
- (3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - x$$

- (1) أ- احسب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
ب- برهن أنه من أجل كل x حقيقي:
- $$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1 + x^2}}$$
- ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - (2) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 3x]$ وفسر النتيجة هندسيا.
 - (3) أ- ليكن (d') المستقيم ذو المعادلة $y = x$ ، بين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.
ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيمين (d) و (d') .
 - (4) انشئ بيانيا كلا من المستقيمين (d) و (d') والمنحني (C_f) .

③

الدوال العددية

حُلُول المسائل الشاملة

01

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
 - حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x]$$

$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x]$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty$$

- تفسير النتائج هندسيا:

• $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $+\infty$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال: $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

- دراسة $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1) - 2(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
x^2	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$x - 3$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x - 1)^3$	$-$		$-$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \nearrow f(0) \nearrow +\infty$			$+\infty \searrow f(3) \nearrow +\infty$		

(2) أ- تعيين الأعداد a, b, c : من أجل كل $x \neq 0$ لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax + b + \frac{cx + b}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{(ax + b)(x-1)^2 + cx + b}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{(ax + b)(x-1)^2 + cx + b}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{ax^3 + (2a + b)x^2 + (a - 2b)x + 2b}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -4 \\ a - 2b + c = 8 \\ 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

ب- استنتاج المستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - [x - 2]) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2} - [x - 2] \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x - 2}{(x-1)^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x}{x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0
 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$.

ج- وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) :

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} - x + 2$$

$$= \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

لدينا: $(x - 1)^2 > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$3x - 2$	$-$	0	$+$	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (d) لما: $x \in]-\infty; \frac{2}{3}[$.
- (C_f) يقطع (d) في النقطة $A(\frac{2}{3}; \frac{-4}{3})$.
- (C_f) فوق (d) لما: $x \in]\frac{2}{3}; 1[\cup]1; +\infty[$.

(3) إيجاد معادلة المماس (T) :

المماس (T) يوازي المستقيم (d) معناه: يوجد a حيث: $f'(a) = 1$

$$f'(a) = 1 \Rightarrow \frac{a^2(a - 3)}{(a - 1)^3} = 1$$

$$\Rightarrow a^2(a - 3) = (a - 1)^3$$

$$\Rightarrow 3a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

ومن معادلة المماس (T) هي: $f'(a)(x - a) + f(a)$

$$(T): y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12}$$

(1) تبين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $] - \infty; 1[$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $] - \infty; 1[$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا: $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty) \times (\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty) < 0$

ومن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $] - \infty; 1[$:

- استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α :

α	$-\infty$	...	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	...	0.98	0.99	1
$f(\alpha)$	$+\infty$	...	-0.92	-0.58	-0.18	0.25	0.76	...	2348.97	9698.98	$+\infty$

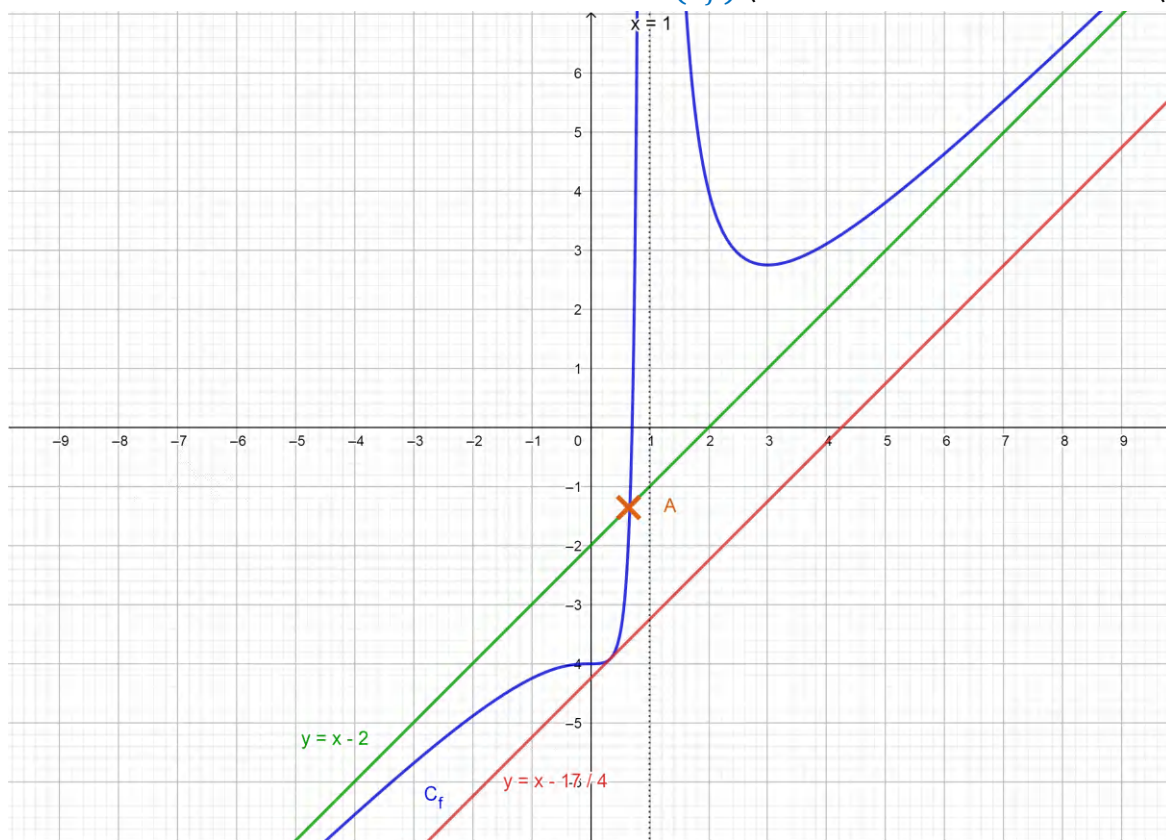
من الجدول نلاحظ أن: $0.70 < \alpha < 0.71$

(1) التمثيل البياني للمستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f) :

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$

- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 2$
- نرسم معادلة المماس (T) ذو المعادلة $y = x - \frac{17}{4}$
- نعين A نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (d)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(2) استنتاج بيانيا حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

المعادلة لا تقبل حلول	$m < \frac{-17}{4}$	لما
المعادلة تقبل حلا مضاعفا	$m = \frac{-17}{4}$	لما
المعادلة تقبل حلان	$\frac{-17}{4} < m < -2$	لما
المعادلة تقبل حل وحيد $x = \frac{2}{3}$	$m = -2$	لما
المعادلة تقبل حلان	$m > -2$	لما

02

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه: $g'(x) = 3x^2 + 6$ ولدينا $3x^2 + 6 > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α :بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g(-1.48) = -0.12$ و $g(-1.47) = 0.0035$ ولدينا $g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيد α .- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

(1) أ-

حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

ب- حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2)(x^2 + 2) - (2x)(x^3 - 6)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x	-		-	+
$g(x)$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$				

(2) أ- تبين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 6 - x^3 - 2x}{x^2 + 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-6 - 2x}{x^2 + 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2x}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2}{x} \right] = 0 \end{aligned}$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x) - y = \frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$$

لدينا: $(x^2 + 2) > 0$ ومنه الإشارة من $(-2x - 6)$:

$$\begin{aligned} -2x - 6 = 0 &\Rightarrow -2x = 6 \\ &\Rightarrow x = -3 \end{aligned}$$

ومنه إشارة $y - f(x)$:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) على المجال: $]-\infty; -3[$
- (C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $A(-3; -3)$
- (C_f) تحت (Δ) على المجال: $]-3; +\infty[$

(3) تبين أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

يكفي أن نبرهن أن $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha &= \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha \\ &= \frac{2\alpha^3 - 12 - 3\alpha^3 - 6\alpha}{\alpha^2 + 2} \\ &= \frac{-(\alpha^3 + 6\alpha + 12)}{\alpha^2 + 2} \\ &= -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 + 2} \end{aligned}$$

ولدينا سابقا: $g(\alpha) = 0$ ومنه:

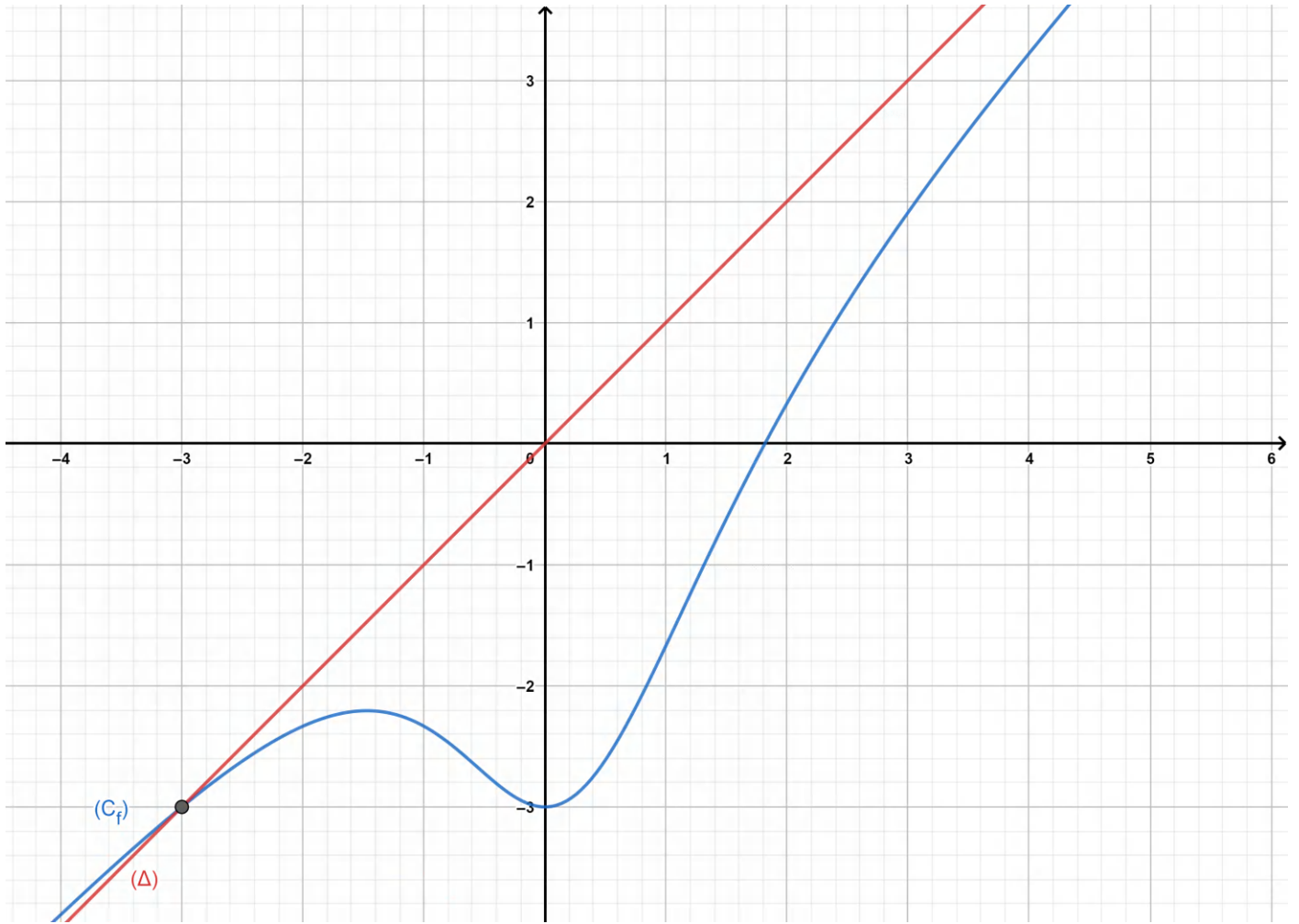
$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = -\frac{0}{\alpha^2 + 2} = 0$$

إذن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

- حصر $f(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } -1.48 < \alpha < -1.47 \quad \text{ولدينا: } f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha \\ \frac{3}{2}(-1.48) < \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}(-1.47) \\ -2.22 < f(\alpha) < -2.21 \end{aligned}$$

(4) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) :



(4) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x - 7}{2 - x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x}{-x} \right] \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x - 7}{2 - x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x}{-x} \right] \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{3x - 7}{2 - x} \right] \\ &= \frac{-1}{0^+} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{3x - 7}{2 - x} \right] \\ &= \frac{-1}{0^-} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $y = -3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x = 2$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال تعريفها

أولا نحسب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(2 - x) - (3x - 7)}{(2 - x)^2} \\ &= \frac{-1}{(2 - x)^2} < 0 \end{aligned}$$

لدينا $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	-3		$+\infty$
		$-\infty$	-3

(5) تبين أن النقطة A هي مركز تناظر لـ (C_f) :

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$



- نثبت أن $(2(2) - x) \in D_f$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 2[\text{ أو } x \in]2; +\infty[\Leftrightarrow x < 2 \text{ أو } x > 2 \Leftrightarrow -x > -2 \text{ أو } -x < -2$$

$$\Leftrightarrow (4 - x) < 2 \text{ أو } (4 - x) > 2 \Leftrightarrow (4 - x) \in]-\infty; 2[\text{ أو } (4 - x) \in]2; +\infty[$$

$$\text{إذن: } (4 - x) \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

- نثبت أن $f(2(4) - x) + f(x) = 2(-3)$

لدينا:

$$\begin{aligned} f(4 - x) + f(x) &= \frac{3(4 - x) - 7}{2 - (4 - x)} + \frac{3x - 7}{2 - x} \\ &= \frac{5 - 3x}{-2 + x} + \frac{7 - 3x}{x - 2} \\ &= \frac{12 - 6x}{-2 + x} \\ &= \frac{-2 + x}{-6(-2 + x)} \\ &= \frac{-2 + x}{-2 + x} \\ &= -6 \end{aligned}$$

إذن النقطة $A(2; -3)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

(6) إيجاد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x + 4$

◀ المماس لـ (C_f) عن النقطة ذات الفاصلة a يعطى بالمعادلة التالية: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ▶

لدينا المماس مواز للمستقيم ذو المعادلة $y = -x + 4$ $\Leftrightarrow f'(a) = -1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{(2-a)^2} = -1 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$

لدينا: $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4 > 0$ إذن:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \\ a_2 = \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

إذن يوجد مماسان لـ (C_f) موازيان للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x + 4$ ، معادلتيهما:

$$\begin{aligned} y_1 &= f'(a_1)(x - a_1) + f(a_1) \\ &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= -1(x - 1) + (-4) \\ &= -x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= f'(a_2)(x - a_2) + f(a_2) \\ &= -1(x - 3) + (-2) \\ &= -x + 1 \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{cases} y_1 = -x - 3 \\ y_2 = -x + 1 \end{cases}$$

(7) إيجاد نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

- مع محور الترتيب:

◀ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الترتيب نحسب $f(0)$ ▶

$$f(0) = \frac{3(0) - 7}{2 - (0)} = -\frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ \left(0; -\frac{7}{2} \right) \right\}$$

- مع محور الفواصل:

◀ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ▶

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x - 7}{2 - x} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 7 = 0 \\ \text{و} \\ 2 - x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ \text{و} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

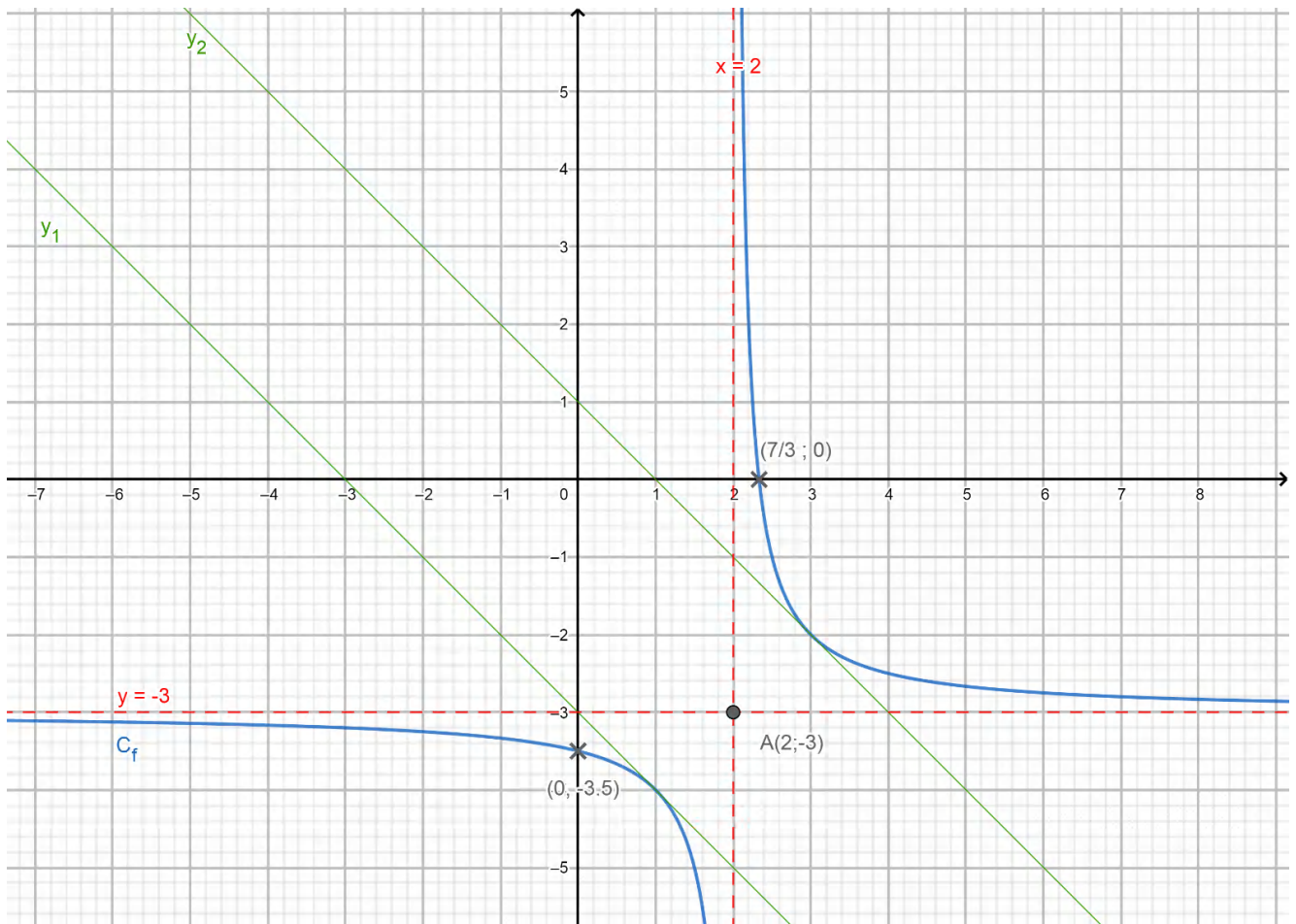
ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ \left(\frac{7}{3}; 0 \right) \right\}$$

(8) التمثيل البياني لـ المنحنى (C_f) :

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = -3$ و $x = 2$
- نرسم معادلات المماس:
$$\begin{cases} y_1 = -x - 3 \\ y_2 = -x + 1 \end{cases}$$
- نعين النقطة $A(2; -3)$ مركز تناظر لـ (C_f) .
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



04

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

لدينا إشارة المقام كالآتي:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$(x^2 - 4x + 3)$	+	0	-	0	+

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x^2}{x^2} \right]$$

$$= 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2}{x^2} \right]$$

$$= 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right]$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right]$$

$$= \frac{1}{0^-}$$

$$= -\infty$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] \\ &= \frac{1}{0^+} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] \\ &= \frac{1}{0^+} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $y = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$
- $x = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها

أولاً: نحسب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x - 12)(x^2 - 4x + 3) - (2x - 4)(3x^2 - 12x + 10)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \\ &= \frac{-2x + 4}{(x^2 - 4x + 3)^2} \end{aligned}$$

ثانياً: ندرس إشارة $f'(x)$

لدينا $(x^2 - 4x + 3)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x + 4)$

لدينا: $-2x + 4 = 0$ ومنه $-2x = -4$ ومنه $x = 2$

ثالثاً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	$\nearrow +\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow -\infty$	$\searrow 3$	$\searrow 3$

(3) إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

مع محور الترتيب:

◀ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الترتيب نحسب $f(0)$ ▶

$$f(0) = \frac{3(0)^2 - 12(0) + 10}{(0)^2 - 4(0) + 3} = \frac{10}{3}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{10}{3} \right) \right\}$$

مع محور الفواصل:

▶ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ▶

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x + 10 = 0 \dots (1) \\ \text{و} \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

نحل (1) نجد:

$$\Delta = (-12)^2 - 4(3)(10) = 24$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 - \sqrt{24}}{6} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + \sqrt{24}}{6} \end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ \left(\frac{12 - \sqrt{24}}{6}; 0 \right), \left(\frac{12 + \sqrt{24}}{6}; 0 \right) \right\}$$

4- أ- تبين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4-x) \in D_f$:

لدينا $x \in D_f$ ومنه: $x \in]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

ومنه: $x \in]3; +\infty[$ أو $x \in]1; 3[$ أو $x \in]-\infty; 1[$

ومنه: $x > 3$ أو $1 < x < 3$ أو $x < 1$

ومنه: $-x < -3$ أو $-3 < -x < -1$ أو $-x > -1$

ومنه: $4 - x < 1$ أو $1 < 4 - x < 3$ أو $4 - x > 3$

ومنه: $(4-x) \in]-\infty; 1[$ أو $(4-x) \in]1; 3[$ أو $(4-x) \in]3; +\infty[$

إذن: $(4-x) \in]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

ب- تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) :



لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

أولا نثبت أن $(2(2) - x) \in D_f$

من السؤال السابق لدينا: $(4 - x) \in D_f$

ثانيا نثبت أن $f(2(4) - x) = f(x)$

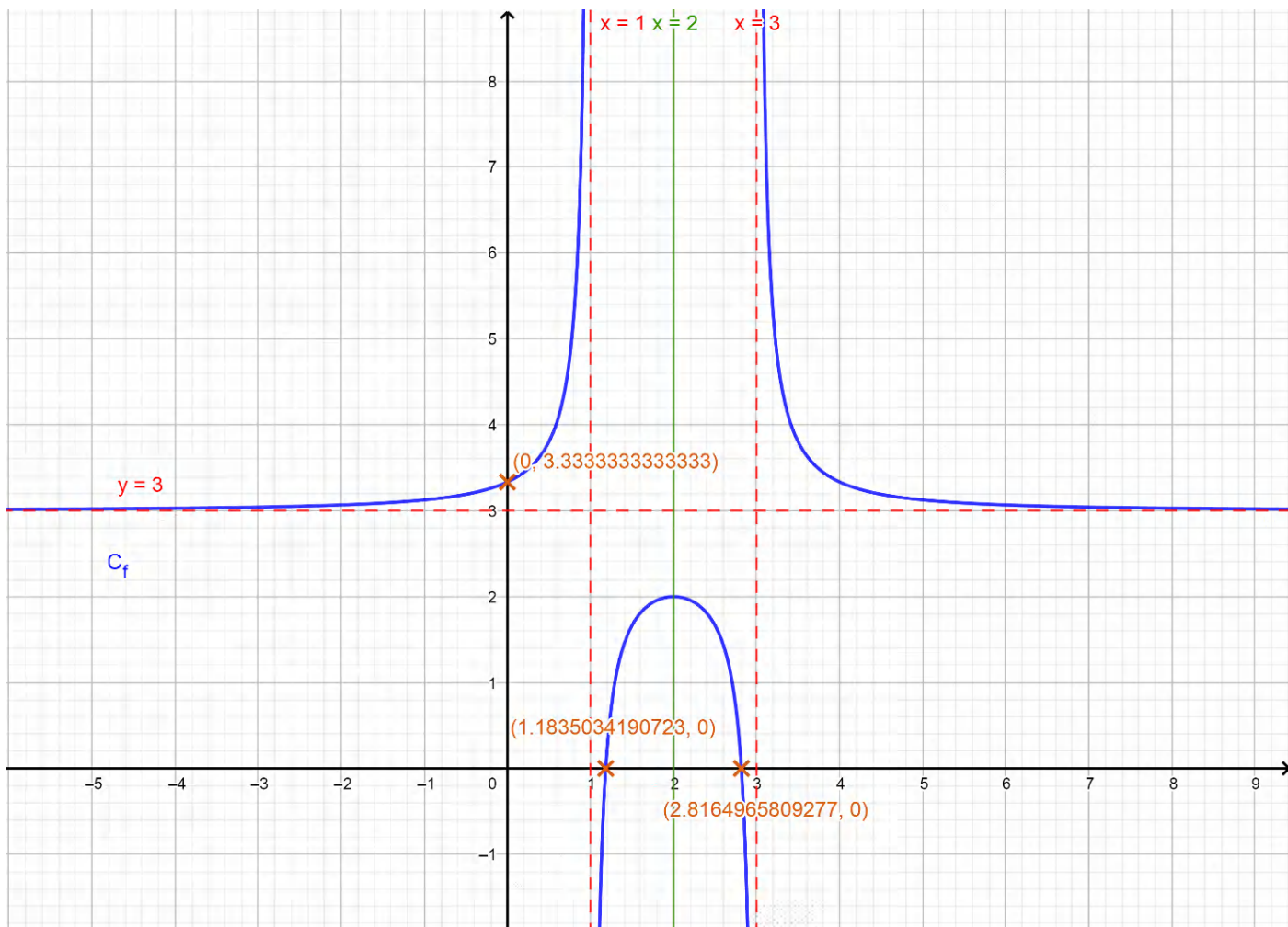
$$\begin{aligned} f(4 - x) &= \frac{3(4 - x)^2 - 12(4 - x) + 10}{(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 3} \\ &= \frac{3(4^2 - 2(4)(x) + x^2) - 48 + 12x + 10}{4^2 - 2(4)(x) + x^2 - 16 + 4x + 3} \\ &= \frac{3(16 - 8x + x^2) - 38 + 12x}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

اذن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) .

(5) التمثيل البياني للمنحنى (C_f) :

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- **نرسم المستقيمات المقاربة:** $y = 3$ و $x = 1$ و $x = 3$
- **نرسم المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f)**
- **نعين نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')**
- **ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)**



05

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) إيجاد الأعداد a, b, c :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{x-3} \\ &= \frac{ax^2 - 3ax + bx - 3b + c}{x-3} \\ &= \frac{ax^2 + (b-3a)x - 3b + c}{x-3} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -8 \\ -3b + c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 5 + \frac{1}{x-3}$$

(2) استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) :

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x-5)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 5 + \frac{1}{x-3} - (x-5) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x-3} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 5$ مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ - تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{1}{x-3}$$

لدينا: $1 > 0$ ، إذن الإشارة من إشارة المقام: $(x-3)$:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$\frac{1}{x-3}$	-		+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

(3) دراسة تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[x - 5 + \frac{1}{x-3} \right] \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[x - 5 + \frac{1}{x-3} \right] \\
 &= +\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 16}{x-3} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 16}{x-3} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

التفسير الهندسي:

- المستقيم $x = 3$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.
- حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{1}{(x-3)^2} \\
 &= \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}
 \end{aligned}$$

لدينا: $(x-3)^2 > 0$ ومنه الإشارة من $(x^2 - 6x + 8)$:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 36 - 4(1)(8) \\
 &= 4 > 0 \\
 \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-2}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+2}{2} = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
-----	-----------	---	---	---	-----------

$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow -4 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$		

(4) إيجاد إحداثي النقطة ω :

$$\begin{cases} y = x - 5 \dots (1) \\ x = 3 \dots (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) نجد: $y = 3 - 5 = -2$ ومنه $\omega(3; -2)$

- اثبات أن ω مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

$$\text{أولا نثبت أن } (2(3) - x) \in D_f$$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

$$\Leftrightarrow x > 3 \text{ أو } x < 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 3[\text{ أو } x \in]3; +\infty[\Leftrightarrow -x < -3 \text{ أو } -x > -3$$

$$\Leftrightarrow (6 - x) < 3 \text{ أو } (6 - x) > 3 \Leftrightarrow (6 - x) \in]-\infty; 3[\text{ أو } (6 - x) \in]3; +\infty[$$

$$\text{إذن: } (6 - x) \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$$

$$\text{ثانيا نثبت أن } f(2(3) - x) + f(x) = 2(-2)$$

لدينا:

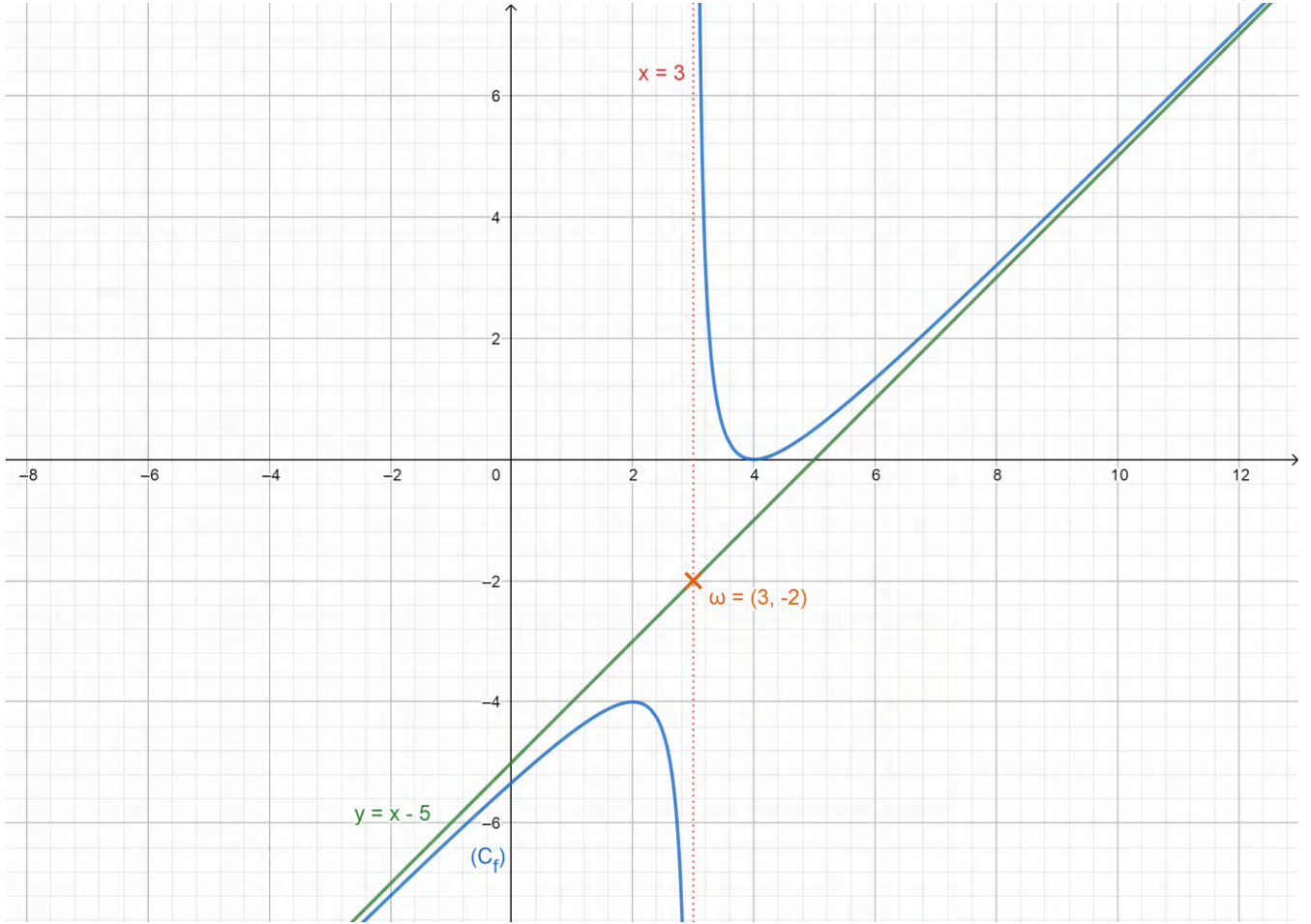
$$\begin{aligned} f(6 - x) + f(x) &= 6 - x - 5 + \frac{1}{6 - x - 3} + x - 5 + \frac{1}{x - 3} \\ &= \frac{1}{3 - x} + \frac{1}{x - 3} - 4 \\ &= \frac{1}{3 - x} - \frac{1}{3 - x} - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

إذن النقطة $\omega(3; -2)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

(5) التمثيل البياني:

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

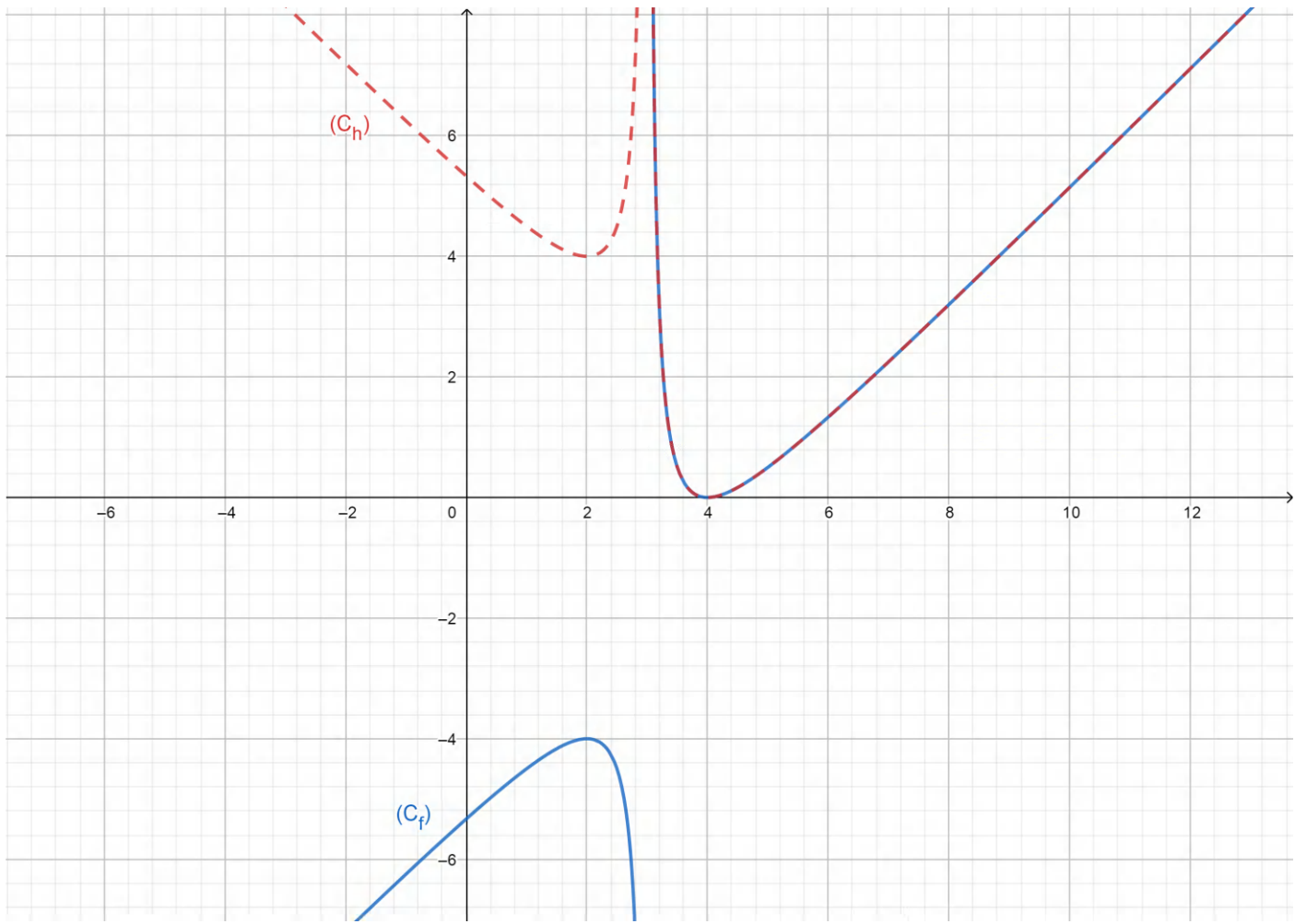
- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 3$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = x - 5$.
- نعين ω مركز تناظر المنحنى (C_f)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



6 استنتاج رسم المنحني (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) إذا كان $f(x) \geq 0$

(C_h) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$.



06

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x^3 - 6x^2 + 6x + 3] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{6}{x^1} + \frac{3}{x^3} \right) \right] \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x^3 - 6x^2 + 6x + 3] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{6}{x^1} + \frac{3}{x^3} \right) \right] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

- حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 6x^2 - 12x + 6 \\
 &= 6(x - 1)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$	3	$+\infty$

(2) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α لدينا الدالة g رتيبة ومستمرة على مجال تعريفهاولدينا: $g(-0.4) = -4.88$ و $g(-0.3) = 0.606$ ولدينا: $g(-0.3) \times g(-0.4) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ب- تحديد حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن $f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1}$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1} &= \frac{(x^2 - 2x - 1)(x-1) - 5}{x-1} \\
 &= \frac{(x^2 - 2x - 1)(x-1) - 5}{x-1} \\
 &= \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x-1} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

(2) أ- حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x-1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x-1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-2 - \frac{5}{0^-} \right] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-2 - \frac{5}{0^+} \right] \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

نلاحظ أن المستقيم $(x = 1)$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة تغيرات الدالة f :

أولاً: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x - 2 + \frac{5}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{2(x-1)^3 + 5}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 3}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

لدينا $(x-1)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة $g(x)$.

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	$+\infty$

(3) حساب: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-\frac{5}{x-1} \right] = 0$$

المنحني (C_p) الممثل للدالة: $(x^2 - 2x - 1)$ هو منحنى تقارب للدالة f بجوار $\pm\infty$

(4) دراسة الوضع النسبي بين (C_p) والمنحني (C_f) :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x) - p(x)]$

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - p(x) &= -\frac{5}{x-1} \\ &= \frac{5}{1-x} \end{aligned}$$

لدينا: $5 > 0$ إذن الإشارة من المقام

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - p(x)$	+	-	
الوضعية	(C_p) فوق (C_f)	(C_p) تحت (C_f)	

(5) تبين أن $\left[f(\alpha) = \frac{15}{2(1-\alpha)} - 2 \right]$

$$\left(f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 = 0 \right)$$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ ، ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 &= \alpha^2 - 2\alpha - 1 - \frac{5}{\alpha-1} - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 \\ &= \frac{2(\alpha-1)(\alpha^2 - 2\alpha - 1) - 2(5) + 15 + 2(2(\alpha-1))}{2(\alpha-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2(\alpha - 1)} \\
&= \frac{g(\alpha)}{2(\alpha - 1)} = \frac{0}{2(\alpha - 1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- حصراً $f(\alpha)$:

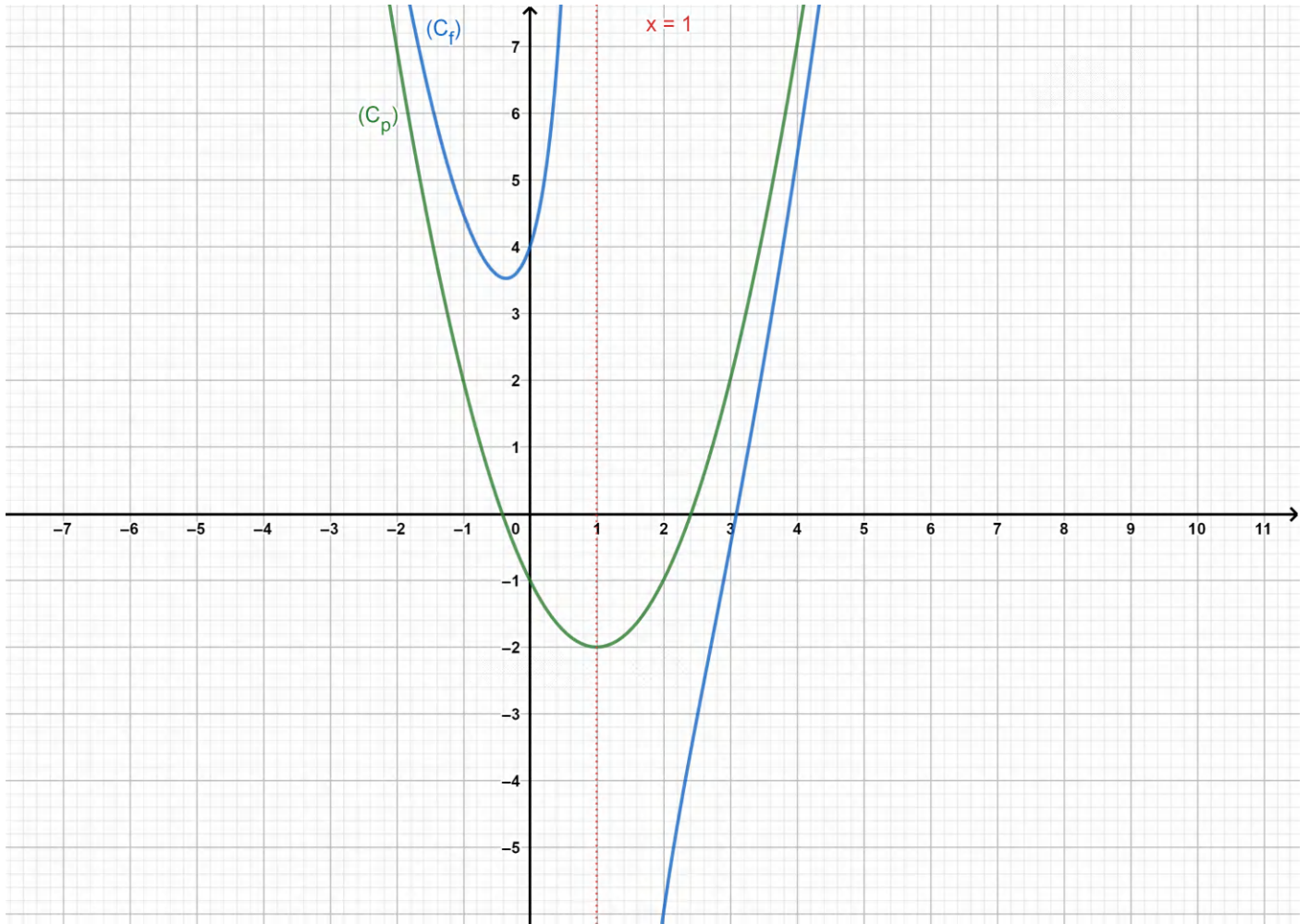
لدينا:

$$\begin{aligned}
0.4 &< \alpha < -0.3 \\
0.3 &< -\alpha < 0.4 \\
1.3 &< 1 - \alpha < 1.4 \\
2.6 &< 2(1 - \alpha) < 2.8 \\
\frac{1}{2.8} &< \frac{1}{2(1 - \alpha)} < \frac{1}{2.6} \\
\frac{15}{2.8} - 2 &< \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2 < \frac{15}{2.6} - 2 \\
3.36 &< f(\alpha) < 3.77
\end{aligned}$$

(7) التمثيل البياني لكل من (C_p) و (C_f) :

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $x = 1$
- نرسم المنحني المقارب ذو المعادلة $(x^2 - 2x - 1)$.
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(I) لتكن الدالة f المعرفة بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 3x + 2}$$

(1) تعيين D_f مجموعة تعريف الدالة f :لكي تكون الدالة f معرفة يجب أن يكون:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &\neq 0 \\ (x-1)(x-2) &\neq 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \{1; 2\}$ - تبين أنه من أجل كل x من D_f فإن: $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} \\ &= \frac{a(x-1)(x-2) + b(x-2) + c(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{ax^3 + (-3a + b + c)x + (2a - 2b - c)}{x^2 - 3x + 2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -3a + b + c = 2 \\ 2a - 2b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 5 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 - c \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 9 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$

(2) أ/ دراسة تغيرات الدالة f :

أولاً: حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} \right] \\ &= 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[-8 - \frac{4}{0} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= +\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[-3 + \frac{9}{0} \right] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

ثانياً: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\
 &= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\
 &= \frac{-5x^2 + 2x + 7}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\
 &= \frac{(x+1)\left(x - \frac{7}{5}\right)}{(x^2 - 3x + 2)^2}
 \end{aligned}$$

لدينا: المقام $(x^2 - 3x + 2)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$(x+1)\left(x - \frac{7}{5}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x - \frac{7}{5}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{7}{5} \end{cases}$$

ثالثاً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$\frac{7}{5}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	1	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	1

ب/ المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

- $y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$
- $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$
- $x = 2$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} - 1$$

$$= -\frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$

$$= \frac{-4(x-2) + 9(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{5x-1}{(x-1)(x-2)}$$

إشارة الكسر من إشارة البسط $\times$ إشارة المقام
دراسة إشارة البسط:

$$5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

دراسة إشارة المقام:

$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{و} \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{و} \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	1	2	$+\infty$
$5x-1$	-	0	+	+	+
x^2-3x+2	+	+	0	+	+
$f(x)-y$	-	0	-	-	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ) (C_f) فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ) في $x = \frac{1}{5}$			(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

3) تعيين تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

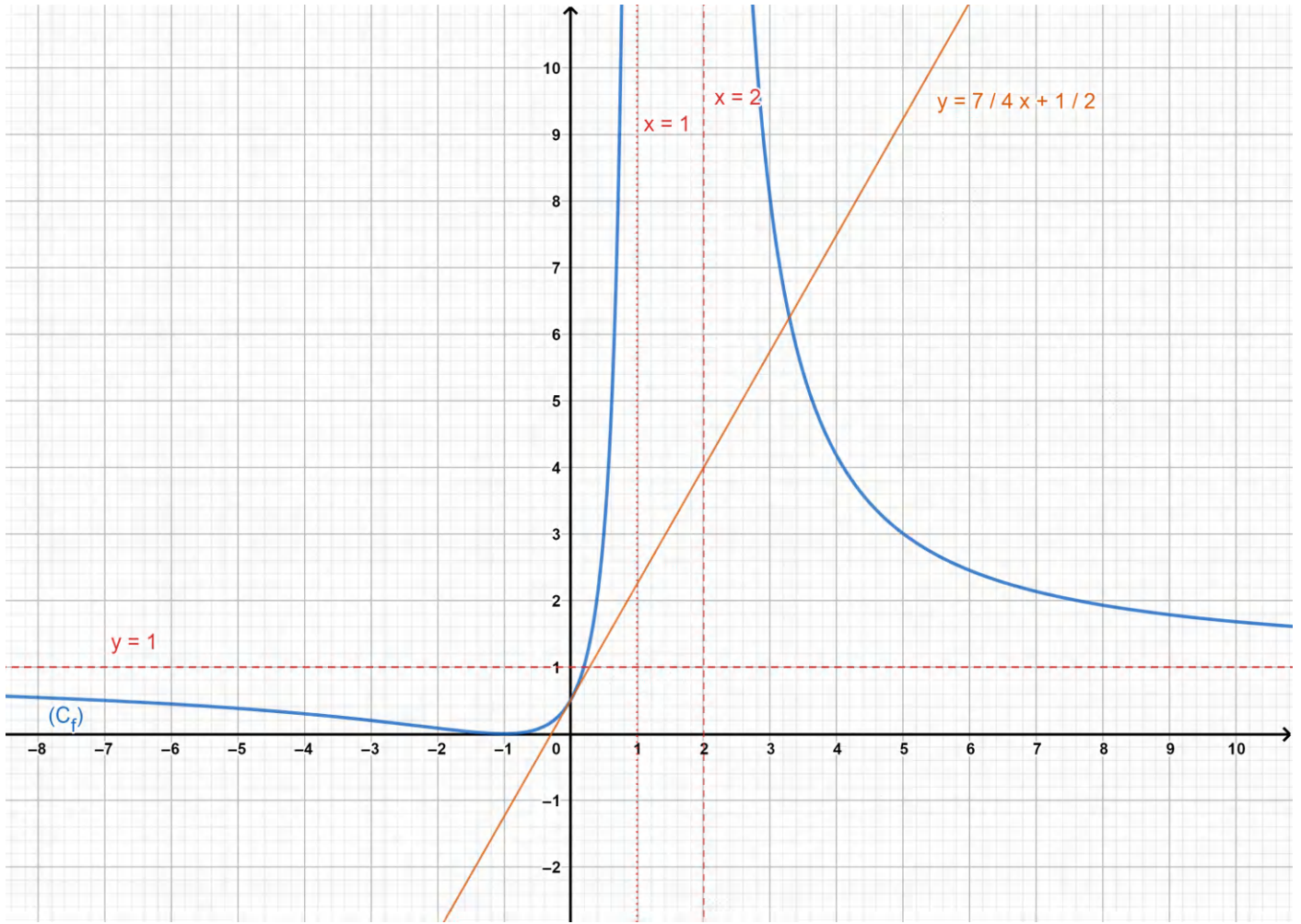
$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$$

4) التمثيل البياني:

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=3$ و $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$
- نعين المماس ذو المعادلة $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II) نعرف الدالة h كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$$

1) تعيين مجموعة تعريف الدالة h :

لتكون الدالة h معرفة يجب أن يكون:

$$\begin{aligned} x^2 - 3|x| + 2 \neq 0 &\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \neq 0, x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0, x < 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x - 2)(x - 1) \neq 0 \\ (x + 2)(x + 1) \neq 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه: $D_h = \mathbb{R} - \{-2; -1; 1; 2\}$

2) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}, x \geq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}, x < 0 \end{cases}$$

لاحظ أنه لما $x \geq 0$ فإنه $h(x) = f(x)$

(3) دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0 :

◀ عندما تتساوى النهايتان من اليمين واليسار عند a وكلا النهايتان تساوي $f(a)$ ، نقول أن الدالة مستمرة عند ذلك العدد ▶

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \right] = \left[\frac{0^2 - 2(0) + 1}{0^2 + 3(0) + 2} \right] = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \right] = \left[\frac{0^2 - 2(0) + 1}{0^2 + 3(0) + 2} \right] = \frac{1}{2}$$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} [h(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [h(x)] = \frac{1}{2}$ فإن: الدالة h مستمرة عند 0.

- قابلية الاشتقاق:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2} - \frac{1}{2}}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2x^2 + 4|x| + 2 - x^2 + 3|x| - 2}{2x(x^2 - 3|x| + 2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2 + 7x}{2x(x^2 - 3|x| + 2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x + 7}{2(x^2 - 3|x| + 2)} \right] \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2} - \frac{1}{2}}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^2 + 7|x|}{2x(x^2 - 3|x| + 2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x - 7}{2(x^2 - 3|x| + 2)} \right] \\ &= -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

بما أن النهايتين غير متساويتين نقول أن: الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند 0. ومنه المنحنى (C_h) يقبل نصفي مماسيين معامل توجيه كل منهما: $\frac{7}{4}$ و $-\frac{7}{4}$

(4) دراسة شفعية الدالة h :

◀ شاهد هذا التذكير ▶

دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية)

$$\begin{aligned}
 h(-x) &= \frac{(-x)^2 + 2|-x| + 1}{(-x)^2 - 3|-x| + 2} \\
 &= \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2} \\
 &= h(x)
 \end{aligned}$$

(5) استنتاج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقاً من (C_f) :

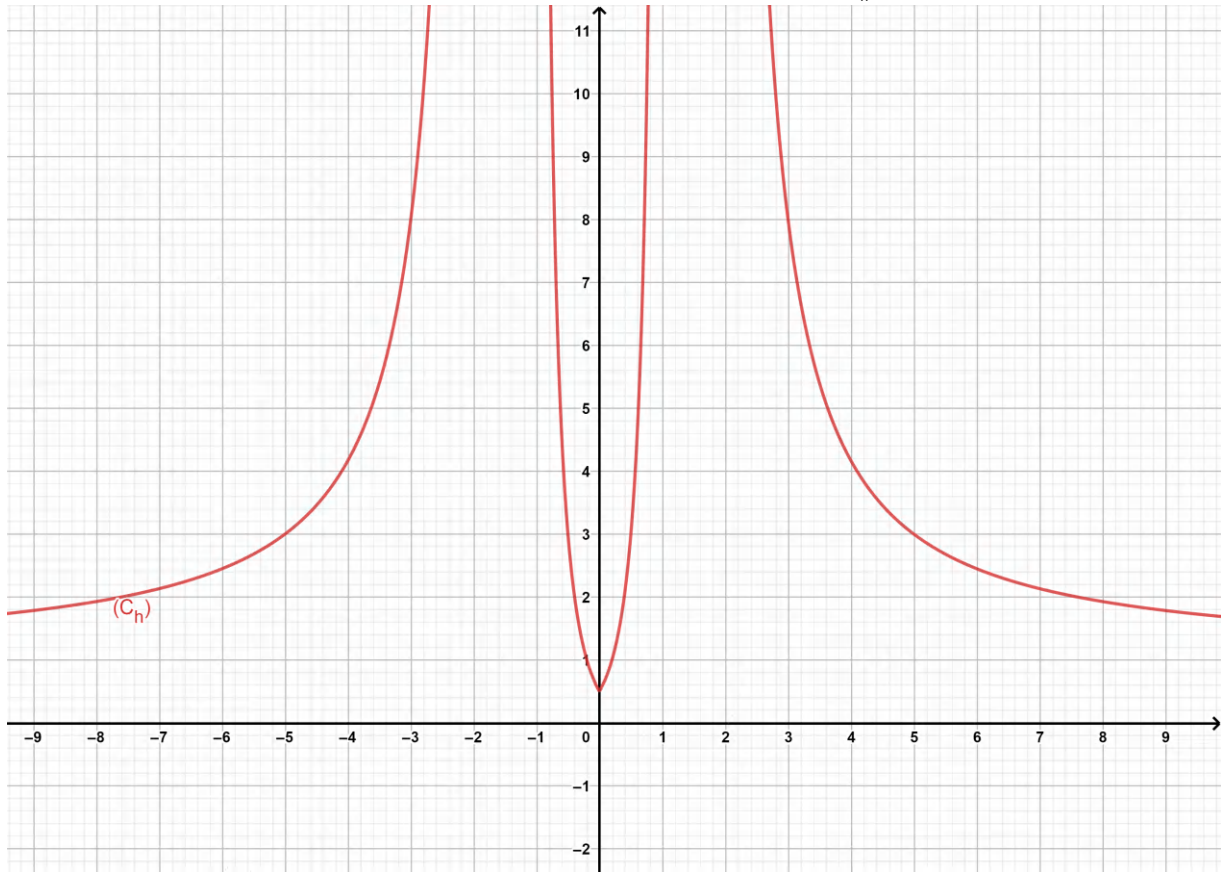
لدينا:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \geq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}, & x < 0 \end{cases}$$

ومنه منحنى الدالة h ينطبق على منحنى الدالة f لما $x \geq 0$

ولدينا: $h(-x) = h(x)$

ومنه الدالة h زوجية ومنحائها البياني متناظر بالنسبة لمحور الترتيب



(6) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 (m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m-1 &= 0 \\
 \Rightarrow mx^2 - x^2 - 3mx - 2x + 2m-1 &= 0 \\
 \Rightarrow m(x^2 - 3x + 2) &= x^2 + 2x + 1 \\
 \Rightarrow m &= \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

ومنه: $m = h(x)$ لما: $x \geq 0$

إذن المناقشة كالآتي:

لما: $m < \frac{1}{5}$ المعادلة لا تقبل حلول

لما: $m = \frac{1}{5}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا

لما: $1 \geq m > \frac{1}{5}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

لما: $m > 1$ المعادلة تقبل حلان

(1) برهان أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

G مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- حساب $G'(x)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) - F'(-x) \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(-x)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه الدالة G ثابتة.

(2)

- حساب $G(0)$:

$$G(0) = F(0) - F(-0) = 0$$

- استنتاج أن G فردية:

بما أن الدالة G ثابتة، إذن من كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$F(x) + F(-x) = 0 \Leftrightarrow F(-x) = -F(x)$$

ومنه الدالة F فردية

(III)

(1)

تبرير أن H تقبل الاشتقاق على I وحساب $H'(x)$:

H مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ إذن H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(x) + \left[F\left(\frac{1}{x}\right) \right]' \\ &= F'(x) - \frac{1}{x^2} F'(x) \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \end{aligned}$$

ومنه الدالة H ثابتة.

(2) برهان أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$:

$$H(1) = F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = 2F(1)$$

وبما أن الدالة H ثابتة فإنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإنه:

$$H(x) = 2F(1)$$

(3) استنتاج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2F(1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [H(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] + F(0) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] \end{aligned}$$

ومنه:

$$2F(1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)]$$

الاستنتاج: (C_f) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

وبما أن F فردية فإن (C_f) يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

$$(IV) \quad T \text{ الدالة المعرفة على } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \text{ بـ: } T(x) = F(\tan x) - x$$

(1) حساب $T'(x)$:

$$\begin{aligned} T'(x) &= [F(\tan x) - x]' \\ &= (\tan x)' F'(\tan x) - 1 \\ &= (1 + \tan^2 x) \left(\frac{1}{\tan^2 x + 1} \right) - 1 \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

ومنه T دالة ثابتة.

(2) حساب $F(1)$:

لدينا: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \ni 0$ ومنه $0 \in D_T$ أي:

$$\begin{aligned} T(0) &= F(\tan 0) - 0 \\ &= F(0) - 0 \\ &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

وبما أن T ثابتة فإنه من أجل كل $x \in D_T$ فإنه $T(x) = 0$

إذن

$$\begin{aligned} F(\tan x) &= T(x) + x \\ &= 0 + x \\ &= x \end{aligned}$$

ولدينا من جهة أخرى: $F(\tan x) = F(1)$ أي $\tan x = 1$

وهذا يكافئ: $x = \frac{\pi}{4}$ لأن: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \ni x$

إذن:

$$F(1) = F\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(V)

(1) انجاز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة F' موجبة تماما ومنه الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ولدينا $F(1) = \frac{\pi}{4}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2F(1)$ ومنه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

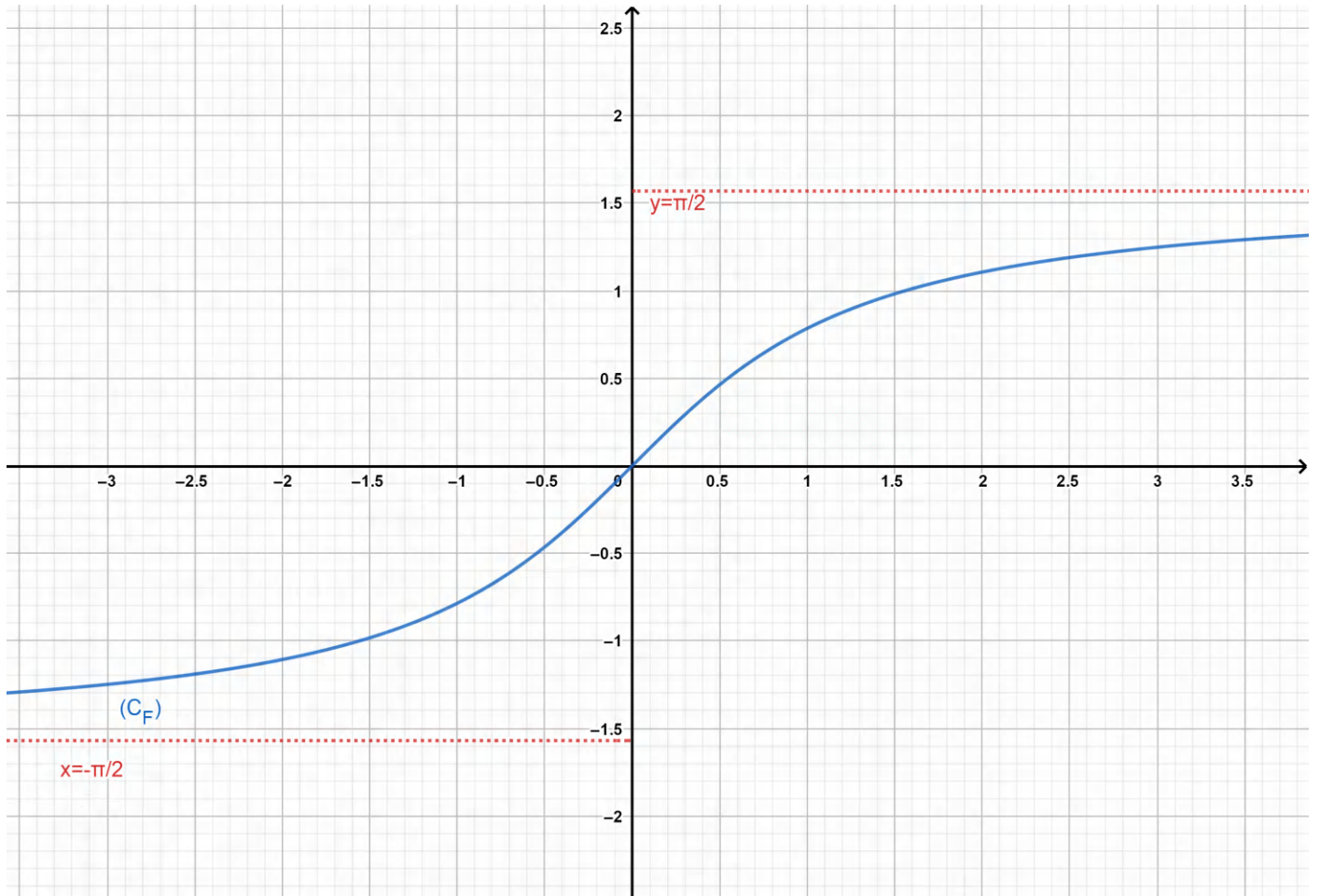
وبما أن الدالة F فردية فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x)] = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		+	
$F(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

(2) رسم المنحنى (C_f) والمستقيمات المقاربة:



(I)

1 أ /

حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3 - 3x^2 + 3x - 5] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) \right] \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - 3x^2 + 3x - 5] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) \right] \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

ب / دراسة تغيرات الدالة g :أولاً: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعمل المميز Δ

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (-6)^2 - 4(3)(3) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ومنه المعادلة لها حل مضاعف هو:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\
 &= 3(x - 1)^2
 \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماماً.ولدينا $g'(1) = 0$ ، ومنه الدالة g تنعدم ولا تغير اشارتها.

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

(2) أ / تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α :لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها ،

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$ و $g(2) = -3$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times g(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب/ حصر العدد α :

α	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.7	2.8	...	$+\infty$
$g(\alpha)$	-3	-2.6	-2.2	-1.8	-1.2	-0.6	0.1	1.8	...	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $2.5 < \alpha < 2.7$

ج/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) تعيين نهايات الدالة f :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{0^+} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

2) تحديد الأعداد الحقيقية c, b, a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + x^2(-2a+b) + x(a-2b) + b+c}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -3 \\ a - 2b = 3 \\ b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$$

(3) أ- تبين أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً (d) :

ليكن: $y = x - 1$

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} - (x-1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f) :

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{2}{(x-1)^2} > 0$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+		+
الوضعية	(d) فوق (C_f)		(d) فوق (C_f)

(4) أ- دراسة تغيرات الدالة f :

أولاً: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-1)^3 - 4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{g(x)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	α	$-\infty$
$g(x)$	-	-	0	+
$(x-1)^3$	-	+		+

$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\nwarrow$ $f(\alpha)$ $\nearrow$ $+\infty$		

ب- تبين أن (C_f) يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β :

لدينا: $f(0) = 1$ و $f(-1) = -1.5$

ولدينا $f(-1) \times f(0) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $-1 \leq \beta \leq 0$

ج- تبين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} = 0$

لدينا سابقا: $g(\alpha) = 0$ ، إذن:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} &= \alpha - 1 + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{0}{(\alpha-1)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

حصر $f(\alpha)$

لدينا:

$$\begin{aligned} 2.5 &< \alpha < 2.7 \\ 1.5 &< \alpha - 1 < 1.7 \\ 2.25 &< (\alpha - 1)^2 < 2.89 \\ \frac{1}{2.89} &< \frac{1}{(\alpha - 1)^2} < \frac{1}{2.25} \\ \frac{6}{2.89} &< \frac{6}{(\alpha - 1)^2} < \frac{6}{2.25} \\ 2.07 &< f(\alpha) < 2.66 \end{aligned}$$

(5) إنشاء (C_f) :

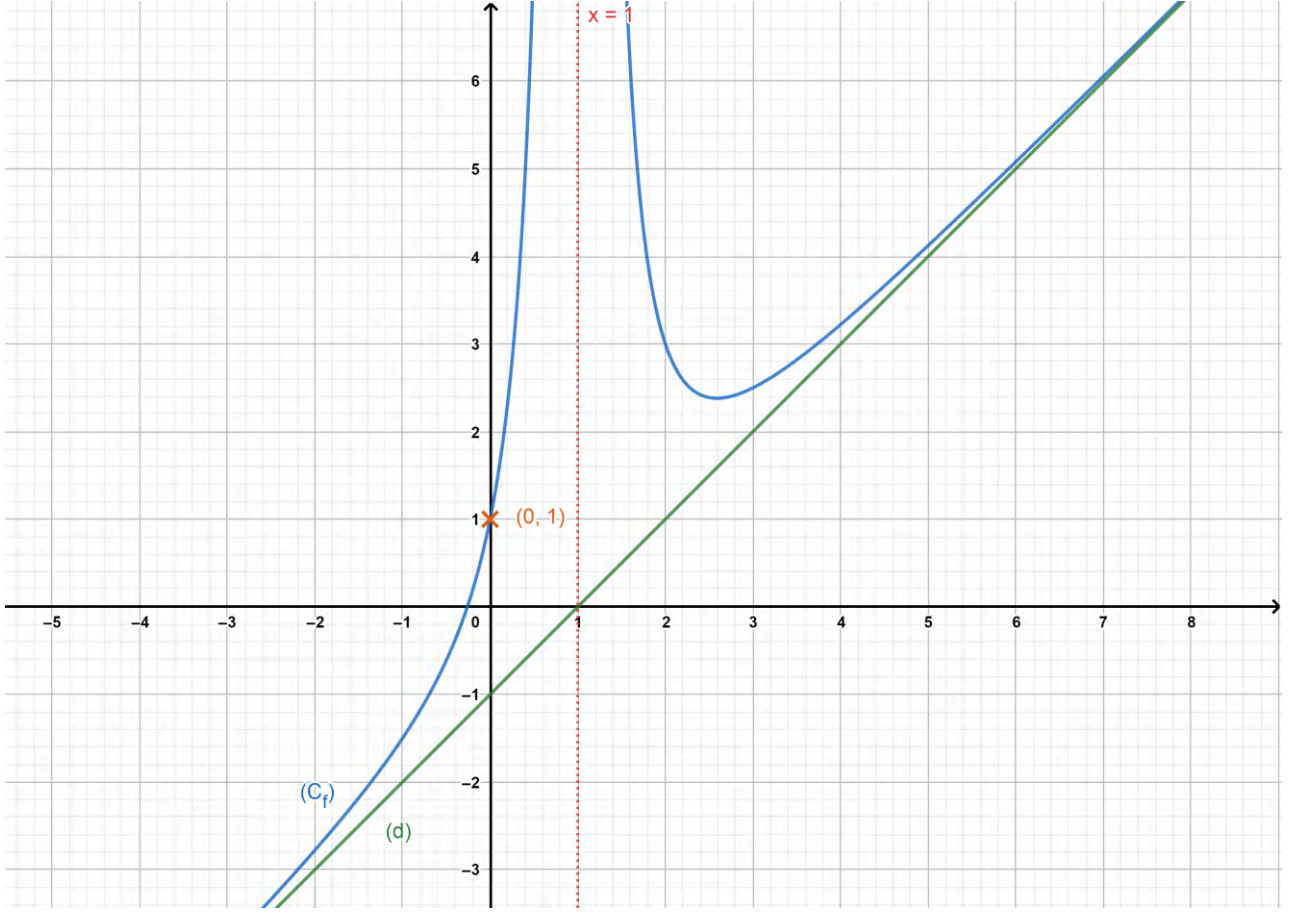
حساب $f(0)$:

$$f(0) = 0 - 1 + \frac{2}{(0-1)^2} = 1$$

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$

- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 1$
- نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(6) أ- تبين أن h زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

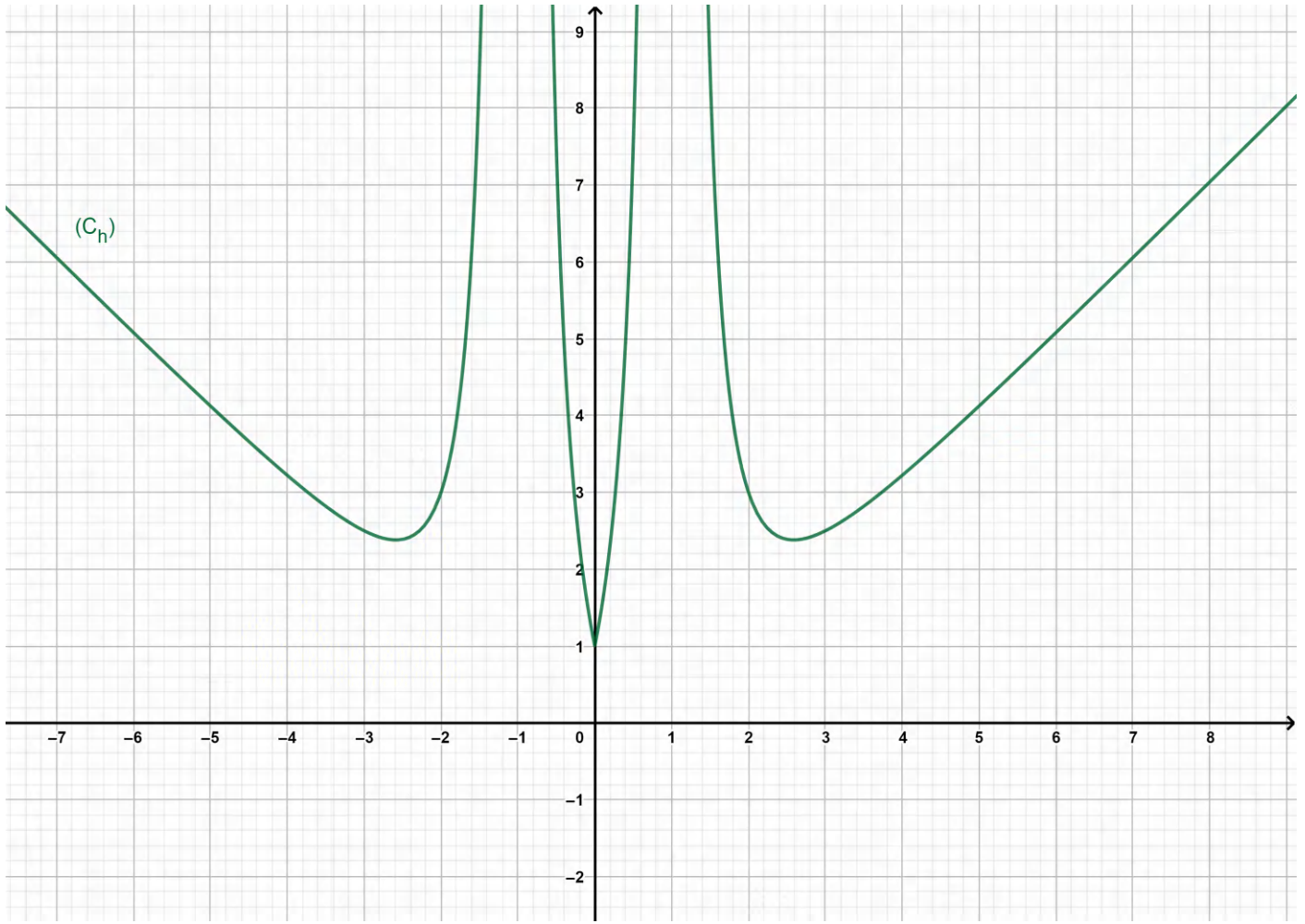
ومنه الدالة h زوجية.

ب/ انشاء (C_h):

لدينا: $f(|x|) = h(x)$

ومنه لما $x \geq 0$ ، يكون (C_h) منطبقا على (C_f)

ولما: $x \leq 0$ ، يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب (yy')



ج- المناقشة البيانية:

أولاً: $f(x) = m$

المعادلة تقبل حل وحيد سالب	$m < 1$	لما
المعادلة تقبل حل وحيد معدوم	$m = 1$	لما
المعادلة تقبل حل وحيد موجب	$1 < m < f(\alpha)$	لما
المعادلة تقبل حلين موجبين أحدهما: $x = \alpha$	$m = f(\alpha)$	لما
المعادلة تقبل ثلاث حلول موجبة	$m > f(\alpha)$	لما

ثانياً: $f(x) = x + m$

المعادلة لا تقبل حلول	$m \leq -1$	لما
المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة	$-1 < m < 1$	لما
المعادلة تقبل حلان هما: $x = 0, x = 2$	$m = 1$	لما
المعادلة تقبل حلان موجبان متمايزان	$m > 1$	لما

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- أولاً: حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x - \sqrt{1 + x^2}] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2x - \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2x + x \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right) \right] \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$$

- حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{2\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}}
 \end{aligned}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة البسط:لما: $x \geq 0$ لدينا:

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{1+x^2} - x &= \frac{(2\sqrt{1+x^2} - x)(2\sqrt{1+x^2} + x)}{2\sqrt{1+x^2} + x} \\
 &= \frac{4(1+x^2) - x^2}{2\sqrt{1+x^2} + x} \\
 &= \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{1+x^2} + x} > 0
 \end{aligned}$$

لما: $x \leq 0$ واضح أن $2\sqrt{1+x^2} - x > 0$

ومنه $g'(x) > 0$ أي أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

- تعيين α :

لدينا: $g(x) = 0$ أي:

$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{1+x^2} &= 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{1+x^2} \\ &\Rightarrow 4x^2 = 1+x^2 \\ &\Rightarrow 3x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \dots (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

x_2 مرفوض لأن $x \geq 0$.

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ومنه}$$

(3) استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

(1) أ- حساب نهايات الدالة f :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-2x \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(2 \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} + 1 \right) \right] = +\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - 1 \right) \right] = +\infty
\end{aligned}$$

ب- حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1 \\
&= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \\
&= \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}} \\
f'(x) &= \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$.

ج- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $g(x)$ ومنه:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$+\infty$

(2) حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x + 3x]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{1+x^2} + 2x] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(2\sqrt{1+x^2} + 2x)(2\sqrt{1+x^2} - 2x)}{2\sqrt{1+x^2} - 2x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4(x^2 + 1) - 4x^2}{2(\sqrt{1+x^2} - x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4}{2\sqrt{1+x^2} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{-x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{-x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)} \right] = 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -3x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

(3) أ- تبين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x - x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{1+x^2} - 2x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2\sqrt{1+x^2} - 2x)(2\sqrt{1+x^2} + 2x)}{2\sqrt{1+x^2} + 2x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4(x^2 + 1) - 4x^2}{2(\sqrt{1+x^2} + x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{2\sqrt{1+x^2} + x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} + x} \right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)} \right] = 0$$

ومنه المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) :

بما أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -3x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-3x)$ لما $x < 0$

$$f(x) - (-3x) = 2\sqrt{1+x^2} - x + 3x$$

$$= \frac{2}{-x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)}$$

لما $x < 0$:

$$\text{لدينا: } \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right) > 0 \text{ و } (-x) > 0$$

ومنه: إشارة الفرق موجبة

اذن: المنحني (C_f) فوق (d) .

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d') :

بما أن المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ لما $x > 0$

$$f(x) - (-3x) = 2\sqrt{1+x^2} - x - x$$

$$= \frac{2}{x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)}$$

لما $x > 0$:

$$\text{لدينا: } \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right) > 0 \text{ و } x > 0$$

ومنه: إشارة الفرق موجبة

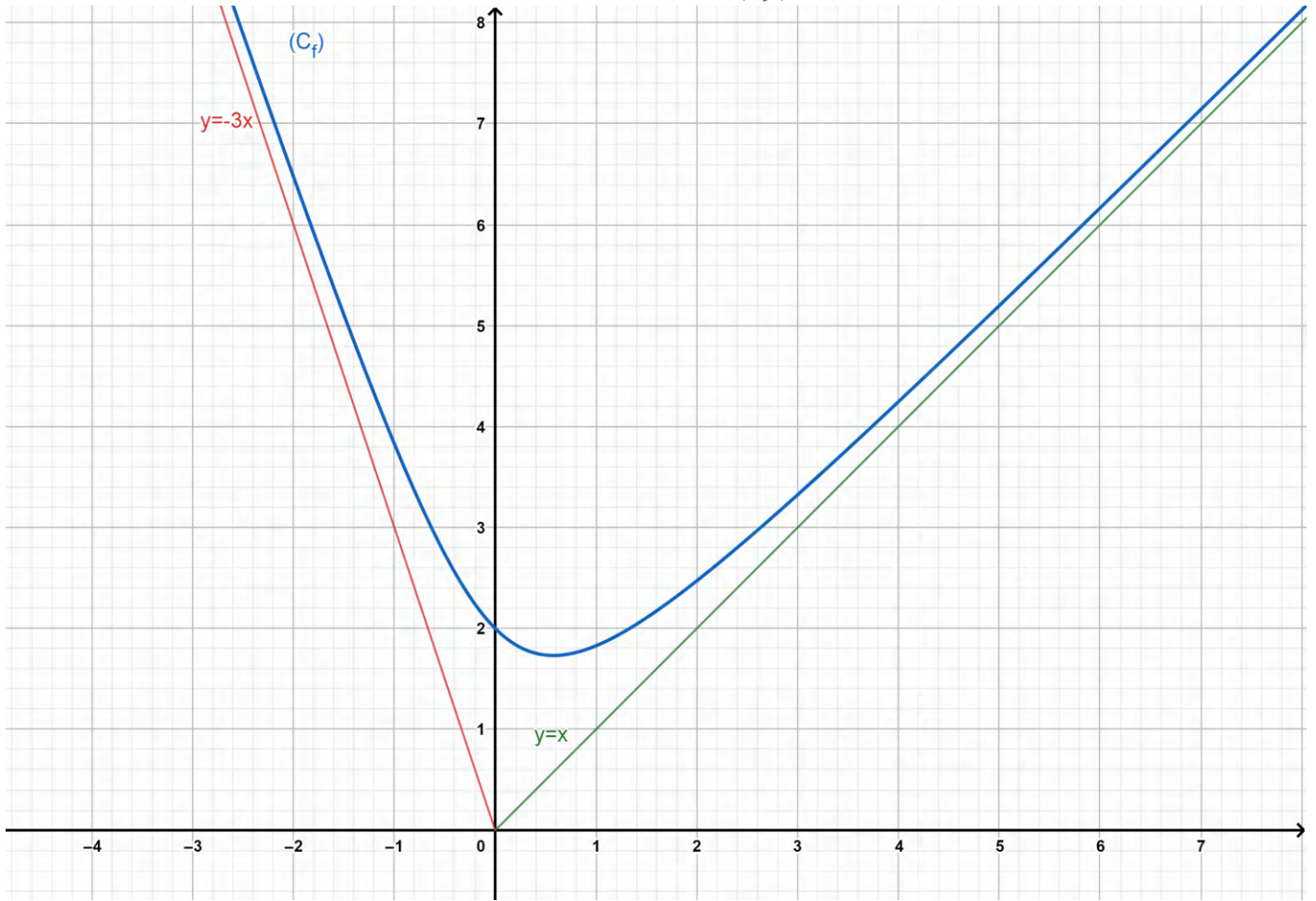
اذن: المنحني (C_f) فوق (d') .

(4) إنشاء المنحني (C_f) :

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمتين المقاربة المائلة: (d) و (d')

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



4

الدوال الأسية المسائل الشاملة

01

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x - e^{-x}$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .(2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$.ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.(2) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب/ عيّن دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ فسر النتيجة هندسياً.(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .(4) بين أن $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$ ، ثم استنتج قيمة $f(\alpha)$.(5) مثل بيانياً (C_f) .(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.(1) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.(2) انطلاقاً من (C_f) ، مثل بيانياً (C_h) .

(I) نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$$

(3) أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ عيّن $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$ - برر اجابتك.

(4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

ب/ بيّن أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

(5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

(6) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(7) بيّن أن النقطة $A(\ln 3; \ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

(8) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-2; -1]$ ، ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-2} .

(9) مثّل بيانيا كلا من: (Δ_1) ، (Δ_1) ،

(10) ناقش بيانيا حسب القيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم m المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(3x - 2)$$

عبارة $g(x)$ غير مطلوبة.

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) تحقق من أن:

$$g\left(\frac{\alpha + 2}{3}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$$

(3) استنتج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

(4) تحقق من أن معادلة المستقيم (d) تعطى بـ:

$$y = \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$$

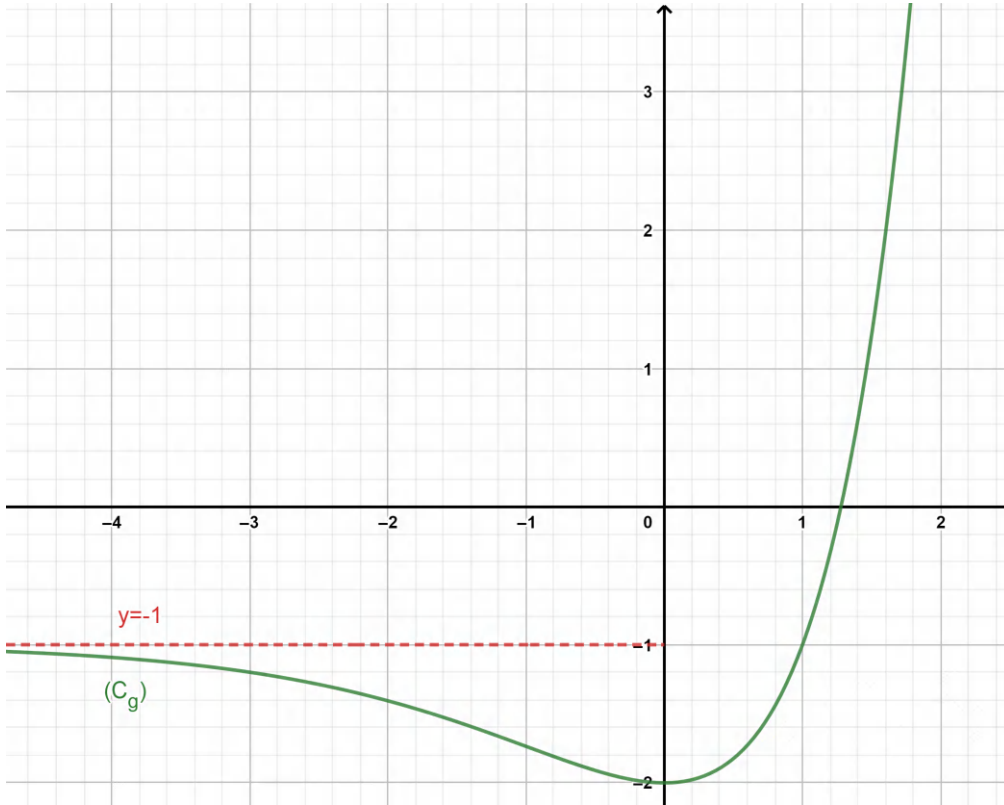
03

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل



- (I) a, b, c أعداد حقيقية، نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
- $$g(x) = (ax + b)e^x + c$$
- ونسُمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{i}; \vec{j})$. كما في الشكل أدناه:



(1) بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)]$

ب/ $g(0)$ و $g'(0)$

(2) مما سبق أوجد a, b, c .

(3) نضع: $g(x) = (x - 1)e^x - 1$

أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوى السابق.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ ثم فسّر النتيجة هندسياً .

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$.

(2) أ/ بيّن أنه من أجل كل x حقيقي:

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) عيّن دون حساب:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$$

ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(4) بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماساً وحيداً (T) يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

(5) بيّن أن $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم اوجد حصرًا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

(6) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(7) مثّل بيانياً المماس (T) والمستقيم (Δ) ثم المنحني (C_f) .

(8) m وسيط حقيقي. ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

ب/ ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) برهن أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

(3) أ/ بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

(4) بيّن أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث:

$$-2.77 < \alpha < -2.76$$

(5) مثّل بيانياً (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(4x + 1)$$

(عبارة g غير مطلوبة).

(1) ما هو اتجاه تغير الدالة g .

(2) تحقق من أن:

$$g\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g'\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$$

(3) استنتج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha - 1}{4}$.

4) تحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ:

$$y = (1 + \alpha)^2 x - \frac{(1 + \alpha)(\alpha^2 - 1)}{4}$$

(III) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسمي (C_k) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

1) بين أن الدالة k زوجية .

2) أ/ بين كيف تمثيل (C_k) انطلاقاً من (C_f) .

ب/ انطلاقاً من (C_f) ، مثل بيانياً (C_k) .

(IV) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) تحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$.

2) أ/ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب/ انطلاقاً من (C_f) ، مثل بيانياً (C_h)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
- (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.9 < \beta < -1.8$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$. ثم فسر ذلك هندسياً.

(2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) عيّن دون حساب كل من: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ و $\lim_{x \rightarrow \beta} \left[\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \right]$

ثم فسر النتيجة هندسياً.

(5) بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم أوجد حصر لـ $f(\alpha)$ سعته 10^{-1} .

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = e^x - xe^x - 1$$

- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$.

(7) نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$$

- تحقق من أن: $p(0) = 0$.

(8) أ/ بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماساً (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$.

ب/ اكتب معادلة للمماس (T) .

ج/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

(9) نأخذ: $f(\beta) \cong -1.195$.

مثّل بيانيا المستقيم (T) والمنحني (C_f) .

(10) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$$

06

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$ (1) ادرس تغيرات الدالة f' .(2) احسب $f'(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.(3) ادرس تغيرات الدالة f .(4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .(5) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها.ب/ بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث:

$$-0.6 < \beta < -0.5 \text{ و } 1.9 < \alpha < 2$$

(6) مثل بيانيا: (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) .(7) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي الموجب تماما m التالية:

$$f(x) = 2x + \ln m \dots (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = (2x + 1)e^x - 1$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g' :

(2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(3) أ/ بيّن أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = (e^x - 1)g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند المبدأ.

(5) مثّل بيانياً كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) .

(6) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x :

$$(E): f(x) = mx$$

نعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$$

ب/ استنتج أن الدالة f فردية.

(2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(3) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

ثم ادرس إشارة $f'(x)$.

ب/ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) أ/ بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x - 1 \right] = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1 \right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

(5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة : $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

(6) مثل بيانياً (C_f) .

نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$.

(2) أ/ بيّن أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب/ حل المعادلة: $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بيّن أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4]$ وتحت على المجال $[2 + \ln 4; +\infty[$.

(3) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2; 2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

(5) اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$.

(6) مثّل بيانياً (Δ) والمنحني (C_f) .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x + 2$$

- (1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.
 (2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ - ثم تحقق أن $-2.2 < \alpha < -2.1$
 ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
 (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1 - xe^x}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

(3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) .

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) .

(5) أ/ بيّن أن: $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب/ بيّن أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$.

(6) مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .

(7) ليكن m عدد حقيقي موجب تماما، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$1 - (x + \ln x)e^x - \ln m = 0$$

(I) لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق العلاقة:

$$g(x) - 2g(1-x) = e^x - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

(1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (ارشاد: ضع $t = x$ تارة و $t = 1-x$ تارة أخرى)

(2) نضع: $g(x) = e^x - x - 1$ حيث: $D_g = \mathbb{R}$

أ/ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = 1 - g(-x)$$

(4) اثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث:

$$-1.14 < \alpha < -1.15 \quad \text{و} \quad 1.84 < \beta < 1.85$$

(5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) أ/ اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن:

$$f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(1 + g(x))^2}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) مثل بيانيا (C_f) .

لتكن الدالة f بـ:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

ونسُمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$. ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$$

ج/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x]$. ثم فسر النتيجة هندسياً.

(3) اثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على مجال تعريفها.

(4) بين أن النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

(5) عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A .

(6) نعتبر الدالة g المعرفة على D_f كما يلي:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

أ/ حل العبارة: $e^{2x} - 2e^x + 1$.

ب/ احسب $g'(x)$ و $g(0)$ ثم ادرس تغيرات الدالة g .

ج/ استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) .

(7) مثل بيانياً (T) و (C_f) .

4

الدوال الأسية حُلُول المسائل الشاملة

01

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^{-x} \left(\frac{x}{e^{-x}} - 1 \right) \right] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - e^{-x}] = +\infty \end{aligned}$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 + e^{-x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$:لدينا الدالة g مستمرة ومنتزعة على $\mathbb{R}$ ولدينا $g(0.6) = 0.05$ و $g(0.5) = -0.1$ ولدينا $g(0.6) \times g(0.5) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α ب- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x+1}{e^x+1} \right] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+1}{e^x+1} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right]$$

$$= 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0$

- التفسير الهندسي:

▪ (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$

(2) أ- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - e^x(x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{-e^x(-e^{-x} + x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب- تعيين دون حساب قيمة $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$:

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha)$$

$$= \frac{-e^\alpha g(\alpha)}{(e^\alpha + 1)^2}$$

$$= 0$$

- تفسير الهندسي:

منحني الدالة f يقبل مماس في النقطة ذات الفاصلة α مواز لحامل محور الفواصل معادلته هي:

$$y = f(\alpha)$$

(3) جدول تغيرات الدالة f :

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

لدينا المقام موجب تماما ومنه الإشارة من إشارة البسط

- جدول التغيرات:

لدينا $f(-1) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$-e^x$	-	-	-	-
$g(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$				

(4) تبين أن المعادلة $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$:

لتبين أن $f(x) = x$

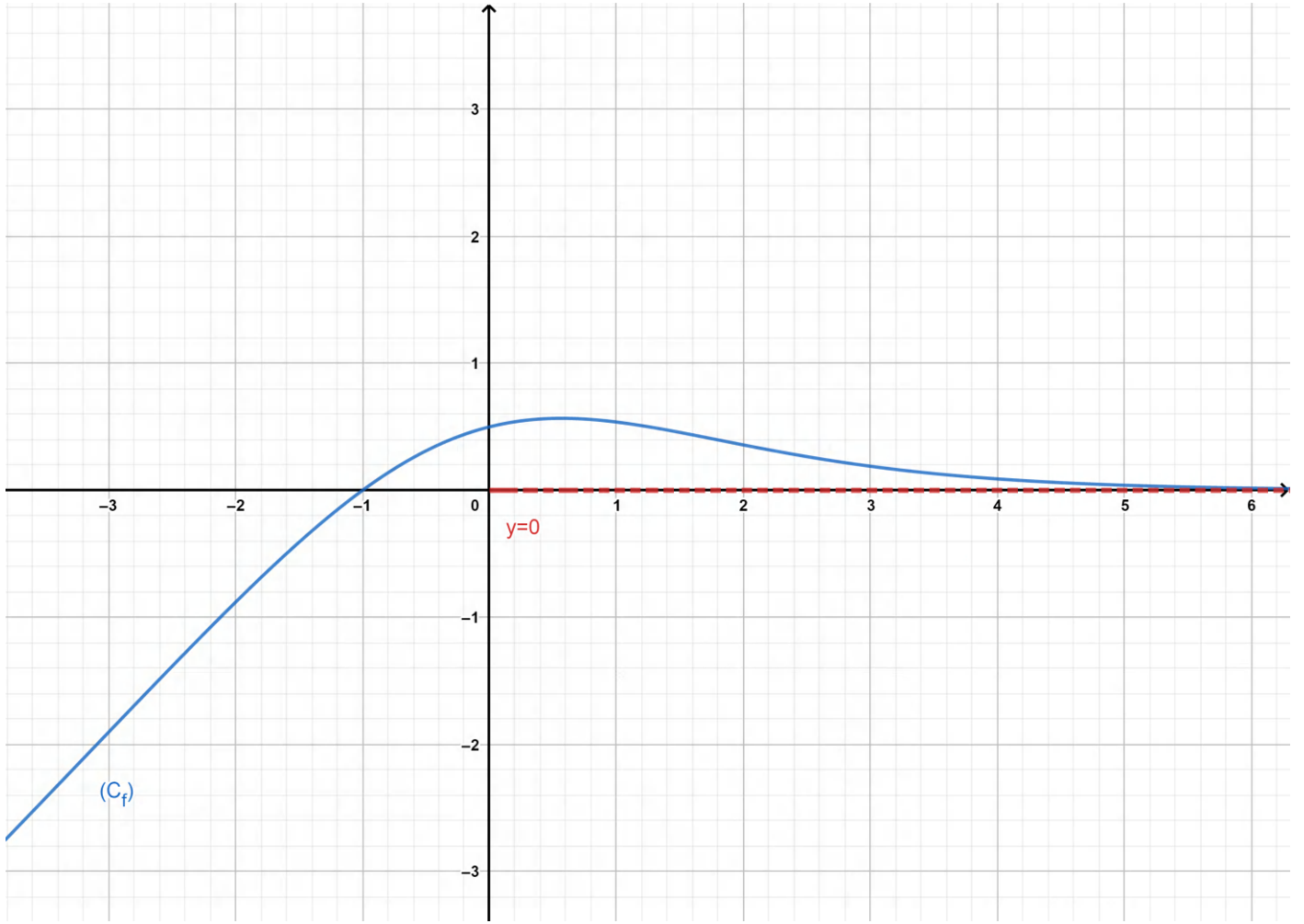
يكفي أن نثبت أن: $f(x) - x = 0$

$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \frac{x+1}{e^x+1} - x \\
 &= \frac{x+1 - xe^x - x}{e^x+1} \\
 &= \frac{1 - xe^x}{e^x+1} \\
 &= \frac{e^x(e^{-x} - x)}{e^x+1} \\
 &= \frac{-e^x(x - e^{-x})}{e^x+1} \\
 &= \frac{-e^x g(x)}{e^x+1} \\
 &= \frac{0}{e^x+1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

استنتاج قيمة $f(\alpha)$:

لدينا $f(x) = x$ ومنه $f(\alpha) = \alpha$

(5) التمثيل البياني:



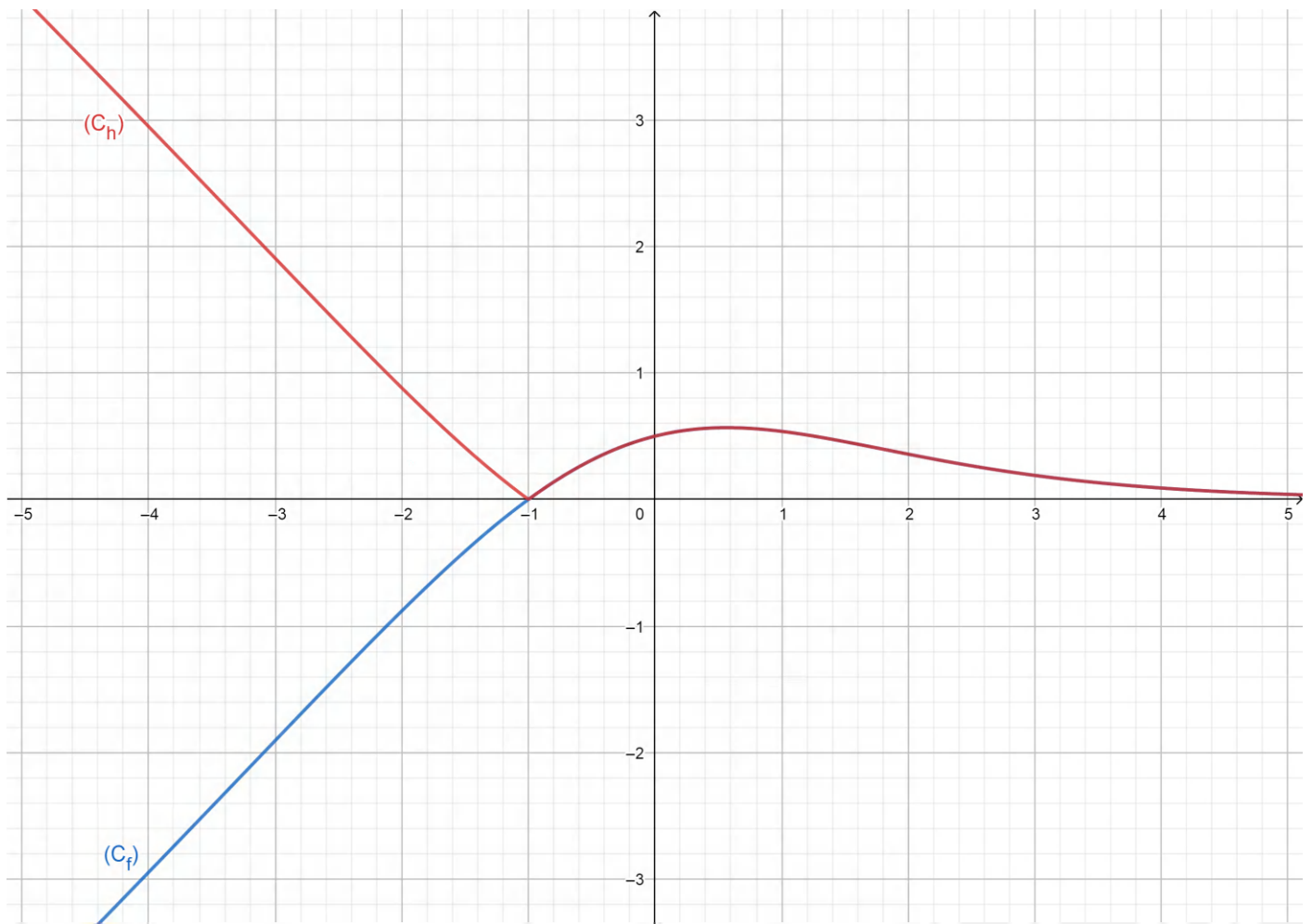
(III)

1 كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= |f(x)| \\
 &= \left| \frac{x+1}{e^x + 1} \right| \\
 &= \frac{|x+1|}{e^x + 1} \\
 &= \begin{cases} \frac{x+1}{e^x + 1}; & x \geq -1 \\ \frac{-x-1}{e^x + 1}; & x \leq -1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f(x); & x \geq -1 \\ -f(x); & x \leq -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

2 تمثيل (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \geq 0$ ويناطر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$



02

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

(1) حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] = -\infty$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x - 2e^x + 3x + 6}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x \left(x - 2 + \frac{3x + 6}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x} \right)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x - 2 + \frac{3x + 6}{e^x}}{1 + \frac{3}{e^x}} \right] = +\infty \end{aligned}$$

(2) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4e^x(e^x + 3) - e^x(4e^x)}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x + 3)^2 + 12e^x}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} \\ &= \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2 \end{aligned}$$

(3) أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:لدينا $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3$$

$$\Rightarrow x = \ln 3$$

ومنه $f'(x)$ تنعدم عند $\ln 3$ ولا تغير اشارتها

ومنه

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$

ب/ تعيين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$:

عندما تنعدم المشتقة الاولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية

$$f''(\ln 3) = 0$$

4 / تبين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y_1 = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{4e^x}{e^x + 3} \right]$$

$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_1) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب/ تبين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y_2 = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{12}{e^x + 3} \right]$$

$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_2) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

5 / دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) :

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_1) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_1]$ لدينا:

$$f(x) - y_1 = \frac{-4e^x}{e^x + 3}$$

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة $(-4e^x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y_1$	-	
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_2) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_2]$ لدينا:

$$f(x) - y_2 = 4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} = \frac{12}{e^x + 3} > 0$$

ومنه

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$	+	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	

(6) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ &= \left(\frac{e^0 - 3}{e^0 + 3} \right)^2 (x) + 0 + 2 - \frac{4e^0}{e^0 + 3} \\ &= \frac{1}{4}x + 1 \end{aligned}$$

(7) تبين أن النقطة $A(\ln 3; \ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

- نبين أن $(\ln 3 + x) \in D_f$ و $(\ln 3 - x) \in D_f$:

لدينا: $x \in D_f$ معناه $x \in]-\infty; +\infty[$

ومنه $(\ln 3 + x) \in]-\infty; +\infty[$ و $(\ln 3 - x) \in]-\infty; +\infty[$

- نبين أن $f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) = 2 \ln 3$

$$\begin{aligned} f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) &= \left(\ln 3 + x + 2 - \frac{4e^{\ln 3 + x}}{e^{\ln 3 + x} + 3} \right) + \left(\ln 3 - x + 2 - \frac{4e^{\ln 3 - x}}{e^{\ln 3 - x} + 3} \right) \\ &= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4e^{\ln 3 + x}}{e^{\ln 3 + x} + 3} + \frac{4e^{\ln 3 - x}}{e^{\ln 3 - x} + 3} \right) \\ &= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{12e^x}{3e^x + 3} + \frac{12e^{-x}}{3e^{-x} + 3} \right) \\ &= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4e^x}{e^x + 1} + \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} \right) \\ &= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4 + 4e^x + 4 + 4e^{-x}}{1 + e^x + e^{-x} + 1} \right) \end{aligned}$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{8}{2}\right)$$

$$= 2 \ln 3$$

(8) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(-1) = 0.56$ و $f(-2) = -0.17$ ولدينا $f(-1) \times f(-2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-2; -1[$

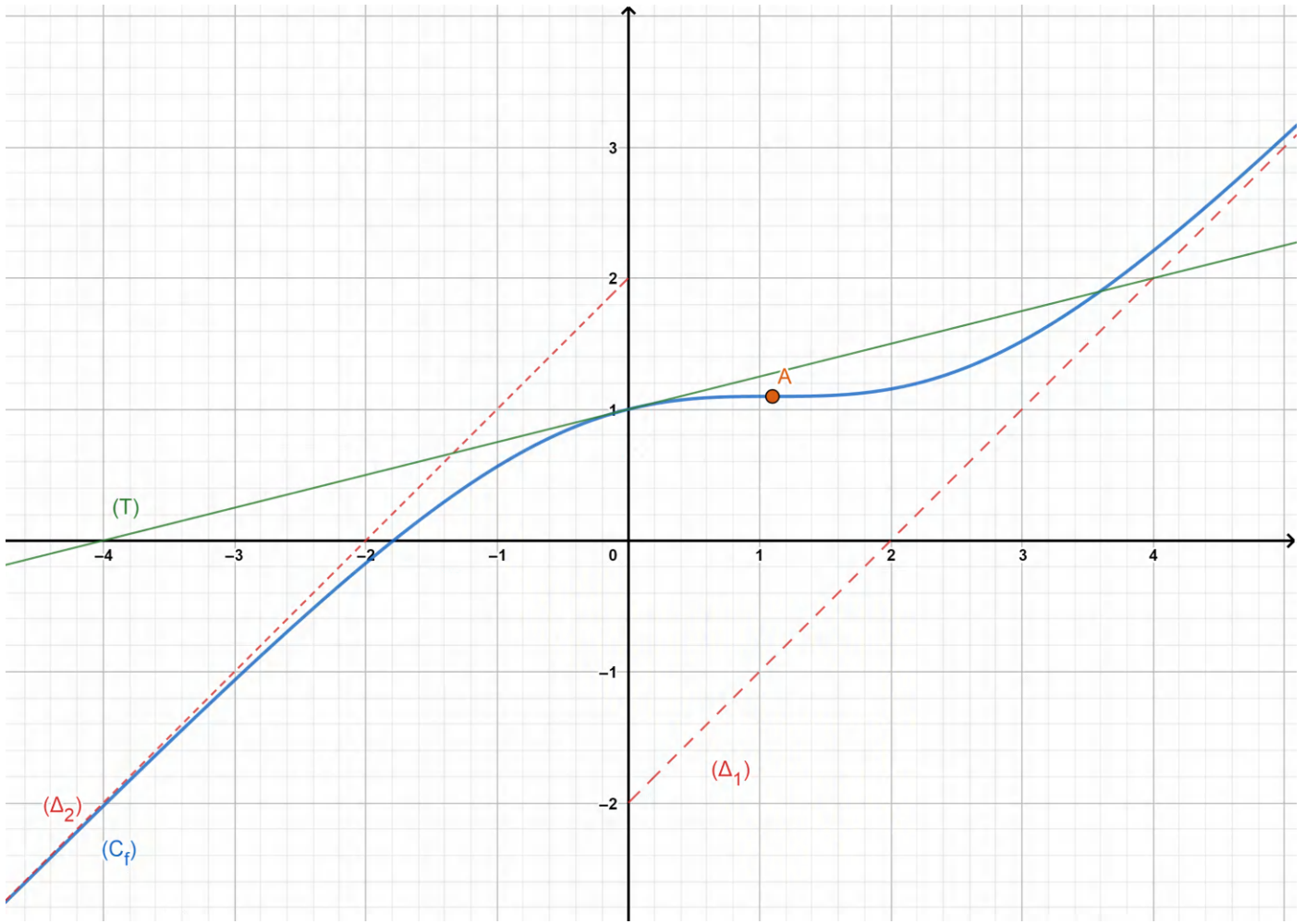
- حصر α :

α	-2	-1.9	-1.8	-1.7	...	-1
$f(\alpha)$	-0.17	-0.09	-0.09	0.07	...	0.56

(9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمت المقاربة المائلة : $y = x + 2$ و $y = x - 2$
- نعين نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(10) المناقشة البيانية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

$$h(x) = f(-|x|)$$

ومنه:

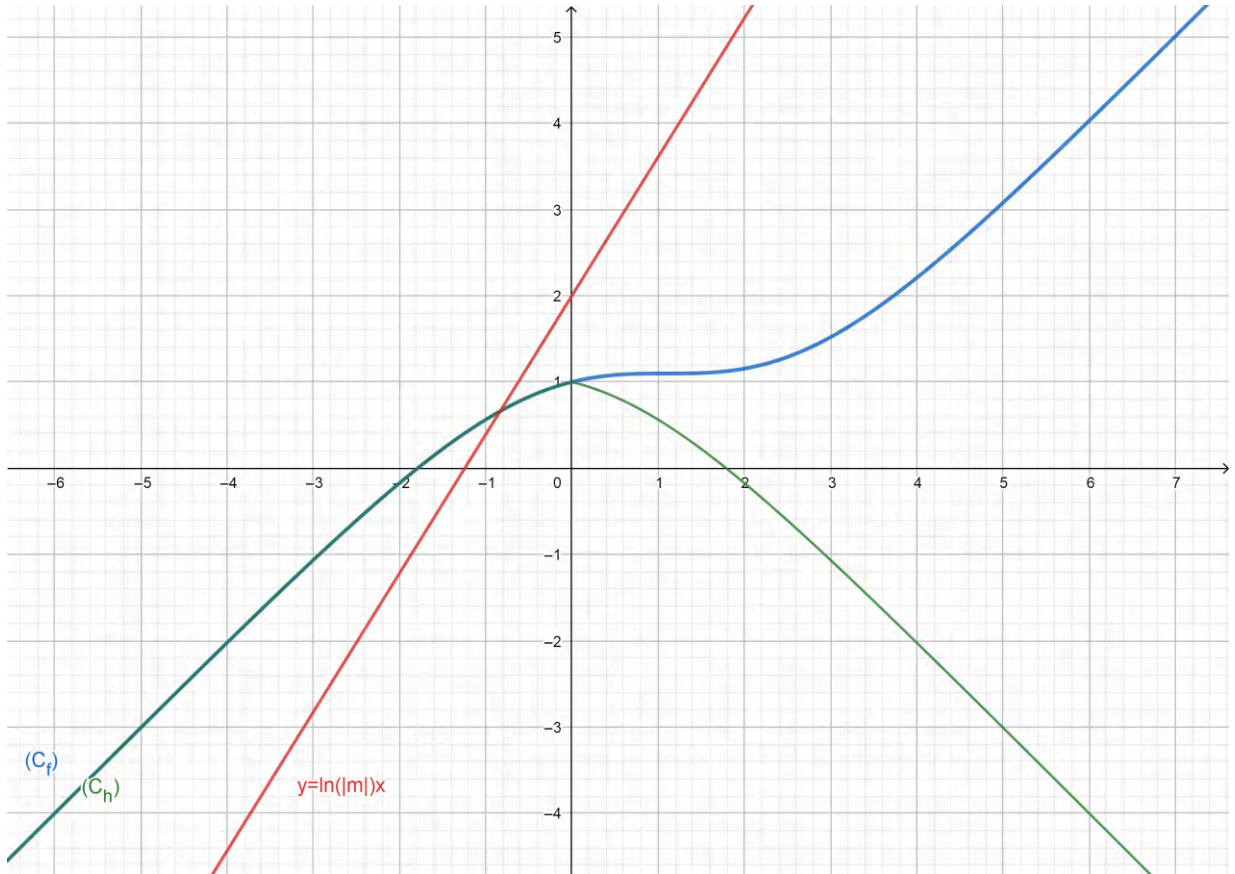
$$h(x) = \begin{cases} f(-x); & x \geq 0 \\ f(-(-x)); & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} f(-x); & x \geq 0 \\ f(x); & x \leq 0 \end{cases}$$

لما $x \leq 0$ المنحني (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما $x \geq 0$ المنحني (C_h) يناظر المنحني العكسي لـ (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.

ومنه تمثيل (C_h) كالآتي:

المنحني (C_f) والمنحني (C_h) والمستقيم $y = \ln|m| x$



ومنه المناقشة كالآتي:

المعادلة تقبل حلا وحيدا لما:

$$\ln|m| > -1$$

أي:

$$|m| > e$$

أي:

$$m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$$

المعادلة تقبل حلا وحيدا لما:

$$\ln|m| < -1$$

أي:

$$|m| < e^{-1}$$

أي:

$$-e^{-1} < m < e^{-1}$$

أي:

$$m \in]-e^{-1}; e^{-1}[$$

المعادلة لا تقبل حولا لما:

$$-1 \leq \ln|m| \leq 1$$

أي:

$$\ln|m| \geq -1 \text{ و } \ln|m| \leq 1$$

أي:

$$|m| \geq e^{-1} \text{ و } |m| \leq e$$

أي:

$$m \in]-e; e[$$

و

$$m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[$$

أي:

$$m \in \left(\begin{array}{c}]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[\\ \cap \\]-e; e[\end{array} \right)$$

أي:

$$m \in]-e; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; e[$$

لما: $1 \leq \ln|m| < e$: أي: $|m| \leq e$: أي: $-e \leq m \leq e$ أي لما: $m \in [-e; e]$ المعادلة لا تقبل حلول
لما: $\ln|m| > 1$: أي: $|m| > e$: أي: $m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيدا
(II)

(1) دراسة تغيرات الدالة g .

نلاحظ أن $g(x) = (f \circ k)(x)$ حيث $k(x) = 3x - 2$

(2) التحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$:

$$g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = f\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = f(\alpha) = 0$$

- تبين أن $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x) = 3f'(3x - 2)$ ومنه:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = 3f'(\alpha)$$

(3) استنتاج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$:

$$\begin{aligned}(d): y &= g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + 0 \\ &= 3f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha+2)\end{aligned}$$

(4) التحقق من معادلة المماس (d) :

لدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha + 2 - \frac{4e^\alpha}{e^\alpha + 3} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4e^\alpha}{e^\alpha + 3} \\ &\Rightarrow (\alpha + 2)(e^\alpha + 3) - 4e^\alpha = 0 \\ &\Rightarrow ae^\alpha + 3a + 2e^\alpha + 6 - 4e^\alpha = 0 \\ &\Rightarrow e^\alpha(a - 2) = -(3a + 6) \\ &\Rightarrow e^\alpha = \frac{3a + 6}{2 - a}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$(d): y = 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \left(\frac{e^\alpha - 3}{e^\alpha + 3} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
&= 3 \left(\frac{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} - 3}{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} + 3} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
&= 3 \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
&= \frac{3\alpha^2}{4} x - \frac{\alpha^2(\alpha + 2)}{4}
\end{aligned}$$

03

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

(1) من البيان نجد:

/أ

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -1$$

ب-

$$\bullet g'(0) = 0$$

$$\bullet g(0) = -2$$

(2) ايجاد a, b, c :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0) = -2 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a(0) + b)e^0 + c = -2 \\ (a(0) + a + b)e^0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [(ax + b)e^x + c] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ a + b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

(3) /أ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

$$\text{ولدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .- التحقق من أن $1.2 < \alpha < 1.3$:

$$\text{لدينا: } g(1.3) = 0.1 \text{ و } g(1.2) = -0.3$$

$$\text{ولدينا: } g(1.3) \times g(1.2) < 0$$

$$\text{ومنه: } 1.2 < \alpha < 1.3.$$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

(1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{x}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0$ (نهاية شهيرة)

- التفسير الهندسي: المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right] = -\infty$$

(2) أ/ تبين أنه من أجل كل x حقيقي: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(1 - x)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-((x - 1)e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(0) = 0$

ولدينا: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2} < 0$ ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة $g(x)$.

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$				

(3) تعيين $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ دون حساب:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha) = \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha + 1)^2} = 0$$

- تفسير الهندسي:

المنحني (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة α مواز لحامل محور الفواصل.

4) تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماساً وحيداً (T) يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من $O(0; 0)$ معناه:

$$f'(a)(0 - a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow a \frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a + 1)^2} + \frac{a}{e^a + 1} = 0$$

$$\Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 e^a = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{-g(0)}{(e^0 + 1)^2} x + \frac{0}{e^0 + 1}$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

5) تبين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$:

مما سبق لدينا

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)e^\alpha = 1$$

$$\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\alpha} \\ &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$1.2 < \alpha < 1.3$$

$$0.2 < \alpha - 1 < 0.3$$

$$0.2 < f(\alpha) < 0.3$$

6) أ/ تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-xe^x}{e^x + 1} \right] = 0\end{aligned}$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x) - y]$

$$\begin{aligned}f(x) - y &= \frac{x}{e^x + 1} - x \\ &= \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} \\ &= \frac{-xe^x}{e^x + 1}\end{aligned}$$

لدينا $e^x + 1 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه الإشارة من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

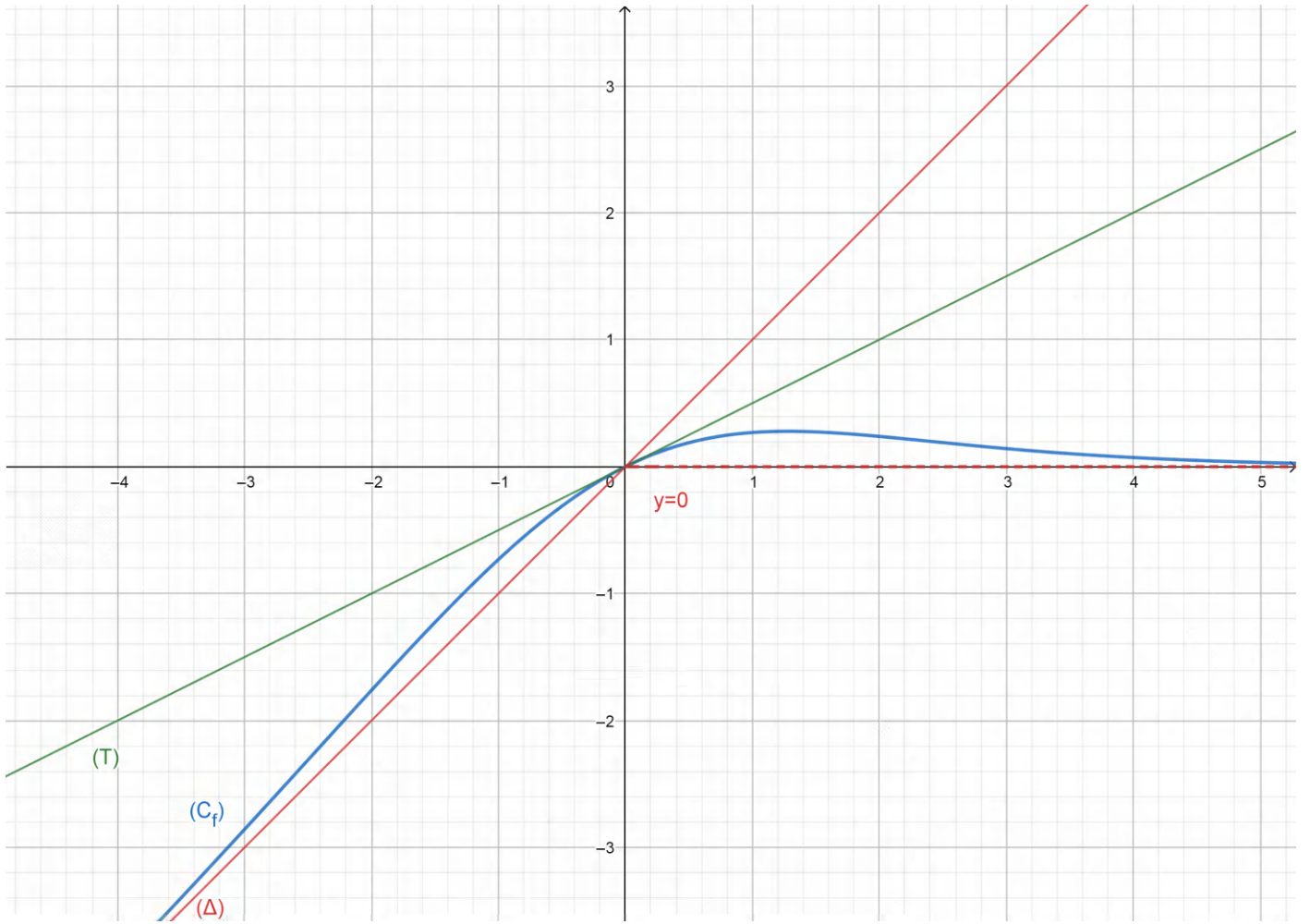
الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) في المجال: $] - \infty; 0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0
- (C_f) تحت (Δ) في المجال: $]0; +\infty[$

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب $y = 0$ و المستقيم المقارب المائل (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(8) المناقشة البيانية:

لما	$m < 0$	المعادلة تقبل حل وحيد سالب
لما	$m = 0$	المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
لما	$0 < m < \alpha$	المعادلة تقبل حلين موجبين
لما	$m = \alpha$	المعادلة تقبل حل مضاعف موجب
لما	$m > \alpha$	المعادلة لا تقبل حلولاً

(I)

(1) أ/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 4e^x}{(e^x+1)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2} \\
 &= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \\
 &= \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2
 \end{aligned}$$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما.لدينا $f'(0) = 0$ أي المشتقة تنعدم ولا تغير إشارتهاومنه نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف.ج/ جدول تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right] \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{\frac{4}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

(2) برهان أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) :

◀ شاهد هذا التذكير ▶

(اثبات ان نقطة مركز تناظر)

- نثبت أن: $(2(0) - x) \in D_f$:

لدينا $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-x) \in \mathbb{R}$

- نثبت أن: $f(2(0) - x) + f(x) = 2(1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(2(0) - x) + f(x) &= -x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1} + x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \\
 &= -2 + \frac{4}{e^{-x} + 1} + \frac{4}{e^x + 1} \\
 &= \frac{-2(e^{-x} + 1)(e^x + 1) + 4(e^x + 1) + 4(e^{-x} + 1)}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
 &= \frac{2[2(e^x + 1) + 2(e^{-x} + 1) - (e^{-x} + 1)(e^x + 1)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
 &= \frac{2[2(e^x + e^{-x} + 2) - (e^x + e^{-x} + 2)]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
 &= \frac{2[e^x + e^{-x} + 2]}{(e^{-x} + 1)(e^x + 1)} \\
 &= \frac{2[e^x + e^{-x} + 2]}{e^x + e^{-x} + 2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

ومنه النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

(3) / تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x + 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{e^x + 1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} \right] = 0
\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x - 1$.

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-1 + \frac{4}{e^x + 1} \right] \\
&= 3
\end{aligned}$$

الاستنتاج:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 3 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] - 3 = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 3] = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

◀ ملاحظة: أمكننا إدخال 3 داخل النهاية لأنها لا تتعلق بالمتغير x ▶

(4) تبين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

$$f(-2.77) = -0.3 \quad \text{و} \quad f(-2.76) = 0.001 \quad \text{ولدينا:}$$

$$f(-2.77) \times f(-2.76) < 0 \quad \text{ولدينا:}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

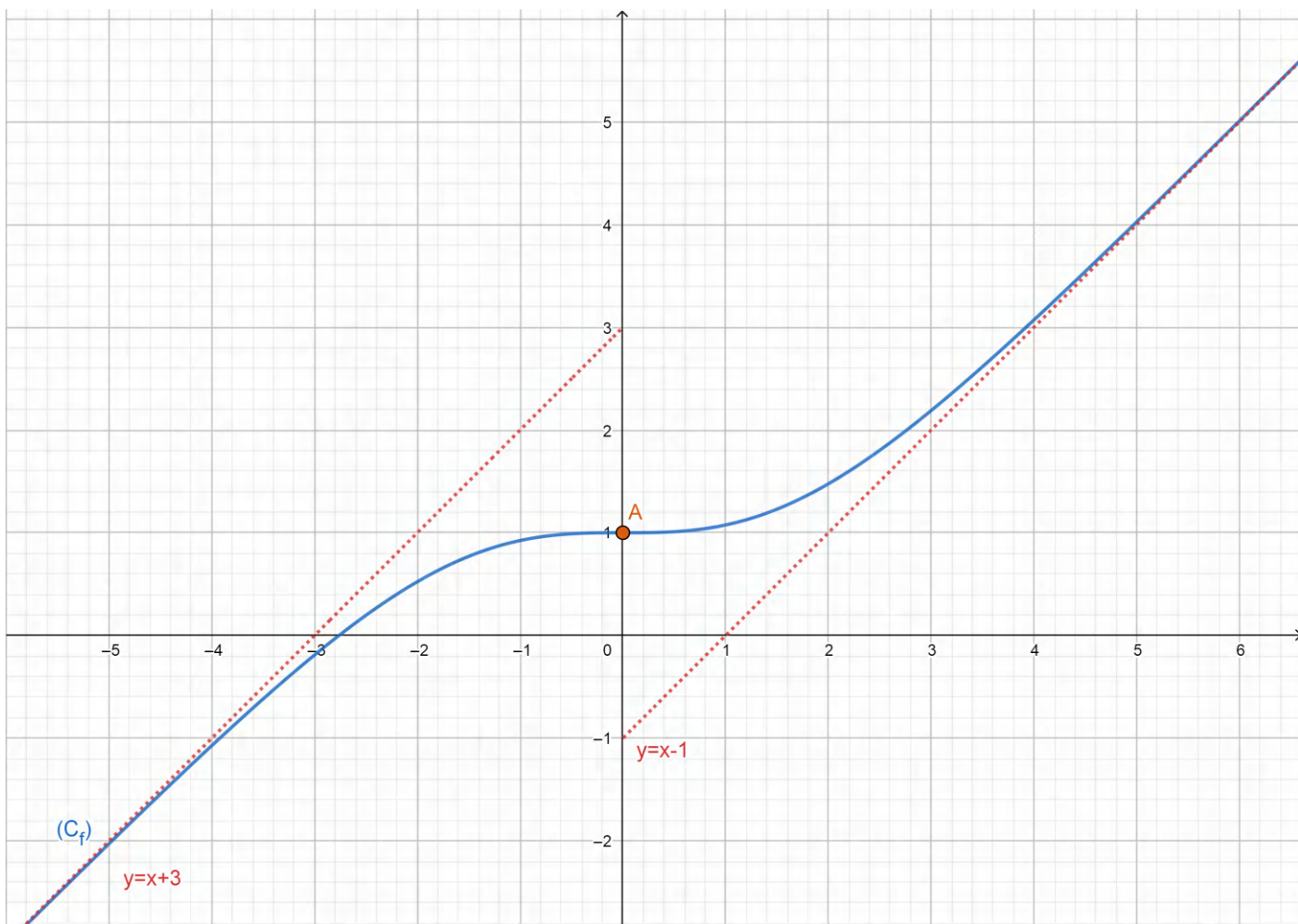
(5) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمتين المقاربة المائلة: $(y = x - 1)$ و $(y = x + 3)$

• نعين A نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II)

1) اتجاه تغير الدالة g :

نلاحظ أن $g(x) = (f \circ \varphi)(x)$ حيث: $\varphi(x) = 4x + 1$

لدينا الدالة φ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

والدالة f متزايدة تماما أيضا على $\mathbb{R}$ (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 0$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) &= f\left(4 \cdot \frac{\alpha-1}{4} + 1\right) \\ &= f(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

تبين أن: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$

لدينا: $g'(x) = 4f'(4x + 1)$ ومنه :

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) &= 4f'\left(4 \cdot \frac{\alpha-1}{4} + 1\right) \\ &= 4f'(\alpha) \end{aligned}$$

f دالة معرفة على مجال I
و g دالة معرفة على المجال (I)
• إذا كانت الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متزايدة على I
• إذا كانت الدالتين f و g متعاكستان في اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متناقصة على I

(3) استنتاج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$:

$$\begin{aligned}(T): y &= g' \left(\frac{\alpha-1}{4} \right) \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right) + g \left(\frac{\alpha-1}{4} \right) \\ &= 4f'(\alpha) \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right) + 0 \\ &= 4f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha-1)\end{aligned}$$

(4) التحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ: $y = (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$

لدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha - 1 + \frac{4}{e^\alpha + 1} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{4}{e^\alpha + 1} = 1 - \alpha \\ &\Rightarrow e^\alpha = \frac{3 + \alpha}{1 - \alpha}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}(T): y &= 4 \left(\frac{\frac{3+\alpha}{1-\alpha} - 1}{\frac{3+\alpha}{1-\alpha} + 1} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right) \\ &= 4 \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha-1}{4} \right) \\ &= (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)}{4} \\ &= (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)}{4} \\ &= (\alpha+1)^2x - \frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}\end{aligned}$$

(III)

(1) تبين أن الدالة k زوجية:

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$k(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

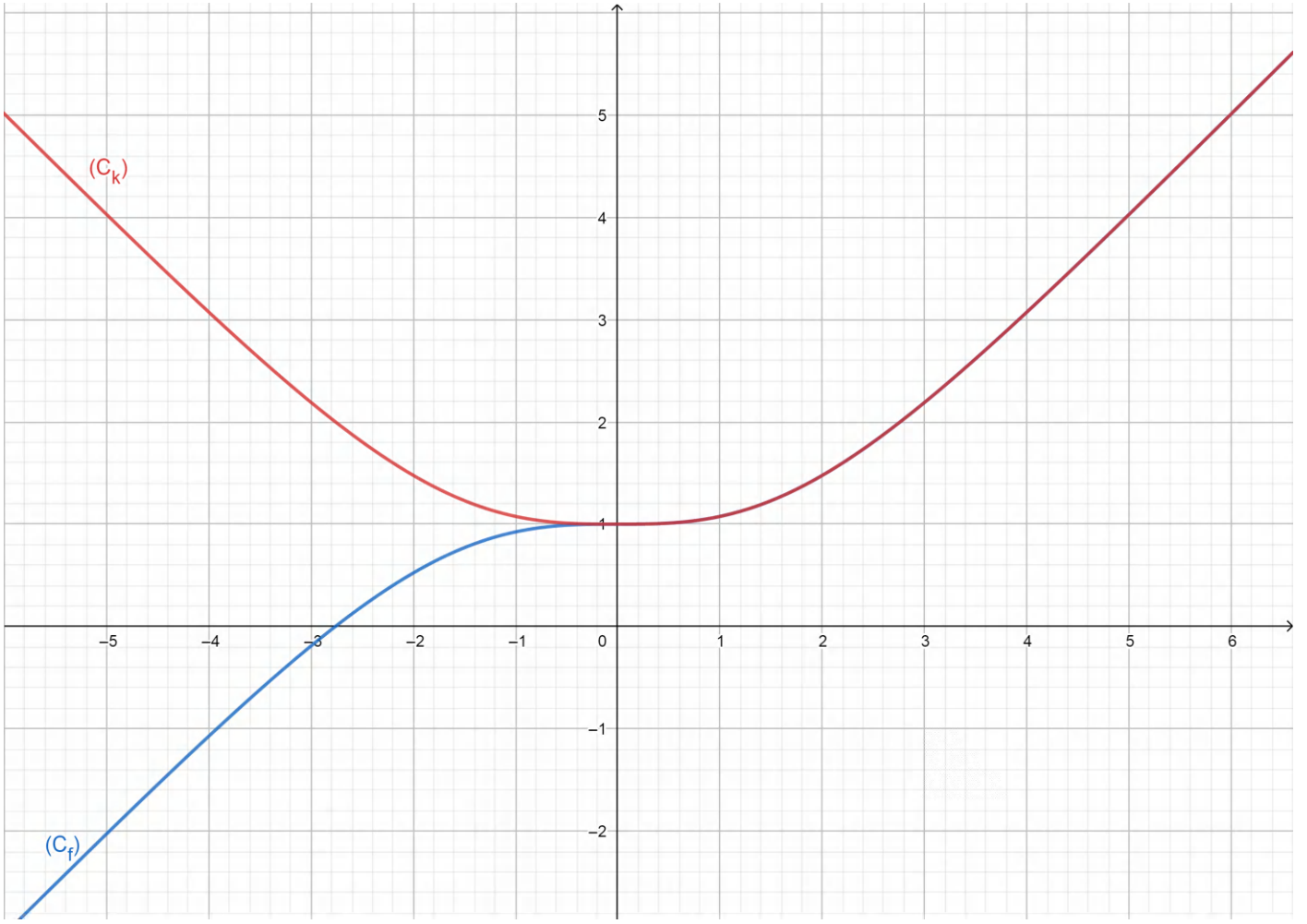
ومنه الدالة k زوجية.

(2) / تبين كيفية تمثيل (C_k) انطلاقاً من (C_f) :

لما $x \geq 0$: (C_k) ينطبق على (C_f)

ولما $x \leq 0$: (C_k) يناظر (C_f) بالنسبة لحامل محور الترتيب (yy')

ب/ التمثيل البياني لـ (C_k) :



(IV)

1) التحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$:

$$\begin{aligned} f(x) + 1 &= x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} + 1 \\ &= x + \frac{4}{e^x + 1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

2) أ/ استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه:

لدينا: $h(x) = f(x) + 1$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}(0; 1)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :



05

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + 2 - e^x] \\ = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 2 - e^x] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1 \right) \right] \\ = -\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0 \text{ (نهاية شهيرة)}$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 - e^x$$

لدينا:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0 \\ \Rightarrow e^x = 1 \\ \Rightarrow x = \ln 1 \\ \Rightarrow x = 0$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β :لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

$$\text{ولدينا: } g(1.15) = -0.008 \quad \text{و} \quad g(1.14) = 0.01$$

$$\text{ولدينا: } g(1.14) \times g(1.15) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]1.14; 1.15[$:

$$\text{ولدينا: } g(-1.8) = 0.03 \quad \text{و} \quad g(-1.9) = -0.04$$

$$\text{ولدينا: } g(-1.9) \times g(-1.8) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد β في المجال $] -1.9; -1.8[$:

(3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	β	α	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(II)

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \right] = -1$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0 \text{ (نهاية شهيرة)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - \frac{1}{e^x}}{x + \frac{1}{e^x}} \right] = 0$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$.

(2) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^{2x} + 2e^x + xe^x}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2} \end{aligned}$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $e^x > 0$ و $(xe^x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$
ولدينا : $f(0) = 0$ ومنه جدول التغيرات كالآتي:

x	$-\infty$	β	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	-1	$f(\beta)$	0	$f(\alpha)$	0

(4) تعيين دون حساب كل من : $\lim_{x \rightarrow \beta} \left[\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \right]$ و $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$

- $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \beta} \left[\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \right] = f'(\beta) = 0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين α و β .

(5) تبين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha + 2 - e^\alpha$$

$$\Rightarrow e^\alpha = \alpha + 2$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$$

$$= \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1}$$

$$= \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$$

$$= \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha + 1}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$1.14 < \alpha < 1.15$$

$$1.14 + 1 < \alpha + 1 < 1.15 + 1$$

$$\frac{1}{2.15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2.14}$$

ومنه:

$$0.46 < f(\alpha) < 0.46$$

(6) تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$:

$$h(0) = 0$$

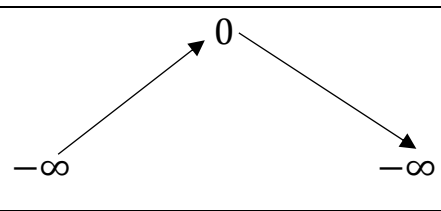
ولدينا:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - xe^x - 1] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - x - \frac{1}{e^x} \right) \right] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - xe^x - 1] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ولدينا:

$$h'(x) = -xe^x$$

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

من جدول التغيرات نجد أعلى قيمة تأخذها الدالة h هي 0

ومنه $h(x) \leq 0$.

(7) التحقق من أن: $p(0) = 0$:

$$p(0) = 1 - 2 + 1 = 0$$

(8) - تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$:

يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(a) \times -1 &= -1 \Rightarrow f'(a) = 1 \\ &\Rightarrow \frac{e^a(a + 2 - e^a)}{(ae^a + 1)^2} = 1 \\ &\Rightarrow e^a(a + 2 - e^a) = (ae^a + 1)^2 \\ &\Rightarrow (ae^a + 1)^2 - e^a(a + 2 - e^a) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a^2 e^{2a} + 1 + 2ae^a + e^{2a} - 2e^a - ae^a = 0 \\ &\Rightarrow (a^2 + 1)e^{2a} + (a - 2)e^a + 1 = 0 \\ &\Rightarrow p(a) = 0 \\ &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

المعادلة تقبل حل، ومنه المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$

ب- كتابة معادلة للمماس (T) :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ &= x + f(0) \\ &= x \end{aligned}$$

ج- دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} \\ &= \frac{e^x(1 - x^2) - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{e^x(1 - x)(1 + x) - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)h(x)}{xe^x + 1} \end{aligned}$$

لدينا: $h(x) \leq 0$

ولدينا:

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$1 + x$	$-$	0	$+$

- ندرس إشارة $(xe^x + 1)$:

نضع $\varphi(x) = xe^x + 1$

$$\varphi'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

$e^x > 0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة $(1 + x)$

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

- جدول تغيرات $\varphi(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	1	0.6	$+\infty$

من جدول تغيرات $\varphi(x)$ نلاحظ أن $\varphi(x) > 0$ ومنه:

اذن إشارة الفرق $f(x) - y$ كالآتي

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$	$-$		$-$
$1 + x$	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (T) لما $x \in]-\infty; -1[$
- (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(-1; -1)$
- (C_f) تحت (T) لما $x \in]-1; +\infty[$

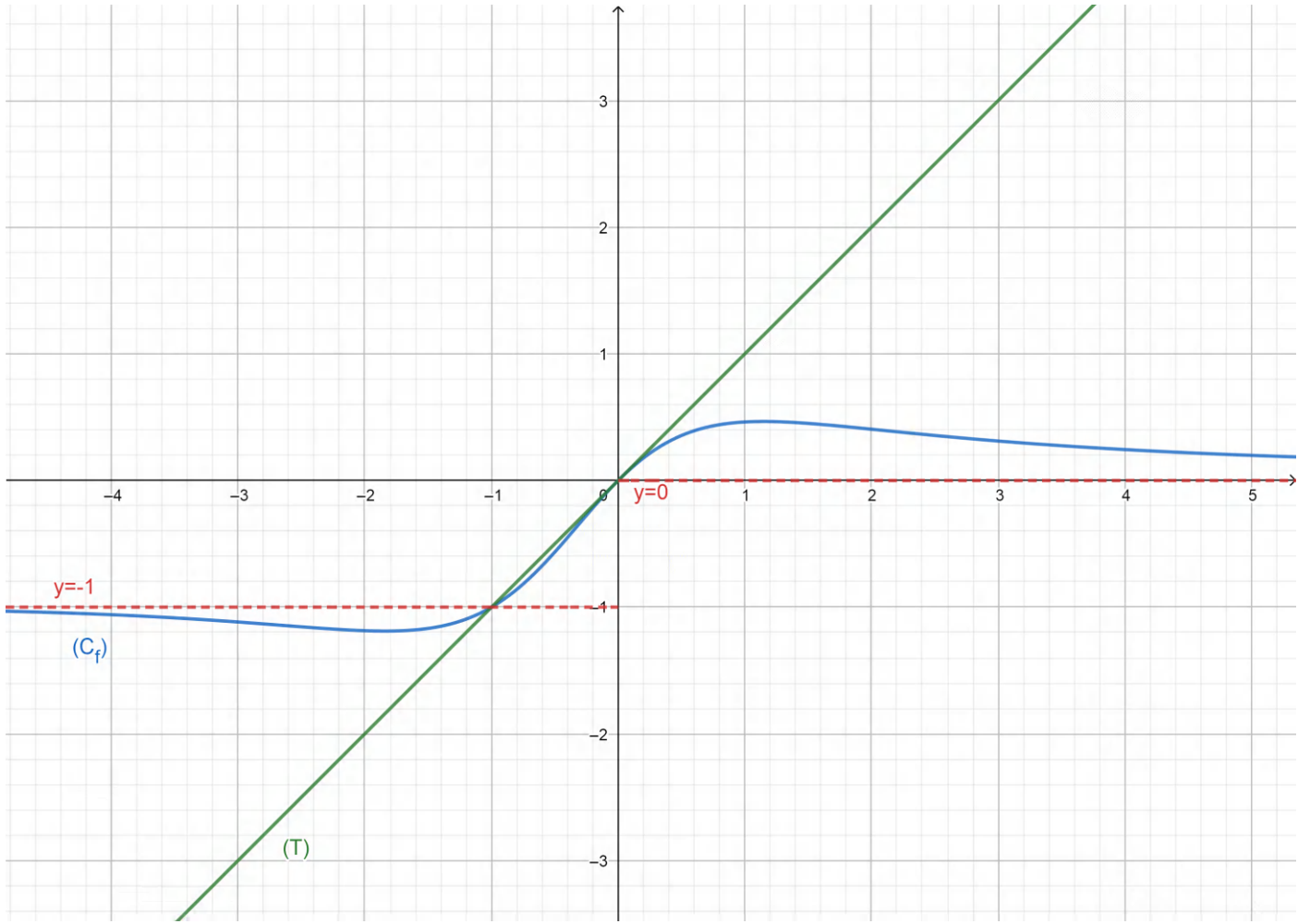
- الاستنتاج:

المماس (T) يقطع المنحني (C_f) في النقطة $A(-1; -1)$ معناه توجد نقطة انعطاف

9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $(y = -1)$ و $(y = 0)$
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(10) المناقشة البيانية:

$$\begin{aligned}
 e^x(1 - mx^2) + mx - 1 &= 0 \Rightarrow e^x - mx^2e^x + mx - 1 = 0 \\
 &\Rightarrow mx(1 - xe^x) = 1 - e^x \\
 &\Rightarrow mx = \frac{1 - e^x}{1 - xe^x} \\
 &\Rightarrow \frac{e^x - 1}{xe^x - 1} = mx \\
 &\Rightarrow f(x) = mx
 \end{aligned}$$

مجموعة حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $f(x) = mx$ ومنه:

لما $m = 1$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا $x = 0$ وحلا سالبا
لما $0 < m < 1$	المعادلة تقبل ثلاث حلول
لما $m \leq 0$	المعادلة تقبل حلا معدوما
لما $m > 1$	المعادلة تقبل حلا معدوما

06

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) دراسة تغيرات الدالة f' :

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - e^{x-1} - xe^{x-1} \\ &= 2 - (1+x)e^{x-1} \end{aligned}$$

ومنه ندرس تغيرات الدالة f' :- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 - (1+x)e^{x-1}] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(x)] \\ &= 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 - (1+x)e^{x-1}] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(x)] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

- حساب $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{x-1} - (1+x)e^{x-1} \\ &= -(2+x)e^{x-1} \end{aligned}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $-(2+x)$:

$$-(2+x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

ومنه:

- جدول تغيرات $f'(x)$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	2	$f'(-2)$	$-\infty$

(2) حساب $f'(1)$:

$$f'(1) = 2 - (1+1) = 0$$

- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

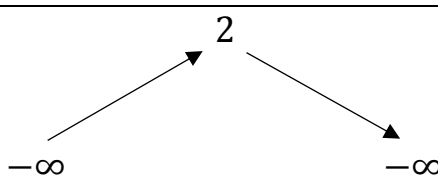
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

(3) دراسة تغيرات الدالة f :

- النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x + 1 - xe^{x-1}] \\
 &= -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{x-1}] &= 0 \text{ لأن} \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + 1 - xe^{x-1}] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{x-1} \left(\frac{2x}{e^{x-1}} + \frac{1}{e^{x-1}} - x \right) \right] \\
 &= -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x}{e^{x-1}} \right] &= 0 \text{ لأن}
 \end{aligned}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

(4) أ/ تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x + 1 - xe^{x-1} - 2x - 1] \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-xe^{x-1}] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = -xe^{x-1}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $(-x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما : $x < 0$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات: $(0; 1)$
- (C_f) تحت (Δ) لما : $x > 0$.

5 / تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) :

المستقيم (T) يوازي المستقيم (Δ) معناه:

$$\begin{aligned} f'(a) = 2 &\Rightarrow 2 - (1 + a)e^{a-1} = 2 \\ &\Rightarrow -(1 + a)e^{a-1} = 0 \\ &\Rightarrow -(1 + a) = 0 \\ &\Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\ &= 2x + 2 + 2(-1) + 1 - (-1)e^{-1-1} \\ &= 2x + 1 + e^{-2} \end{aligned}$$

إذن معادلة المماس (T) هي :

$$y = 2x + 1 + e^{-2}$$

ب/ تبين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

$$\text{ولدينا: } f(1.9) \times f(2) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1.9; 2[$

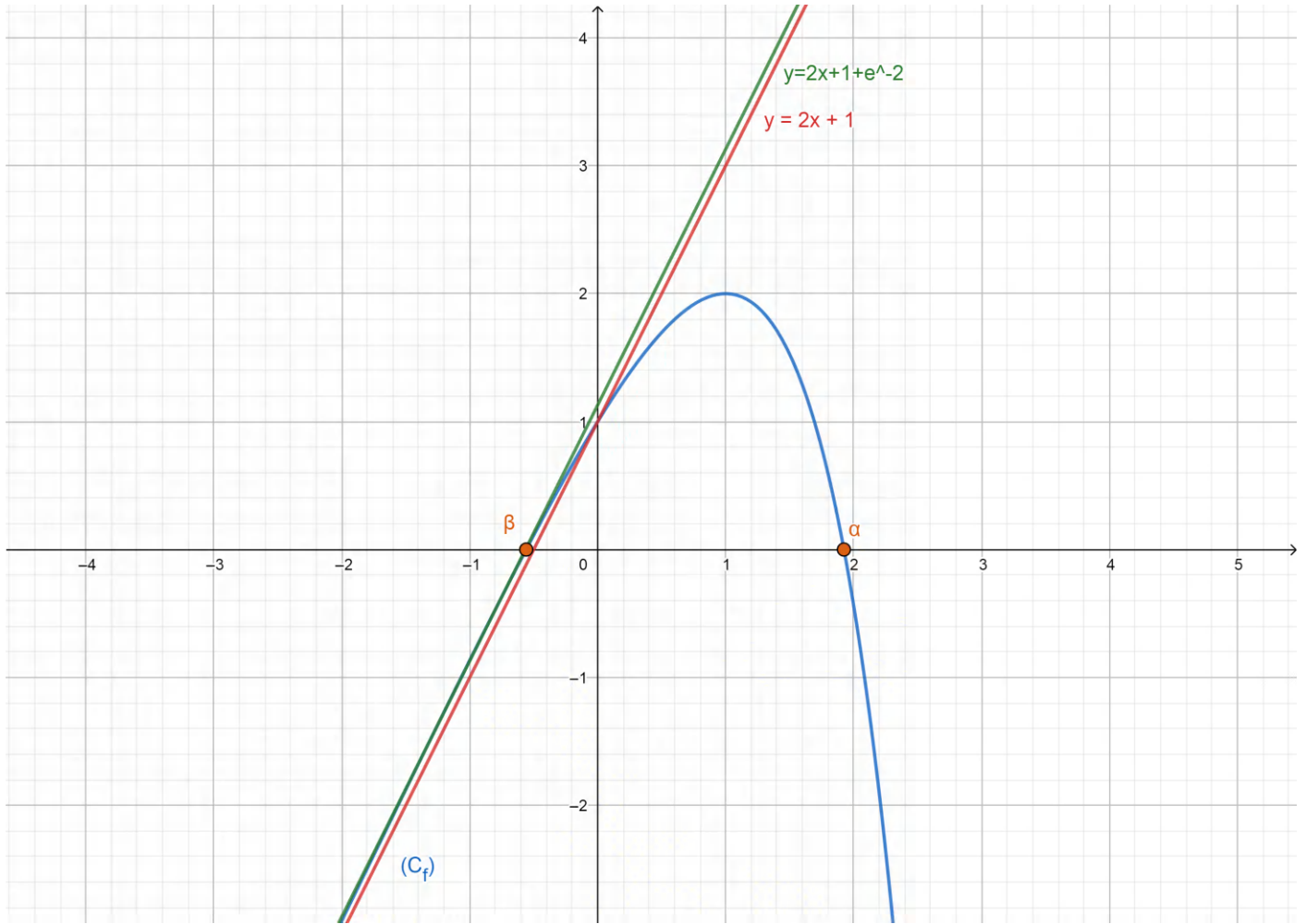
$$\text{ولدينا: } f(-0.6) \times f(-0.5) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $] - 0.6; -0.5[$

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعين α و β نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل.
- نرسم المستقيم المقارب المائل : $(y = 2x + 1)$.
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(7) المناقشة البيانية:

لدينا: من المعادلة (E) $m \in \mathbb{R}_+^*$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = 2x + \ln m$ ومنه:

لما $\ln m < 1$ أي $m < e$ أي $m \in]0; e[$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب	لما $\ln m = 1$ أي $m = e$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم	لما $1 < \ln m < 1 + e^{-2}$ أي $e < m < e^{1+e^{-2}}$ المعادلة تقبل حلين سالبين	لما $\ln m = 1 + e^{-2}$ أي $m = e^{1+e^{-2}}$ المعادلة تقبل حل مضاعف	لما $\ln m > 1 + e^{-2}$ أي $m > e^{1+e^{-2}}$ المعادلة لا تقبل حلول
---	--	--	---	--

07

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g' :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2x + 1)e^x - 1] = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x + 1)e^x - 1] = +\infty \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي للنهايات:

• منحنى الدالة g يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ - حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^x + (2x + 1)e^x \\ &= (2x + 3)e^x \end{aligned}$$

لدينا $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x + 3)$:

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-1	$f\left(-\frac{3}{2}\right)$	$+\infty$

2) حساب $g(0)$:

$$g(0) = (2(0) + 1)e^0 - 1 = 0$$

- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(e^x - 1)^2] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(e^x - 1)^2] = +\infty \end{aligned}$$

(2) أ/ تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(e^x - 1)^2 - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^{2x} + x - 2xe^x - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x(e^x - 2)] \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0 \text{ لأن}$$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $(f(x) - y)$:

$$\begin{aligned}f(x) - y &= xe^x(e^x - 2) \\ &\Rightarrow \begin{cases} xe^x = 0 \\ e^x - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \ln 2 \end{cases}\end{aligned}$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
xe^x	-	0	+	+
$e^x - 2$	-	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	-	+

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 2; +\infty[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطتين $A(0; 0)$ و $B(\ln 2; \ln 2)$.
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]0; \ln 2[$.

(3) أ/ تبين أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (e^x - 1)^2 + 2xe^x(e^x - 1) \\ &= (e^x - 1)(e^x - 1 + 2xe^x) \\ &= (e^x - 1)(e^x(2x + 1) - 1) \\ &= (e^x - 1)g(x)\end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ في إشارة $(e^x - 1)$

$$\begin{aligned}e^x - 1 = 0 &\Rightarrow e^x = 1 \\ &\Rightarrow x = \ln 1 \\ &\Rightarrow x = 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$			

(4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

المماس يمر من المبدأ معناه:

$$f'(a)(0 - a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow -a(e^a - 1)g(a) + a(e^a - 1) = 0$$

$$\Rightarrow a(e^a - 1)[-g(a) + (e^a - 1)] = 0$$

$$\Rightarrow a(e^a - 1)[-(2a + 1)e^a + 1 + e^a - 1] = 0$$

$$\Rightarrow a(e^a - 1)[-2ae^a - e^a + 1 + e^a - 1] = 0$$

$$\Rightarrow -2a^2(e^a - 1)e^a = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a^2 = 0 \\ e^a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e^a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \ln 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 0$$

ومنه:

$$(T): y = f'(0)x + f(0)$$

$$y = 0x + 0$$

$$y = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مماس للمنحني (C_f) .

(5) التمثيل البياني:

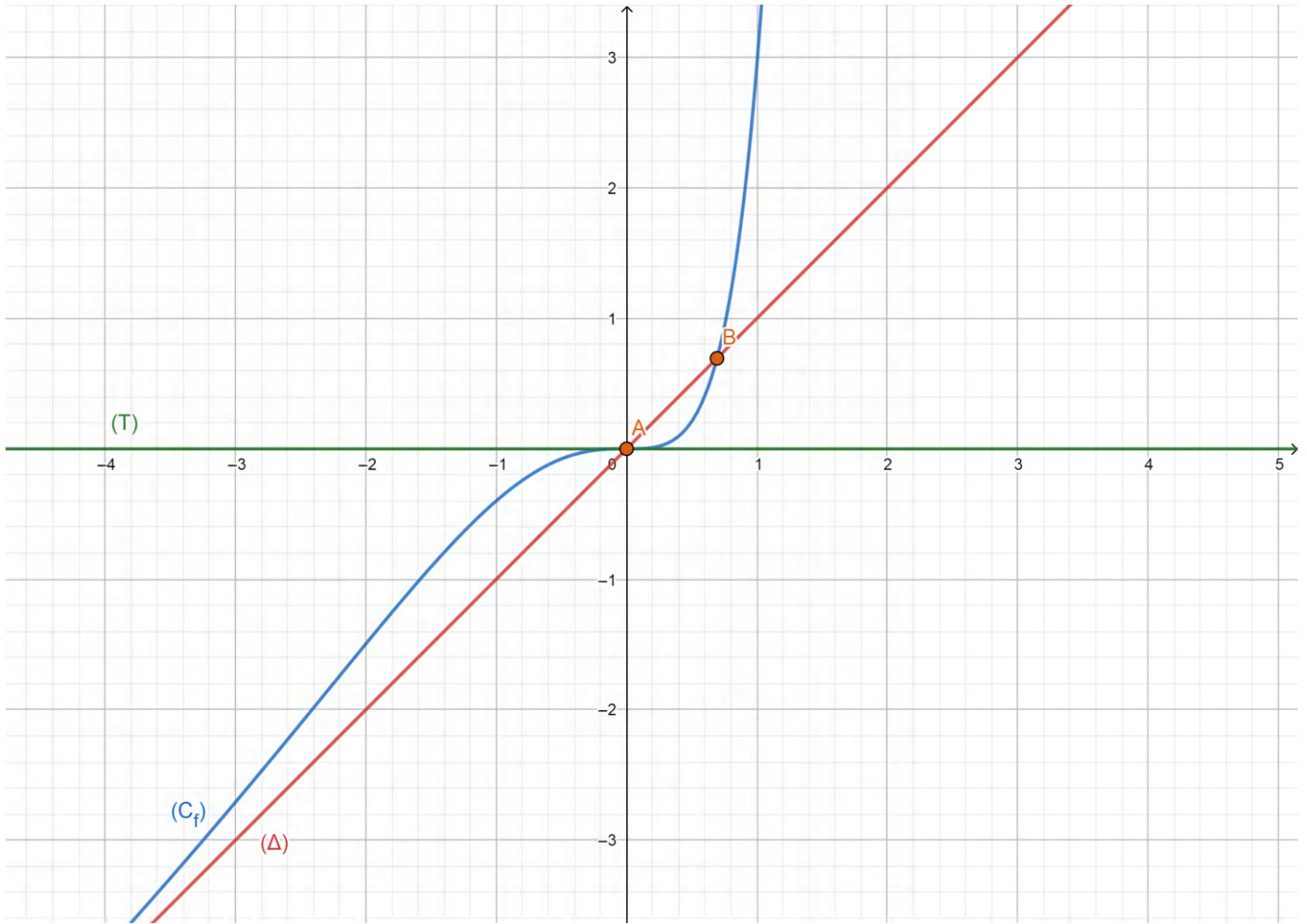
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta): (y = x)$.

• نعين A و B نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) .

• نرسم المماس (T) .

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



6 المناقشة البيانية:

حلل المعادلة $f(x) = mx$ هل فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = mx$

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $x = 0$

لما $0 < m < 1$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m \geq 0$ المعادلة تقبل حلان: حل موجب وحل معدوم

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما

08

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(1) أ/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{e^x + 1} &= \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x}{e^x + 1} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن الدالة f فردية:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x} + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{e^{-x} + 1} - \frac{1}{e^{-x} + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{e^x + 1} - 1 + \frac{1}{e^x + 1} \\ &= -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^x + 1} \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة f فردية

(2) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$

(3) أ/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-(e^x + 1)^2 + 4e^x}{2(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^{2x} - 1 - 2e^x + 4e^x}{2(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-e^{2x} - 1 + 2e^x}{2(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{-(e^{2x} + 1 - 2e^x)}{2(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{-(e^x - 1)^2}{2(e^x + 1)^2} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2
\end{aligned}$$

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا $-\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \leq 0$ ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-

ب/ الاستنتاج:

المشتقة الأولى انعدمت ولم تغير اشارتها إذن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $O(0; 0)$

ج/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا: $f(0) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

4 / تبين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-\frac{1}{2}x + 1)] = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-\frac{1}{2}x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{e^x + 1} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + \frac{1}{2}x + 1]$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + \frac{1}{2}x + 1] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x + 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 - \frac{2}{e^x + 1} \right]
\end{aligned}$$

$$= 2 - 2 = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x - 1$

5) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$\begin{aligned} f(x) - y &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1 \\ &= \frac{-2}{e^x + 1} \end{aligned}$$

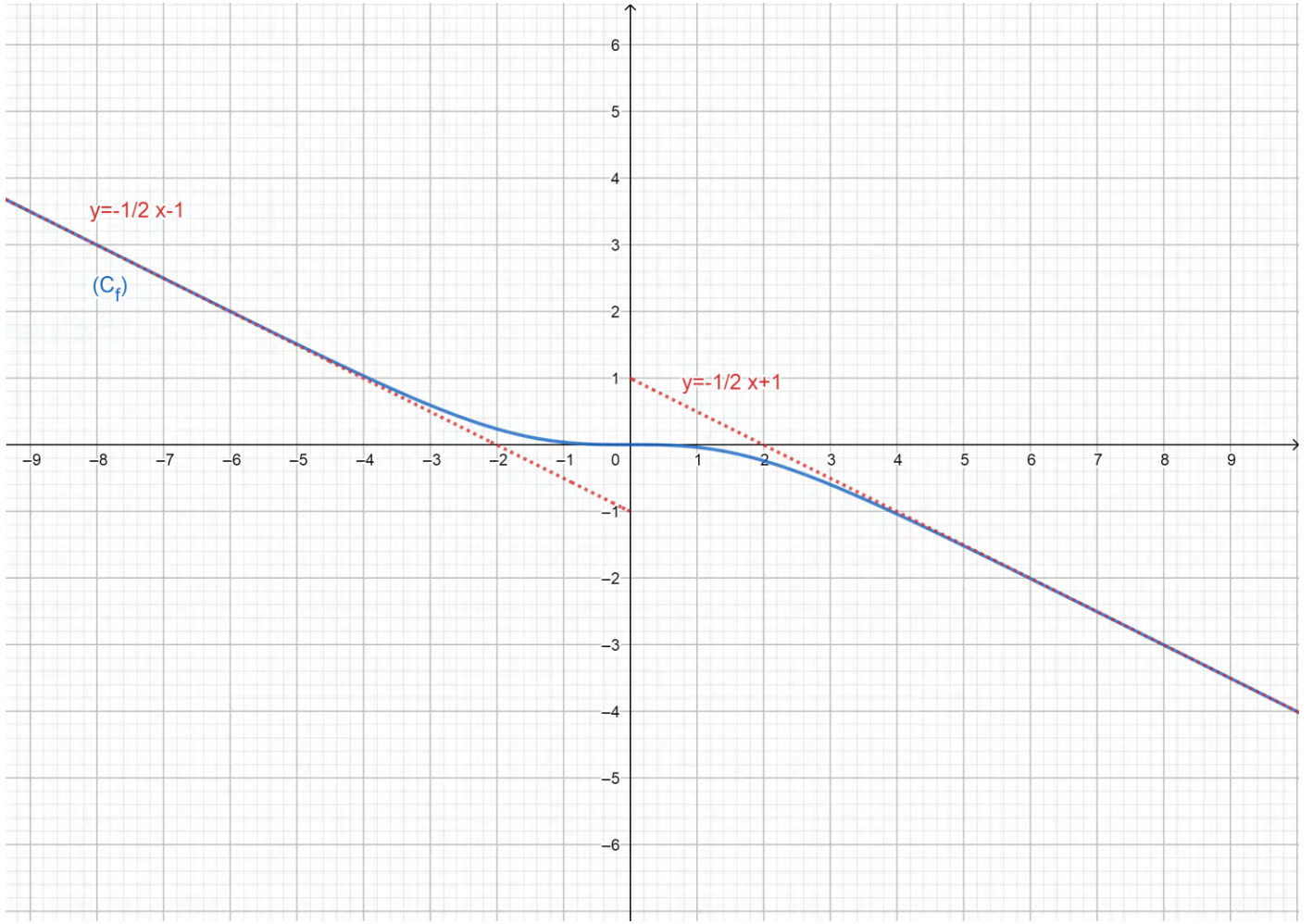
لدينا: $(e^x + 1) > 0$ ومنه :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$	-	
الوضعية	(C_f) تحت (d)	

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمتين المقاربتين المائلتين: $(y = -\frac{1}{2}x - 1)$ و $(y = -\frac{1}{2}x + 1)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(1) تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = +\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - 2] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} \right] = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = -\infty$$

لأن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{5}{2} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 2] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{x-2} \right] = -\infty \end{cases}$$

(2) / تبين أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) + x - \frac{5}{2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2} - 4 = 0$:

$$\begin{aligned} e^{x-2} - 4 = 0 &\Rightarrow e^{x-2} = 4 \\ &\Rightarrow x - 2 = \ln 4 \\ &\Rightarrow x = \ln 4 + 2 \end{aligned}$$

- تبين أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4[$ وتحت على المجال

$]2 + \ln 4; +\infty[$:

دراسة إشارة الفرق $(f(x) - y)$:

$$f(x) - y = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) + x - \frac{5}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

لدينا $-\frac{1}{2}e^{x-2} < 0$ ولدينا:

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 4 + 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	$\ln 4 + 2$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}$	-		-
$e^{x-2} - 4$	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	-

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty; 2 + \ln 4[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $2 + \ln 4$
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]2 + \ln 4; +\infty[$

(3) / تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) - \frac{1}{2}e^{2(x-2)} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2}e^{2(x-2)} - 2e^{x-2} + \frac{1}{2}e^{2(x-2)}\right) \\ &= -(1 + e^{2(x-2)} - 2e^{x-2}) \\ &= -(e^{x-2} - 1)^2 \end{aligned}$$

ب/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f'(x) \leq 0$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow -(e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow e^{x-2} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^{x-2} = 1 \\ &\Rightarrow x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

(4) حساب $f''(x)$:

$$f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$$

دراسة $f''(x)$:

$$-2e^{x-2} < 0 \text{ لدينا}$$

ولدينا:

$$e^{x-2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{x-2}$	-	0	-
$e^{x-2} - 1$	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-

المشتقة الثانية انعدمت وغيرت اشارتها معناه أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها 2

(5) اثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$

لدينا الدالة f رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

$$f(2 + \ln 3) = 0.93 \quad \text{و} \quad f(2 + \ln 4) = -0.83 \quad \text{ولدينا:}$$

$$f(2 + \ln 4) \times f(2 + \ln 3) < 0 \quad \text{ولدينا:}$$

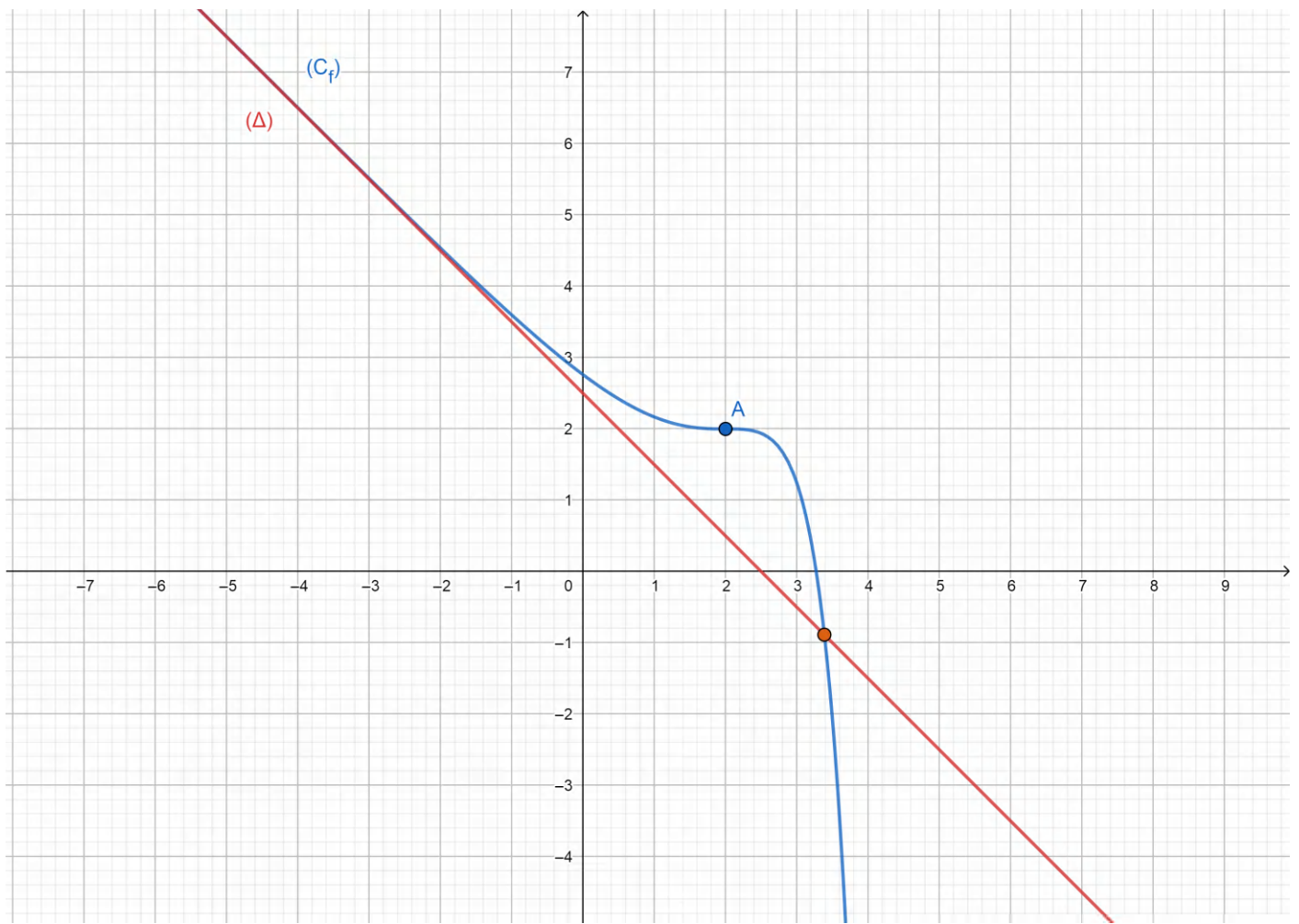
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال

$$]2 + \ln 3 ; 2 + \ln 4 [$$

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و (C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) : $(y = -\frac{1}{2}x - 1)$
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



10

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x + x + 2] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x + x + 2] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = e^x + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$:

ومنه:

- جدول تغيرات $g'(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) / تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(-2.1) = 0.02$ و $g(-2.2) = -0.08$

ولدينا: $g(-2.2) \times g(-2.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) / حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1 - xe^x}{e^x + 1} \right] = \frac{1}{1} = 1$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$ بجوار $-\infty$.

ب/ تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - xe^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x \left(\frac{1}{e^x} - x \right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{e^x} - x}{\frac{1}{e^x} + 1} \\ &= \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1} \end{aligned}$$

- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1} \right] = -\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^x} \right] = 0$

(2) التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-e^x - xe^x)(e^x + 1) - e^x(1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^x(1 + x)(e^x + 1) - e^x(1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x[-(1 + x)(e^x + 1) - (1 - xe^x)]}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x[-e^x - 1 - xe^x - x - 1 + xe^x]}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^x[e^x + x + 2]}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

(3) دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا $e^x > 0$ و $(e^x + 1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

(4) أ/ تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - xe^x}{e^x + 1} - x \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - xe^x + xe^x + x}{e^x + 1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 + x}{e^x + 1} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0 \text{ لأن}$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f)

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) :

- دراسة إشارة الفرق $(f(x) - y)$

$$f(x) - y = \frac{1 + x}{e^x + 1}$$

لدينا: $(e^x + 1) > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

• (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$.

• (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1; -1)$

• (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1; +\infty[$.

(5) أ/ تبين أن: $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 g(\alpha) = 0 &\Rightarrow e^\alpha + \alpha + 2 = 0 \\
 &\Rightarrow e^\alpha = -(\alpha + 2)
 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= \frac{1 - \alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} \\
 &= \frac{1 + \alpha(\alpha + 2)}{- (\alpha + 2) + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{-(\alpha + 1)} \\
&= \frac{(\alpha + 1)^2}{-(\alpha + 1)} \\
&= -(\alpha + 1)
\end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:
لدينا:

$$\begin{aligned}
-2.2 &< \alpha < -2.1 \\
-1.2 &< \alpha + 1 < -1.1 \\
1.1 &< -(\alpha + 1) < 1.2
\end{aligned}$$

اذن:

$$1.1 < f(\alpha) < 1.2$$

ب/ تبين أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(0.5) = 0.06$ و $f(0.6) = -0.03$

ولدينا: $f(0.4) \times f(0.6) < 0$

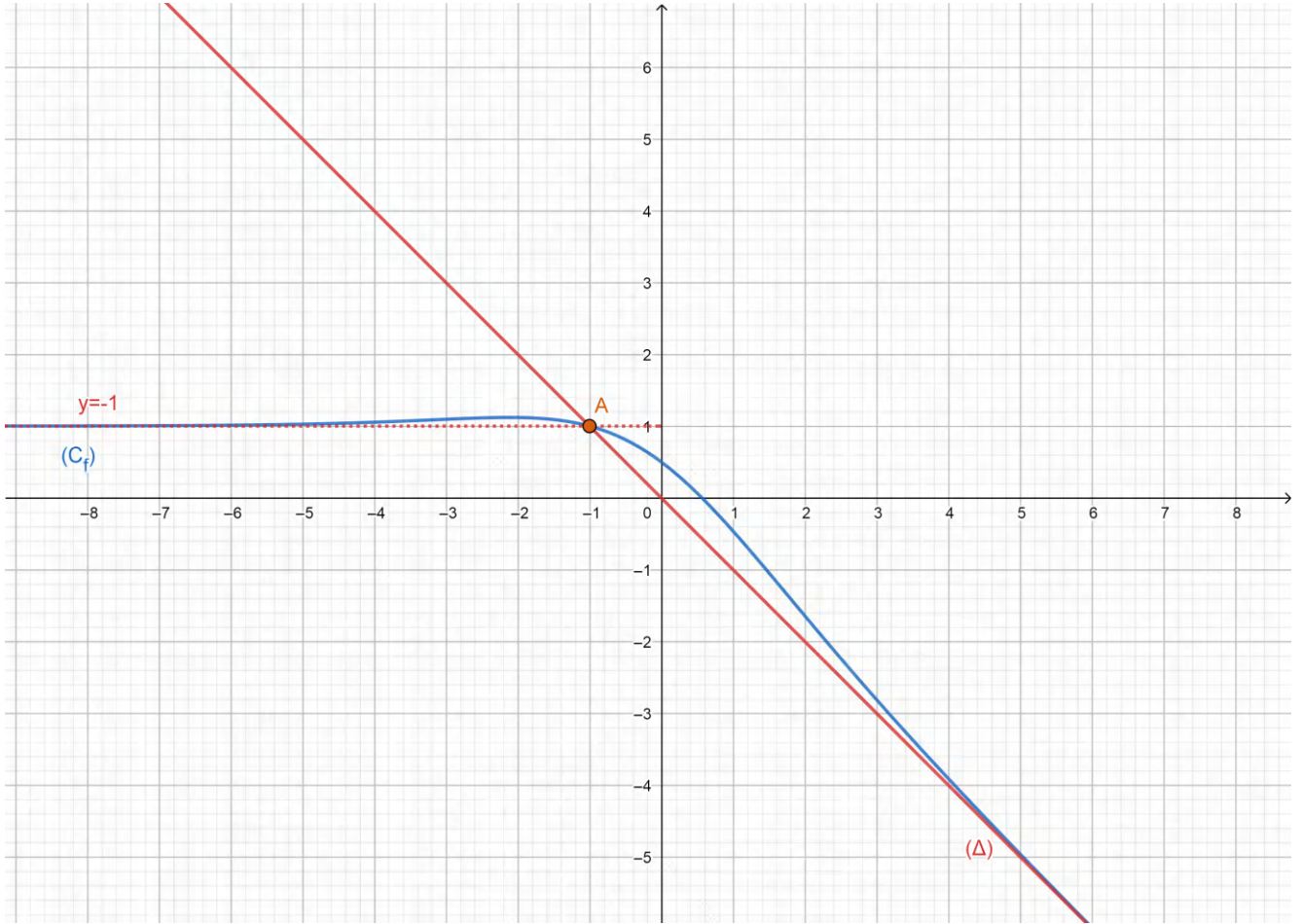
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا β في المجال $]0.5; 0.6[$

ومنه المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة β .

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و (C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $(y = -1)$
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta): (y = -x)$
- نعين A نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned} \ln m + (x + \ln x)e^x - 1 &= 0 \Rightarrow \ln m + xe^x + e^x \ln m - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \ln m (1 + e^x) = 1 - xe^x \\ &\Rightarrow \ln m = \frac{1 - xe^x}{1 + e^x} \\ &\Rightarrow f(x) = \ln m \end{aligned}$$

ومنه مجموعة الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \ln m$

المعادلة تقبل حل وحيد موجب	$m < \sqrt{e}$	أي	$\ln m < \frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حل وحيد معدوم	$m = \sqrt{e}$	أي	$\ln m = \frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حل وحيد سالب	$\sqrt{e} < m < e$	أي	$\frac{1}{2} < \ln m < 1$	لما
المعادلة تقبل حلان سالبان	$e < m < e^{f(\alpha)}$	أي	$1 < \ln m < f(\alpha)$	لما
المعادلة تقبل حل مضاعف سالب	$m = e^{f(\alpha)}$	أي	$\ln m = f(\alpha)$	لما
المعادلة لا تقبل حلول	$m > e^{f(\alpha)}$	أي	$\ln m > f(\alpha)$	لما

11

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) ايجاد عبارة $g(x)$ بدلالة x :

نضع: $x = t$ نجد:

$$\begin{aligned} g(t) - 2g(1-t) &= e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3 \\ \Rightarrow -2g(1-t) &= -g(t) + e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3 \\ \Rightarrow 2g(1-t) &= g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

نضع: $t = 1 - x$ معناه: $x = 1 - t$ ، نجد:

$$\begin{aligned} g(1-t) - 2g(1-1+t) &= e^{1-t} - 2e^{1-1+t} - 3(1-t) + 3 \\ \Rightarrow g(1-t) - 2g(t) &= e^{1-t} - 2e^t + 3t \\ \Rightarrow 2g(1-t) - 4g(t) &= 2e^{1-t} - 4e^t + 6t \quad \dots (2) \end{aligned}$$

نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد:

$$\begin{aligned} g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3 - 4g(t) &= 2e^{1-t} - 4e^t + 6t \\ -e^t - 3 &= -4e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -3g(t) &= -3e^t + 3t + 3 \\ \Rightarrow g(t) &= e^t - t - 1 \end{aligned}$$

إذن :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

(2)

أ/ حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - x - 1] = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا:

$$g'(x) = e^x - 1$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow e^x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^x = 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = 1 - g(-x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: نضع:

$$v(x) = (g \circ u)(x) \quad \text{أي} \quad v(x) = g(u(x)) = g(-x) \quad \text{و} \quad u(x) = -x$$

لدينا الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ والدالة u متناقصة على المجال $[0; +\infty[$
المجال I المجال $g(I)$

كيف وجدنا المجال $g(I)$:

لدينا: $I =]-\infty; 0]$ و $u(x) \in I$ معناه $u(x) \leq 0$ أي $-x \leq 0$ ومنه $x \geq 0$ أي $x \in [0; +\infty[$
ومنه: $g(I) = [0; +\infty[$.

وبما أن الدالة g متناقصة على $]-\infty; 0]$ و الدالة u متناقصة على $[0; +\infty[$

إذن الدالة k متزايدة على المجال $[0; +\infty[$

بنفس الفكرة نجد: الدالة k متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$

$$-g(-x) = -k(x) \quad \text{أي:} \quad g(-x) = k(x)$$

وعليه:

$-k(x)$ متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ و متناقصة على المجال $[0; +\infty[$

ولدينا $h(x)$ و $-k(x)$ لهما نفس اتجاه التغير لأن: $h(x) = 1 - k(x)$

اذن:

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f(x)$	0	0	$h(0) = 1$	0	$-\infty$

(4) اثبات أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β :

لدينا الدالة h مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

$$h(-1.15) = -0.08 \quad \text{و} \quad h(-1.14) = 0.01 \quad \text{ولدينا:}$$

$$h(-1.14) \times h(-1.15) < 0 \quad \text{ولدينا:}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.15; -1.14[$

ولدينا: $h(1.85) = -0.007$ و $h(1.84) = 0.001$

ولدينا: $h(1.84) \times h(1.85) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]1.84; 1.85[$

اذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β

(5) استنتاج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x :

إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات $g(x)$ لدينا:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$+$

إشارة $h(x)$:

من جدول تغيرات $h(x)$ لدينا:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(II)

(1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x + g(x)}{1 + g(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x + e^x - x - 1}{1 + e^x - x - 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right] \\ &= \frac{-1}{+\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x + g(x)}{1 + g(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0 \text{ لأن:}$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

(2) / أثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

لدينا البسط عبارة عن مجموعة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام كذلك ومنه البسط على المقام قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

اذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- اثبات أن: $f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 - g(-x) \\ &= 1 - e^{-x} - x + 1 \\ &= 2 - x - e^{-x} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{e^x[e^x - x - (1 - e^{-x})(e^x - 1)]}{(e^x - x + 1 - 1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x - x - e^x + 1 + 1 - e^{-x})}{(1 + g(x))^2} \\ &= \frac{e^x(2 - x - e^{-x})}{(1 + g(x))^2} \\ &= \frac{e^x h(x)}{(1 + g(x))^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $(1 + g(x))^2 > 0$ و $e^x > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

ولدينا $f(0) = 0$

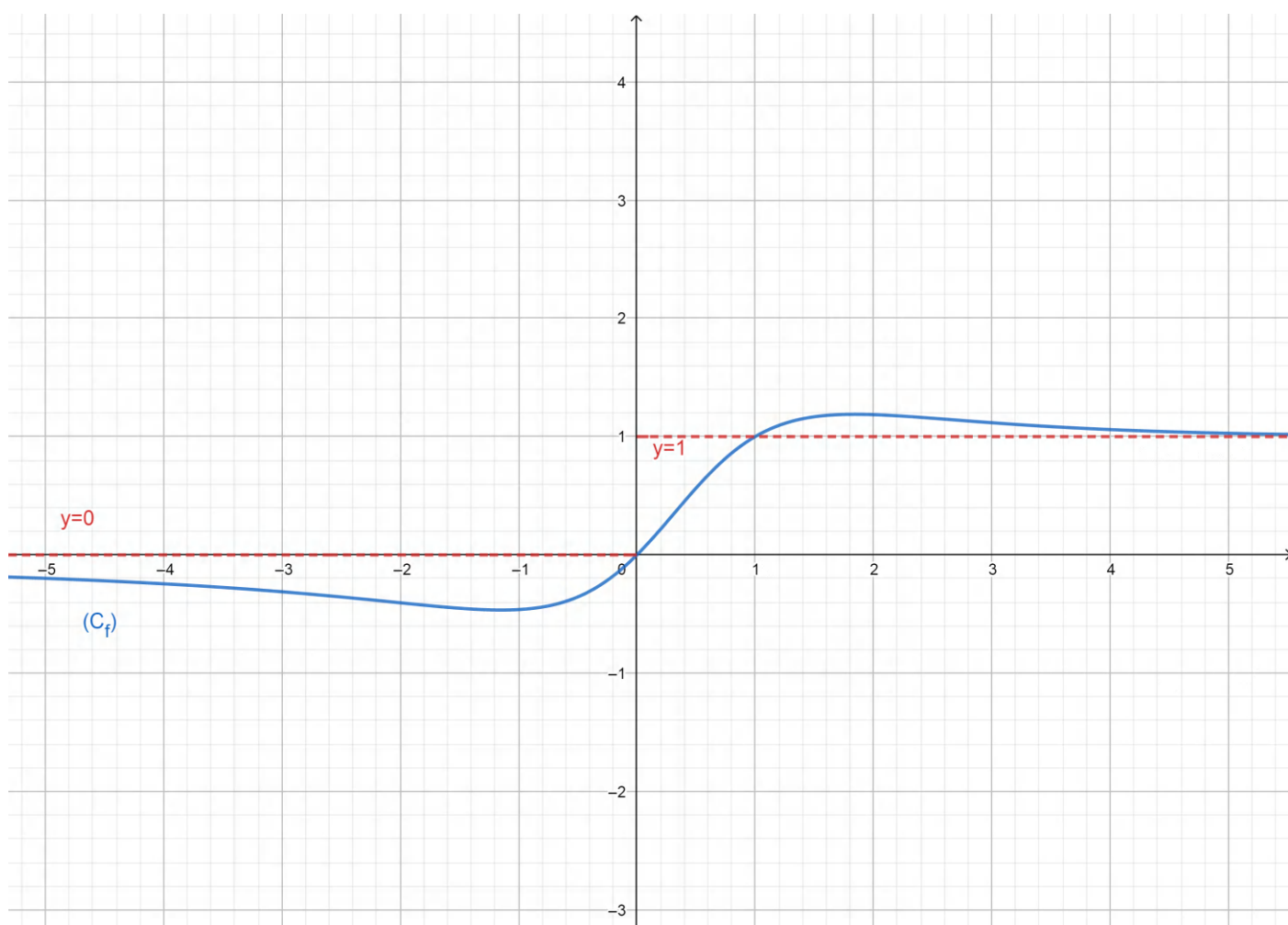
- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0	$f(\beta)$	1

(3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(1) تعيين مجموعة تعريف الدالة f :

الدالة f معرفة لما : $e^x + 1 \neq 0$

ولدينا $e^x + 1 > 0$

ومنه الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

(2) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x}{e^x + 1} \right] = 0$$

- التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$.

ب/ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \end{aligned}$$

ج/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{e^x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1 + e^{-x}} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

(3) اثبات أن الدالة f متزايدة تماما:

- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	1

(4) تبين أن النقطة $A(0; \frac{1}{2})$ مركز تناظر المنحني (C_f) :

◀ شاهد هذا التذكير ▶

(اثبات أن نقطة مركز تناظر)

- نبين أن $(2(0) - x) \in D_f$:

واضح أن $(-x) \in \mathbb{R}$

- نبين أن $f(2(0) - x) + f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} f(2(0) - x) + f(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \\ &= \frac{e^x(e^{-x} + 1) + e^{-x}(e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} \\ &= \frac{1 + e^x + 1 + e^{-x}}{1 + e^x + e^{-x} + 1} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

(5) تعيين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A :

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ &= \frac{e^0}{(e^0 + 1)^2}x + \frac{e^0}{e^0 + 1} \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(6)

أ/ تحليل العبارة: $e^{2x} - 2e^x + 1$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$$

ب/

$$\begin{aligned}
\bullet g'(x) &= \frac{1}{4} - f'(x) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{4(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 4e^x}{4(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{4(e^x + 1)^2} \\
&= \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x + 1)^2}
\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\bullet g(0) = 0$$

- دراسة تغيرات الدالة g :

حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] \\
&= -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right] - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

لدينا: $g'(x) \geq 0$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^2 = 0 &\Rightarrow e^x - 1 = 0 \\
&\Rightarrow e^x = 1 \\
&\Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ج/ استنتاج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) :

لدينا:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = -g(x)$$

ومنه الوضعية من إشارة $-g(x)$:

لدينا من جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

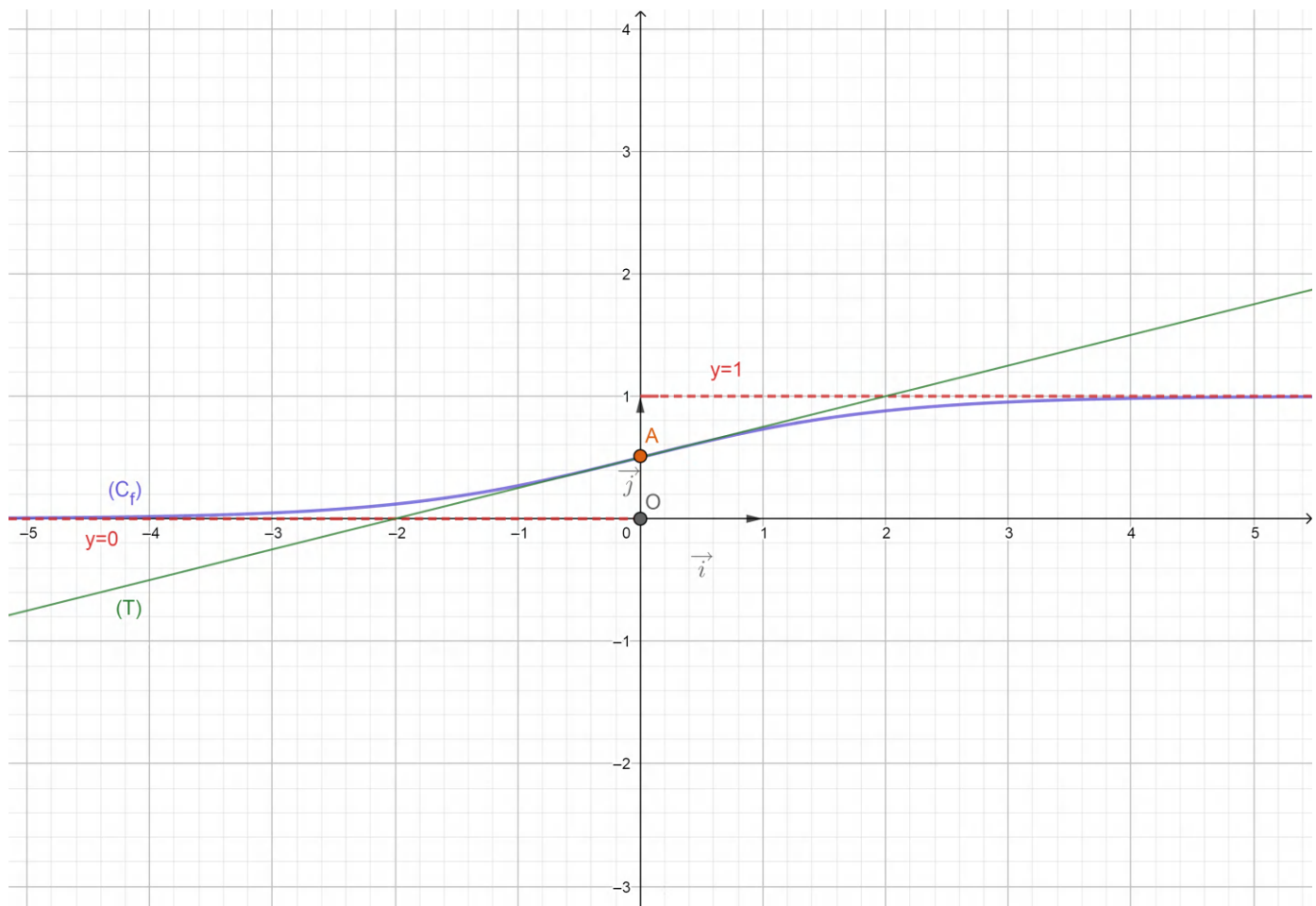
- الوضعية:

- (C_f) تحت (T) لما $x \in]-\infty; 0[$.
- (C_f) يقطع (T) في النقطة A .
- (C_f) فوق (T) لما $x \in]0; +\infty[$.

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$.
- نعين A نقطة تقاطع (C_f) مع (T) .
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f) .



5

الدوال اللوغارتمية

المسائل الشاملة

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

(3) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

(4) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x + 1)^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(5) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها.

(6) مثل بيانيا المنحني (C_f) .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = 1 + x^2 + \ln x$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

(3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أنه من أجل كل x من D_f :

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(4) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

(5) اثبت أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها.

(6) مثل بيانيا كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحني (C_f) . علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل

في نقطتين x_0 و x_1 حيث: $0.1 < x_0 < 0.2$ و $1.5 < x_1 < 1.6$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = -x + 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال D_h :

$$h(x) = f(x+1) + 2$$

ب/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

(2) أ/ بين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه .

ب/ مثل بيانيا المنحني (C_h) .

(3) m وسيط حقيقي غير معدوم، (T_m) مستقيم معادلته:

$$y = \ln(|m|) x + 1$$

أ/ برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$h(x) = \ln(|m|) x + 1 \dots (E)$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} + x; x \in \mathbb{R}_-^* - \{-1\} \\ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}; x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ 0; x = 0 \end{cases}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$ ، فسر النتيجة هندسياً.
- (2) ادرس تغيرات الدالة f .
- (3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.
ب/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_-^* - \{-1\}$.
- (4) حل المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟
- (5) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-2; -\frac{3}{4}[$.
- (6) مثل بيانياً (Δ) والمنحني (C_f) .
- (7) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$f(x) = -(m^2 - e) \dots (E)$$
 - ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = (\ln x)^3 + 1$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) حل المعادلة $g(x) = 0$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ يكون:

$$f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

(3) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = (\ln x)^2 + 1$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة h .

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

(3) ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) .

(4) بين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف يُطلب احداثيتها.

(5) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

(6) احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

(7) مثل بياناً في نفس المعلم كلا من (C_f) ، (C_h) و (T) .

(8) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m (\ln x)^3 + e^m (\ln x) - \ln x - 2e^m = 0 \dots (E)$$

- ناقش بياناً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	...	...	1	$\sqrt{3}$	...	
$f'(x)$	...	0	−		...	0	+
$f(x)$		$-\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$					$+\infty$
			$-\infty$			...	

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) علما أن الدالة f فردية:

أ/ عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب/ بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$ و $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$

ج/ أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.

(2) نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$.

أ/ مثّل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحنى (C_f) . نأخذ: $f(\sqrt{3}) \cong 3$ و $(\sqrt{3}) \cong 1.7$

(3) نفرض أن عبارة الدالة f هي من الشكل:

$$f(x) = ax + b + \ln\left(c + \frac{2}{x-1}\right)$$

حيث: a, b, c أعداد حقيقية.

- باستعمال نتائج الجدول أعلاه، بيّن أنّ: $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$.

(4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0 \dots (E)$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty; 1[$ كما يلي:

$$g(x) = \ln(f(x))$$

- ادرس تغيرات الدالة g .

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ مبينا المستقيبات المقاربة لـ (C_f) .

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) m عدد حقيقي موجب تماما.

لتكن النقط A_m ذوات الفاصلة m ، والمستقيم (T_m) مماس (C_f) في النقط A_m .

أ/ اكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m) .

ب/ عين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0; 0)$.

ج/ اكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها.

(3) مثل بيانيا المستقيمات (T_m) والمنحني (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{(\ln|x|)^2}{x}$$

(1) بيّن أن الدالة g فردية.

(2) بيّن أنه يمكن رسم (C_g) منحنى الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه.

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) أ/ بين أن لكل x من المجال $]0; 1]$ $(x - 1) + \ln x \leq 0$ وأن لكل x من المجال $[1; +\infty[$:

$$(x - 1) + \ln x \geq 0.$$

ب/ بين أنه من أجل كل من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ والمنحنى (C_f) .

(4) عين احداثي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازياً للمستقيم (D) ، ثم اكتب معادلة المستقيم (T) .

(5) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها.

(6) مثل بيانياً كلا من (D) ، (T) و (C_f) .

(7) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$f(x) = x - 2m$$

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)$$

(1) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ/ احسب $g(0)$.

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72 < \alpha < -0.71$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال: $]0; +\infty[\cup]-1; 0[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسياً.

(2) أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(3) بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

ثم أعط حصر للعدد $f(\alpha)$ بالتدوير إلى 10^{-2} .

(4) مثل بيانياً (C_f) .

(5) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث: $m > 0$.

$$f(x) = \ln m \dots (E)$$

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ بين أن:

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$$

ج/ استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحني (C_f) .

(4) بين أن ω نقطة تقاطع مقاربي المنحني (C_f) تنتمي إلى (C_f) .

(5) اكتب معادلة للمماس (T) عند المبدأ.

(6) مثل بيانياً كلا من (D) ، (T) و (C_f)

(7) m وسيط حقيقي حيث: $m > 0$.

ناقش بيانياً حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) حيث:

$$x - \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{me^x + 2m} \right) = 0 \dots (E)$$

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = \ln x + x - 3$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.2 < \alpha < 2.21$.

(3) عين إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$.

(2) أ/ احسب $f'(x)$ ، ثم ادرس اشارتها.

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) عين دون حساب النهاية التالية:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$$

ثم فسر النتيجة هندسيا.

(4) بين أن:

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

(5) حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

(6) بأخذ: $f(\alpha) \cong -0.66$ ، مثل بيانيا المنحني (C_f) على المجال $]0; 10[$.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) أ/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$.

ب/ تحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$

(3) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) بين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$

(5) استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(III) نسمي (C_h) التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$h(x) = \ln x$$

ولتكن النقطة A ذات الإحداثيات $(0; 2)$ و M نقطة من المنحني (C_h) فاصلتها x_m .

(1) بين أن المسافة AM تُعطى بـ:

$$AM = \sqrt{f(x)}$$

(2) نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$

أ/ برهن أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ برهن أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) ، يُطلب تعيين إحداثياتها.

ج/ برهن أن: $AB = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$

(3) هل المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحني (C_h) في النقطة B ؟ برر اجابتك.

5

الدوال اللوغارتمية حُلُول المسائل الشاملة

01

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -1^+} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + 2 + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(2x+2)(x+1) + 1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 + 1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 3}{x+1} \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

- جدول التغيرات:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نجد:

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\underbrace{x}_{-1} - \frac{\overbrace{\ln(x+1)}^{-\infty}}{\underbrace{x+1}_{0^+}} \right] = +\infty$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] \\ &= +\infty - 0 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

(2) تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مقائل بجوار $+\infty$.

(3) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} -\ln(x+1) = 0 &\Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^0 \\ &\Rightarrow x+1 = 1 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

- الوضعية:

▪ المنحني (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1; 0[$.

- المنحني (C_f) يقطع (Δ) في $O(0; 0)$.
- المنحني (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$.

4 تبين أنه من أجل كل x من المجال $] - 1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 + 2x - 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

5 تبين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(2x + 2 + \frac{1}{x+1}\right)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^4} \\ &= \frac{\left(2(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)(x+1) - 2(x^2 + 2x + \ln(x+1))}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2(x+1)^2 + 1 - 2x^2 + 4x + 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^3 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

$$3 - 2\ln(x+1) = 0 \Rightarrow 2\ln(x+1) = 3$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x+1 = e^{\frac{3}{2}}$$

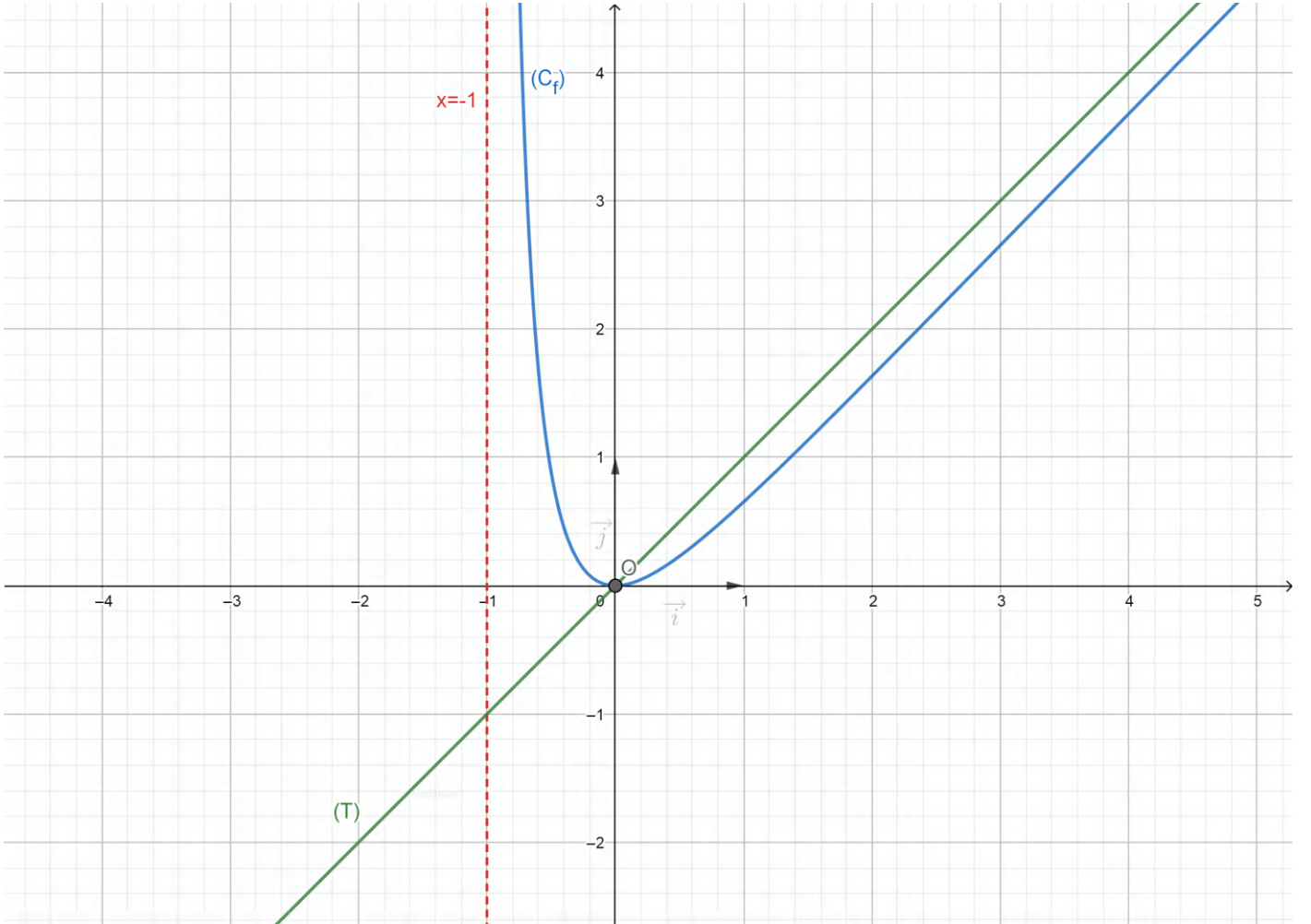
$$\Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

لدينا الدالة f'' تنعدم وتغير إشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $e^{\frac{3}{2}} - 1$

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- **نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = -1$**
- **نرسم المماس (T)**
- **ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)**



02

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + x^2 + \ln x] \\
 &= 0 - \infty \\
 &= -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + x^2 + \ln x] \\
 &= +\infty + \infty \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2x + \frac{1}{x} \\
 &= \frac{2x^2 + 1}{x}
 \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :لدينا: الدالة g مستمرة ومنتزعة على مجال تعريفهاولدينا: $g(0.32) = -0.03$ و $g(0.33) = 0.0002$ ولدينا: $g(0.33) \times g(0.32) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.3) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-x + \frac{\overbrace{2 + \ln x}^{-\infty}}{\underbrace{x}_{0^+}} \right] = -\infty$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}}{1} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = 0 \text{ لأن}$$

2) تبين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{\frac{1}{x}x - (2 + \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 - 1 - \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{x^2 + 1 + \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول التغيرات:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3) تبين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 1 + \ln \alpha = 0 \\ \Rightarrow \ln \alpha = -(\alpha^2 + 1)$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha} \\ = \frac{-\alpha^2 + 2 - (\alpha^2 + 1)}{\alpha} \\ = \frac{-2\alpha^2 + 1}{\alpha} \\ = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33 \\ -0.33 < -\alpha < -0.32 \dots (1)$$

ولدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33 \\ 0.64 < 2\alpha < 0.66 \\ \frac{1}{0.66} < \frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{0.64} \\ 1.51 < \frac{1}{2\alpha} < 1.66 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$1.18 < \frac{1}{2\alpha} - \alpha < 1.34 \\ 2.18 < 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right) < 2.34$$

إذن:

$$2.18 < f(\alpha) < 2.34$$

4) / حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} + x \right] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 + \ln x}{x} \right] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right] \\ = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2 + \ln x}{x}$$

لدينا $x > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$\begin{aligned} 2 + \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = -2 \\ &\Rightarrow x = e^{-2} \end{aligned}$$

ومنه:

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	+

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; e^{-2}[$.
 - (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e^{-2} .
 - (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]e^{-2}; +\infty[$.
- 5 اثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) :
- (T) يوازي (Δ) معناه: $f'(a) = -1$ ومنه:

$$\begin{aligned} f'(a) = -1 &\Rightarrow -\frac{a^2 + 1 + \ln a}{a^2} = -1 \\ &\Rightarrow a^2 + 1 + \ln a = a^2 \\ &\Rightarrow 1 + \ln a = 0 \\ &\Rightarrow \ln a = -1 \\ &\Rightarrow a = e^{-1} \end{aligned}$$

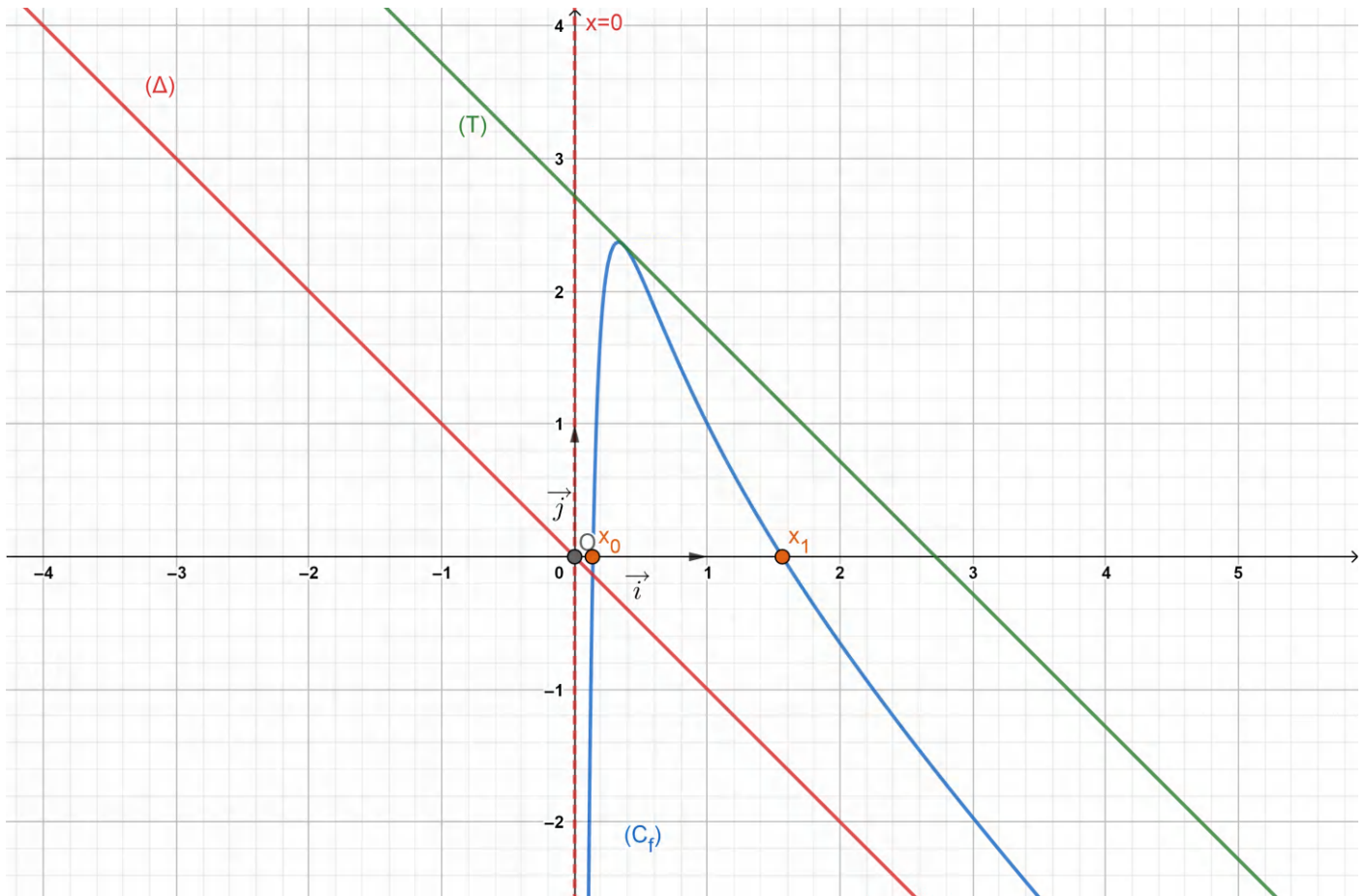
ومنه:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ &= -x + e^{-1} - e^{-1} + \frac{2 + \ln e^{-1}}{e^{-1}} \\ &= -x + e \end{aligned}$$

6 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = 0$
- نعين x_0 و x_1 نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل : (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(III)

1) أ/ تبين أنه من أجل كل x من المجال D_h : $h(x) = f(x+1) + 2$

$$\begin{aligned} f(x+1) + 2 &= -(x+1) + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} + 2 \\ &= -x - 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} + 2 \\ &= -x + 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ب/ تبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (-x + 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + 1 + \frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} - (-x + 1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 + \ln(x+1)}{x+1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

(2) أ/ تبين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه :

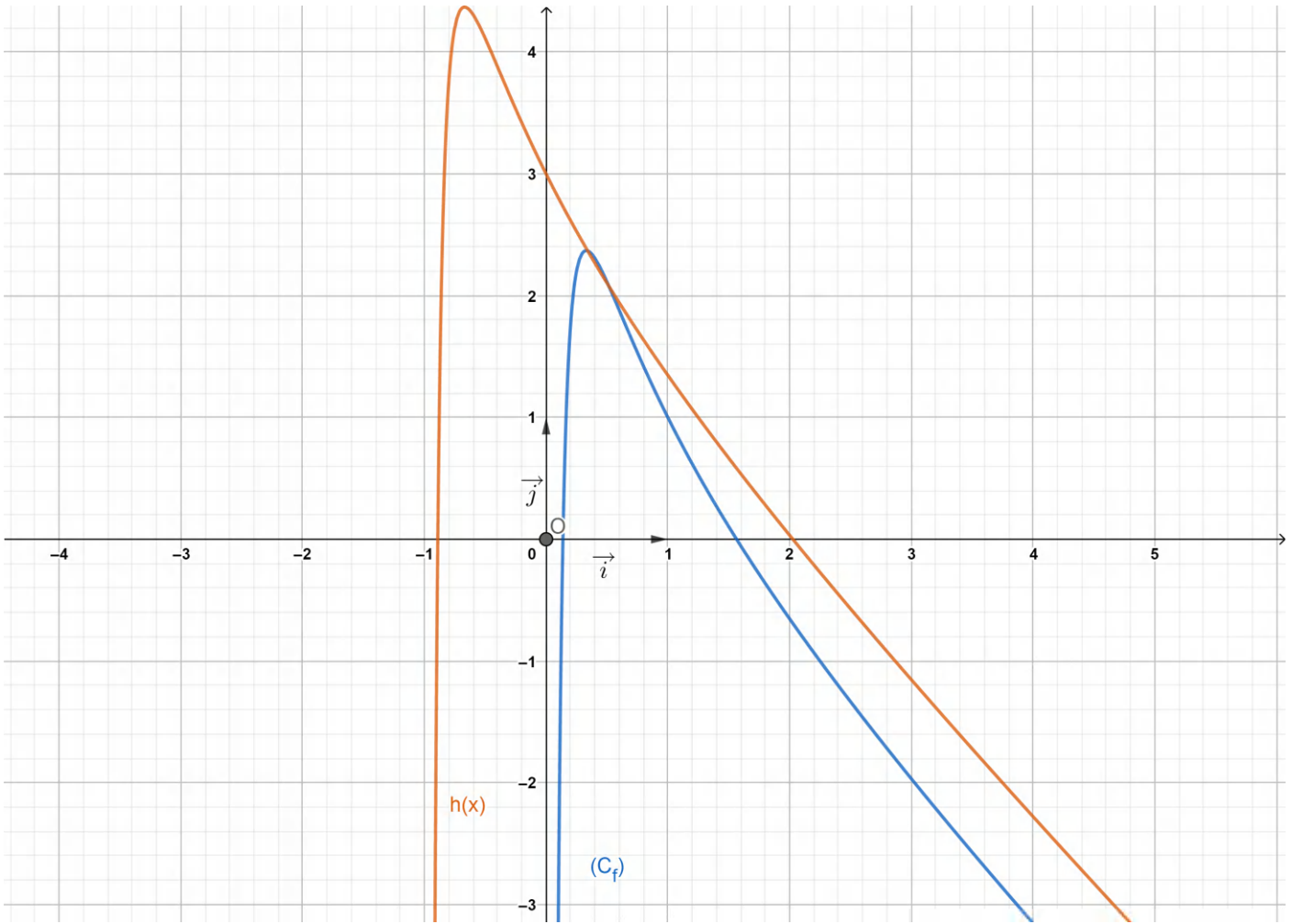
$$h(x) = f(x + 1) + 2$$

$$= f(x - (-1)) + 2$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{u}(-1; 2)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :

تمثيل (C_f) و (C_h) :



(3) أ/ برهان أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها:

نفرض أن النقطة $A(x_1; y_1)$ تنتمي إلى المستقيم (T_m) ونبرهن أنها ثابتة:

لدينا: A تنتمي إلى (T_m) معناه:

$$y_1 = \ln(|m|) x_1 + 1$$

$$\Rightarrow \ln(|m|) x_1 - y_1 + 1 = 0 \dots (3)$$

المعادلة (3) عبارة عن كثير حدود متغيره $\ln(|m|)$ وينعدم اذا انعدمت جميع معاملاته

أي:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -y_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

اذن: المستقيمات (T_m) تشمل النقطة $A(0; 1)$

ب/ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_h) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m = \ln(|m|)x + 1$$

ومنه:

المعادلة تقبل حلا وحيدا	$m = -e^{-1}$ و $m = e^{-1}$	أي $ m = e^{-1}$	أي $\ln m = -1$	لما
المعادلة تقبل حلا وحيدا	$-e^{-1} < m < e^{-1}$	أي $ m < e^{-1}$	أي $\ln m < -1$	لما
المعادلة تقبل حلان	$m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty$	أي $ m > e^{-1}$	أي $\ln m > -1$	لما

03

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\frac{1}{\ln|x|} + x - 0}{x - 0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{x \ln|x|} + \frac{x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{x \ln(-x)} + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{-1}{-x \ln(-x)} + 1 \right] \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [-x \ln(-x)] = 0^+ \text{ لأن:}$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليسار

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} - 0}{x - 0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{2x(\ln x)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x \ln x} \left(1 - \frac{1}{2 \ln x} \right) \right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليمين

- التفسير الهندسي:

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ومنه (C_f) يقبل مماس عمودي معادلته $x = 0$ (2) دراسة تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\ln|x|} + x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{0^+} + x \right] \\
&= +\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{1}{0^-} + x \right] \\
&= -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] \\
&= \frac{1}{0^-} - \frac{1}{2(0^-)^2} \\
&= -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} \left(1 - \frac{1}{2 \ln x} \right) \right] \\
&= \frac{1}{0^+} \left(1 - \frac{1}{2(0^+)} \right) \\
&= -\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} \right] \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = -1$ بجوار $\pm \infty$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = 1$ بجوار $-\infty$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $y = 0$ بجوار $+\infty$.

- حساب $f'(x)$:

لما $x \in \mathbb{R}_* - \{-1\}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)}{(\ln(-x))^2} + 1 \\
&= \frac{-1}{x(\ln(-x))^2} + 1
\end{aligned}$$

لاحظ أن $x < 0$ ومنه: $f'(x) > 0$

اذن:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$

لما $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left(\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right) - \left(-\frac{4\left(\frac{1}{x}\right)\ln x}{4(\ln x)^4}\right) \\ &= -\frac{1}{x(\ln x)^2} + \frac{1}{x(\ln x)^4} \\ &= \frac{-\ln x + 1}{x(\ln x)^3} \\ &= \frac{-\ln x + 1}{[x(\ln x)^2] \ln x} \end{aligned}$$

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $\frac{-\ln x + 1}{\ln x}$:

لدينا:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} -\ln x + 1 = 0 &\Rightarrow \ln x = 1 \\ &\Rightarrow x = e \end{aligned}$$

ومنه:

x	0	1	e	$+\infty$
$-\ln x + 1$	$+$	$+$	0	$-$
$\ln x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$

ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	0

(3) أ/ تبين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$:



إذا استطعنا كتابة عبارة دالة f على الشكل:

$$f(x) = y + \varphi(x)$$

حيث:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\varphi(x)] = 0$$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته y

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{\ln(-x)} \\ &= y + \varphi(x) \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{\ln(-x)} \\ y = x \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_+^* - \{-1\}$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= x + \frac{1}{\ln(-x)} - x \\ &= \frac{1}{\ln(-x)} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \ln(-x) = 0 &\Rightarrow -x = e^0 \\ &\Rightarrow -x = 1 \\ &\Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	0
$f(x) - y$	$+$	$ $	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$.
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-1; 0[$.

4 حل المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2 \ln x - 1}{2(\ln x)^2} = 0$$

لدينا: $2(\ln x)^2 > 0$ ومنه:

$$2 \ln x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 1$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{e}$$

- الاستنتاج:

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$

5 تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-1.77; -1.76[$:

المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-1.77; -1.76[$ معناه

المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا في نفس المجال

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1.77; -1.76[$

لدينا: $f(-1.77) = -0.01$ و $f(-1.76) = 0.008$

لدينا: $f(-1.77) \times f(-1.76) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا في المجال $]-1.77; -1.76[$

6 التمثيل البياني:

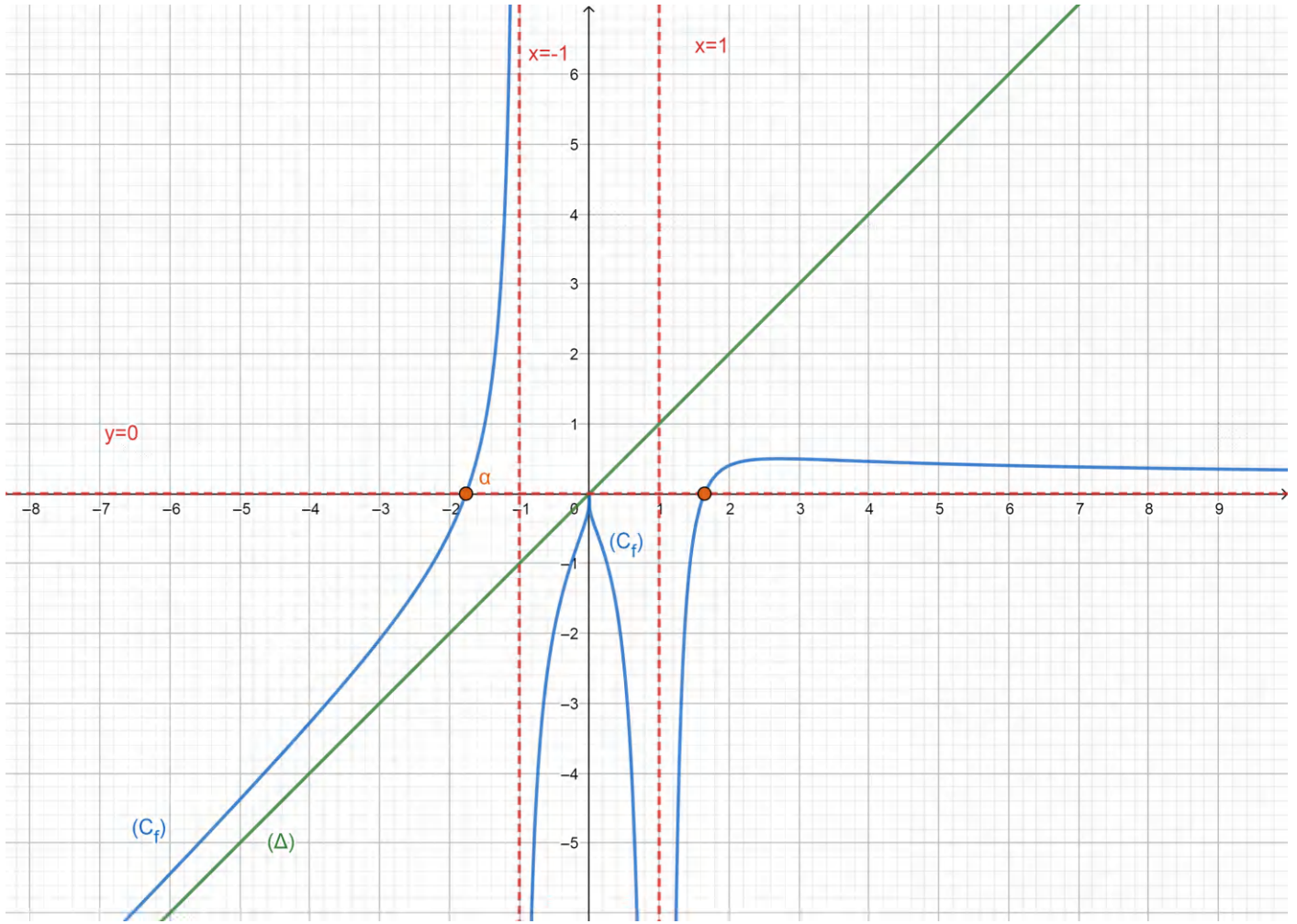
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمات المقاربة: $x = -1$ و $x = 1$ و $y = 0$

• نعين نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل

• نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ)

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -(m^2 - e)$

- لما $-(m^2 - e) < 0$ أي $m^2 - e > 0$ أي $m^2 > e$ أي $|m| > \sqrt{e}$ أي $m \in]-\infty; -\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين وحلين سالبين.
 - لما $-(m^2 - e) = 0$ أي $m^2 - e = 0$ أي $m^2 = e$ أي $|m| = \sqrt{e}$ أي $m = -\sqrt{e}$ و $m = \sqrt{e}$ المعادلة تقبل حل موجب وحل معدوم وحل سالب.
 - لما $0 < -(m^2 - e) < \frac{1}{2}$ أي $-\frac{1}{2} < m^2 - e < 0$ أي $e - \frac{1}{2} < m^2 < e$ أي $|m| > \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ و $|m| < \sqrt{e}$ أي $-\sqrt{e} < m < \sqrt{e}$ و $m \in]-\infty; -\sqrt{e - \frac{1}{2}}[\cup]\sqrt{e - \frac{1}{2}}; +\infty[$ أي
- $$m \in \left] -\sqrt{e - \frac{1}{2}}; -\sqrt{e} \right[\cup \left] \sqrt{e}; \sqrt{e + \frac{1}{2}} \right[$$
- المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

• لما $|m| = \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ أي $m^2 = e - \frac{1}{2}$ أي $m^2 - e = -\frac{1}{2}$ أي $-(m^2 - e) = \frac{1}{2}$

أي $m = -\sqrt{e - \frac{1}{2}}$ و $m = \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ المعادلة تقبل حل مضاعف وحل سالب

• لما $|m| < \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ أي $m^2 < e - \frac{1}{2}$ أي $m^2 - e < -\frac{1}{2}$ أي $-(m^2 - e) > \frac{1}{2}$

أي $-\sqrt{e - \frac{1}{2}} < m < \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ أي $m \in \left] -\sqrt{e - \frac{1}{2}}; \sqrt{e - \frac{1}{2}} \right[$

المعادلة تقبل حل وحيد سالب

04

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} [(\ln x)^3 + 1] = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln x)^3 + 1] = +\infty \end{aligned}$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3 \frac{1}{x} (\ln x)^2$$

لدينا: $g'(1) = 0$ و $g'(x) > 0$ ومنه

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

(2) حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (\ln x)^3 + 1 \\ &\Rightarrow (\ln x)^3 = -1 \\ &\Rightarrow \ln x = -1 \\ &\Rightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة $g(x) = 0$: $s = \{e^{-1}\}$ (3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

(1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right]$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right]$$

$$= -\frac{2}{0^-}$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right]$$

$$= -\frac{2}{0^+}$$

$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right]$$

$$= +\infty$$

- التفسير الهندسي:

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$

(2) تبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ يكون: $f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$

$$f'(x) = 2 \frac{1}{x} \ln x - \left(\frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x)^2} \right)$$

$$= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$$

$$= 2 \left[\frac{(\ln x)^3 + 1}{x(\ln x)^2} \right]$$

$$= \frac{2g(x)}{x(\ln x)^2}$$

(3) استنتاج إشارة $f'(x)$:

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
		4		$+\infty$
				$-\infty$

(III)

1) دراسة تغيرات الدالة h :

- النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty \end{aligned}$$

- دراسة $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{2}{x} \ln x$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه :

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول تغيرات الدالة h :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

2) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} - (\ln x)^2 - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{\ln x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

 (C_h) و (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$ 3) دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين (C_h) و (C_f) :ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x)$:

$$f(x) - h(x) = \frac{2}{-\ln x}$$

لدينا:

$$-\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - h(x)$	+	-	

- الوضعية:

• (C_f) فوق (C_h) لما $x \in]0; 1[$.

• (C_f) تحت (C_h) لما $x \in]1; +\infty[$.

(4) تبين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف:

لدينا:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{-2}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \times \frac{2}{x} \\ &= \frac{-2 \ln x + 2}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2} (1 - \ln x) \end{aligned}$$

لدينا $\frac{2}{x^2} > 0$ ومنه الإشارة من $(1 - \ln x)$:

$$1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$

$$\Rightarrow x = e$$

x	0	e	$+\infty$
$h''(x)$	+	0	-

لدينا $h''(x)$ انعدمت وغيّرت إشارتها ومنه المنحني (C_h) يقبل نقطة انعطاف احداثيها $A(e; 2)$

(5) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A :

$$\begin{aligned} (T): y &= h'(e)(x - e) + h(e) \\ &= \frac{2}{e} \ln e (x - e) + (\ln e)^2 + 1 \\ &= \frac{2}{e} x \end{aligned}$$

(6) حساب $f(e)$:

$$f(e) = (\ln e)^2 + 1 - \frac{2}{\ln e} = 0$$

- الاستنتاج:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة e .

(7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 0$ و $x = 1$

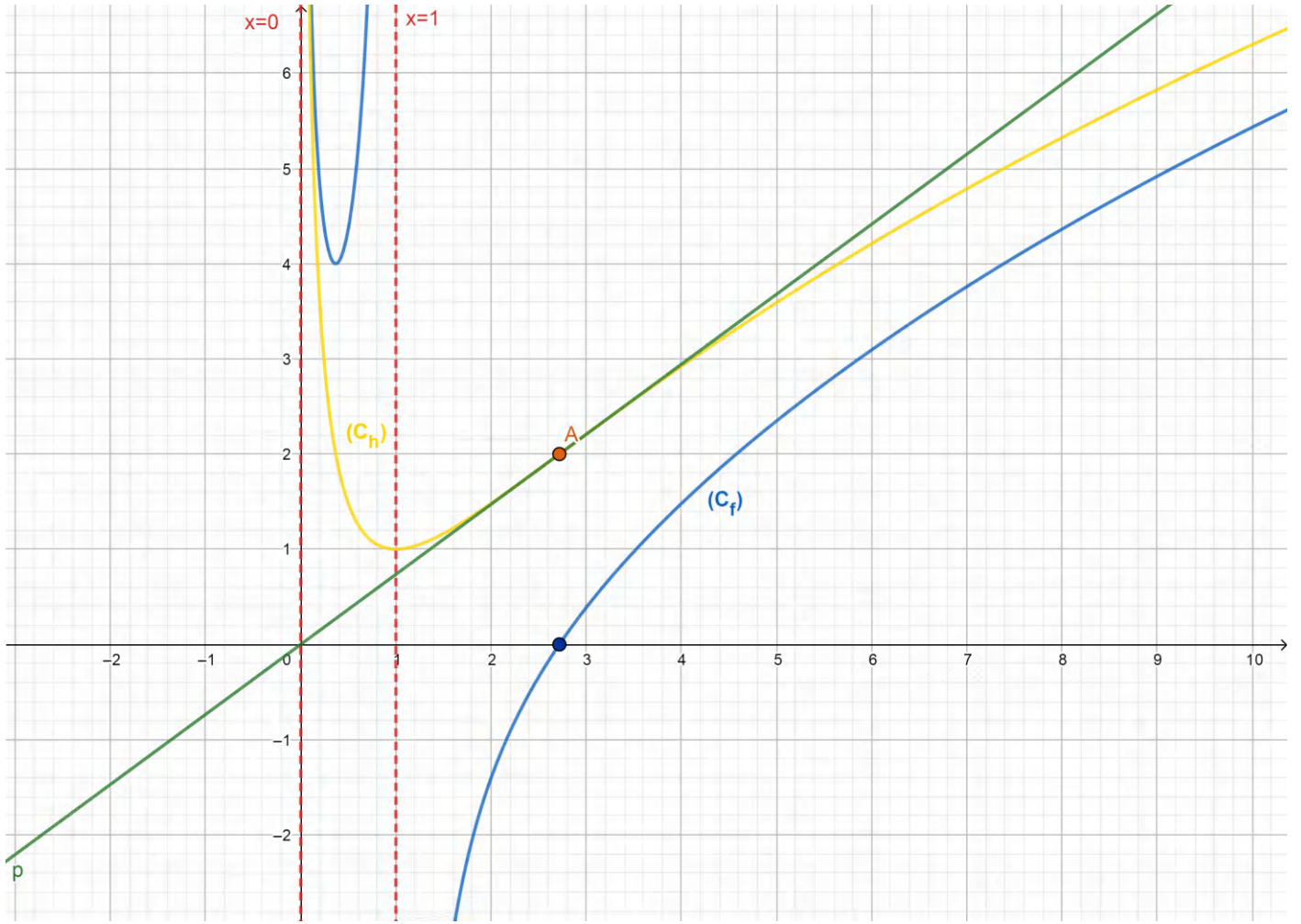
• نرسم المماس (T)

• نعين نقطة انعطاف المنحني (C_h)

• باستعمال جدول تغيرات الدالة h نرسم (C_h)

• نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل

• ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(8) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 e^m (\ln x)^3 + e^m \ln x - \ln x - 2e^m &= 0 \\
 \Rightarrow e^m [(\ln x)^3 + \ln x - 2] &= \ln x \\
 \Rightarrow e^m \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} \right] &= 1 \\
 \Rightarrow e^m [f(x)] &= 1 \\
 \Rightarrow f(x) &= e^{-m}
 \end{aligned}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = e^{-m}$ اذن:

لما $e^{-m} < 4$ أي $-m < \ln 4$ أي $m > -\ln 4$ المعادلة تقبل حل وحيد
لما $e^{-m} = 4$ أي $-m = \ln 4$ أي $m = -\ln 4$ المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف
لما $e^{-m} > 4$ أي $-m > \ln 4$ أي $m < -\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

05

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) أ/ تعيين إشارة $f'(x)$ مع التبرير:نضع α, β, γ حيث:

x	$-\infty$	α	β	1	$\sqrt{3}$	γ
$f'(x)$	...	0	-		0	+

لدينا الدالة f فردية ، معناه:

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

ومنه:

$$-f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

لدينا من جدول التغيرات (المُعطى):

$$x \in]\alpha; \beta[\text{ لما } f'(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{لما } -x \in]\alpha; \beta[\quad \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{لما } x \in]-\beta; -\alpha[\quad f'(x) < 0$$

ولدينا كذلك:

$$x \in]\sqrt{3}; \gamma[\text{ لما } f'(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{لما } -x \in]\sqrt{3}; \gamma[\quad \underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{لما } x \in]-\gamma; -\sqrt{3}[\quad f'(x) > 0$$

$$\text{ولدينا: } x = \sqrt{3} \text{ لما } f'(x) = 0 \quad \text{معناه} \quad -x = \sqrt{3} \text{ لما } f'(-x) = 0 \quad \text{ومنه } x = -\sqrt{3}$$

$$\text{ومنه: } \alpha = -\sqrt{3} \quad \text{و} \quad \beta = -1 \quad \text{و} \quad \gamma = +\infty$$

اذن:

$$x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[\quad \text{لما: } f'(x) > 0$$

$$x \in]-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}[\quad \text{لما: } f'(x) < 0$$

$$\text{ب/ تبين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty \quad \text{لدينا من الجدول السابق:}$$

نضع $x = -t$ (الدالة f فردية أي: $f(-t) = -f(t)$)
ومنه:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{-t \rightarrow -\infty} [f(-t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(-t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [-f(t)] \\ &= - \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] \\ &= - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]}_{= +\infty} \\ &= -(+\infty) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

- تبين أن: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$

بنفس الفكرة السابقة (نضع $x = -t$) نجد: $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$

- تبين أن: $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$

لدينا:

$$\begin{aligned}\underbrace{f(-\sqrt{3})}_{f(-\sqrt{3}) = -f(\sqrt{3})} &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\ \Rightarrow -f(\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \\ \Rightarrow f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

ج/ اكمال جدول تغيرات الدالة f السابق:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$		$+\infty$	$\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$	$+\infty$

(2) التمثيل البياني:

قبل أن نشرع في التمثيل البياني، نستخرج من جدول التغيرات المستقيمات المقاربة
لدينا:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$.

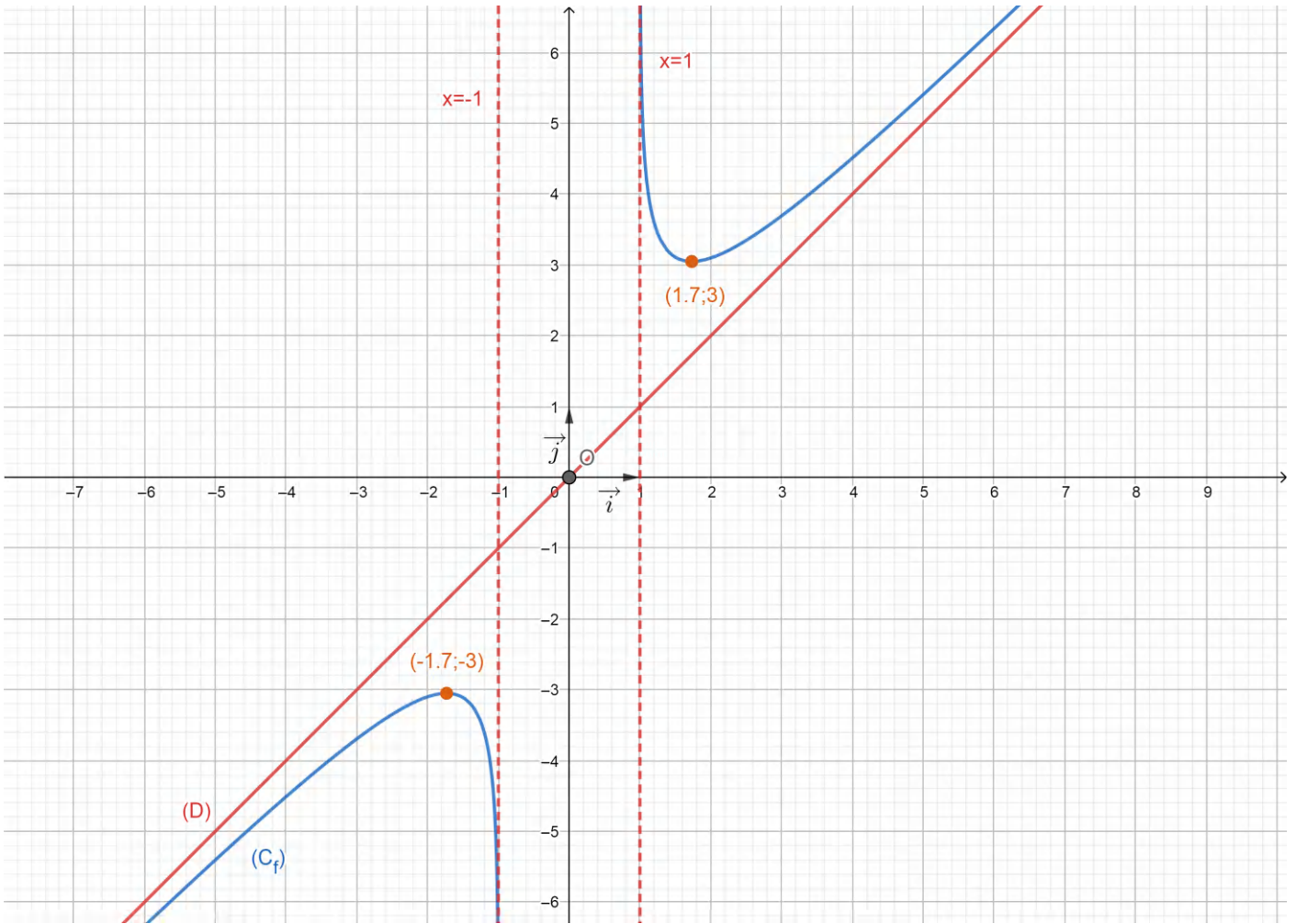
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = -1$ و $x = 1$

• نرسم القارب المائل (D)

• نعين النقط الحدية

• ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(3) تبين أن: $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a + \frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{c + \frac{2}{x-1}} \\ &= a - \frac{\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{c(x-1) + 2}{x-1}} \\ &= a - \frac{\frac{2}{x-1}}{c(x-1) + 2} \end{aligned}$$

$$= a - \frac{2}{c(x-1)^2 + 2(x-1)}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} f'(\sqrt{3}) = 0 \\ f'(-\sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \\ a - \frac{2}{c(-\sqrt{3}-1)^2 + 2(-\sqrt{3}-1)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \dots (*) \\ a - \frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} = 0 \dots (**) \end{cases}$$

ب طرح (*) من (**): نجد:

$$-\frac{2}{c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} + \frac{2}{c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)} = 0$$

$$\Rightarrow c(\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1) = c(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)$$

$$\Rightarrow c(4 + 2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} - 2 = c(4 - 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2$$

$$\Rightarrow c(4 + 2\sqrt{3}) - c(4 - 2\sqrt{3}) - 4\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow c(4\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1}$$

نعوض قيمة c في (*) نجد:

$$a - \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)} = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{4 - 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{3} + b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right) = \sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) \\
&\Rightarrow b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right) = \ln(2 + \sqrt{3}) \\
&\Rightarrow b = \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln\left(\frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2\sqrt{3} - 2 + 3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}\right) \\
&\Rightarrow b = \ln(1) \\
&\Rightarrow \boxed{b = 0}
\end{aligned}$$

(4) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} &= 0 \Rightarrow \frac{xe^m - xe^x - e^m - e^x}{e^m - e^x} = 0 \\
&\Rightarrow xe^m - xe^x - e^m - e^x = 0 \\
&\Rightarrow e^m(x - 1) - e^x(x + 1) = 0 \\
&\Rightarrow e^m(x - 1) = e^x(x + 1) \\
&\Rightarrow e^m = e^x \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \\
&\Rightarrow m = \ln\left[e^x \times \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)\right] \\
&\Rightarrow m = \ln(e^x) + \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(\frac{x+1+1-1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$ ومنه:

لما	$m < f(-\sqrt{3})$	أي	$m \in]-\infty; f(-\sqrt{3})[$	للمعادلة حلان سالبان
لما	$m = f(-\sqrt{3})$			للمعادلة حل مضاعف هو $x = -\sqrt{3}$
لما	$f(-\sqrt{3}) < m < f(\sqrt{3})$	أي	$m \in]f(-\sqrt{3}); f(\sqrt{3})[$	للمعادلة لا تقبل حلول
لما	$m = f(\sqrt{3})$			للمعادلة حل مضاعف هو $x = \sqrt{3}$
لما	$m > f(\sqrt{3})$	أي	$m \in]f(\sqrt{3}); +\infty[$	للمعادلة حلان موجبان

(II) دراسة تغيرات الدالة g:

لدينا: $g(x) = \ln(f(x))$

نلاحظ أن: $g(x) = k \circ f = k(f(x))$ حيث: $k(x) = \ln x$

- حساب النهايات:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x)] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty$

اذن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)] = +\infty$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [k(x)] = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

لدينا: $f(x) > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

- جدول تغيرات الدالة g:

x	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\sqrt{3})$	$+\infty$

06

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

(1) / حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right] = +\infty$$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right]$$

نضع $t = \ln x$ نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{x} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^2}{e^t} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^n}{e^t} \right] = 0 \text{ لأن}$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $x = 0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\left(2 \frac{1}{x} \ln x\right)(x) - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

$$1) \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$2) 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2$$

$$\Rightarrow x = e^2$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$2 - \ln x$	+		+	0
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$	0	$4e^{-2}$	0

(2) أ/ كتابة معادلة المماس (T_m):

$$\begin{aligned}
 (T_m): y &= f'(m)(x - m) + f(m) \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) (x - m) + \frac{(\ln m)^2}{m} \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x - \frac{(2 - \ln m) \ln m}{m} + \frac{(\ln m)^2}{m} \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x + \frac{2(\ln m)^2 - 2 \ln m}{m} \\
 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) x + \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m}
 \end{aligned}$$

ب/ تعيين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0; 0)$:

(T_m) يشمل المبدأ معناه:

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{(2 - \ln m) \ln m}{m^2} \right) (0) + \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} \\
 &\Rightarrow \frac{2 \ln m (\ln m - 1)}{m} = 0 \\
 &\Rightarrow 2 \ln m (\ln m - 1) = 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 2 \ln m = 0 \\ \ln m - 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \ln m = 0 \\ \ln m = 1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = e \end{cases}
 \end{aligned}$$

ج/ كتابة معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها:

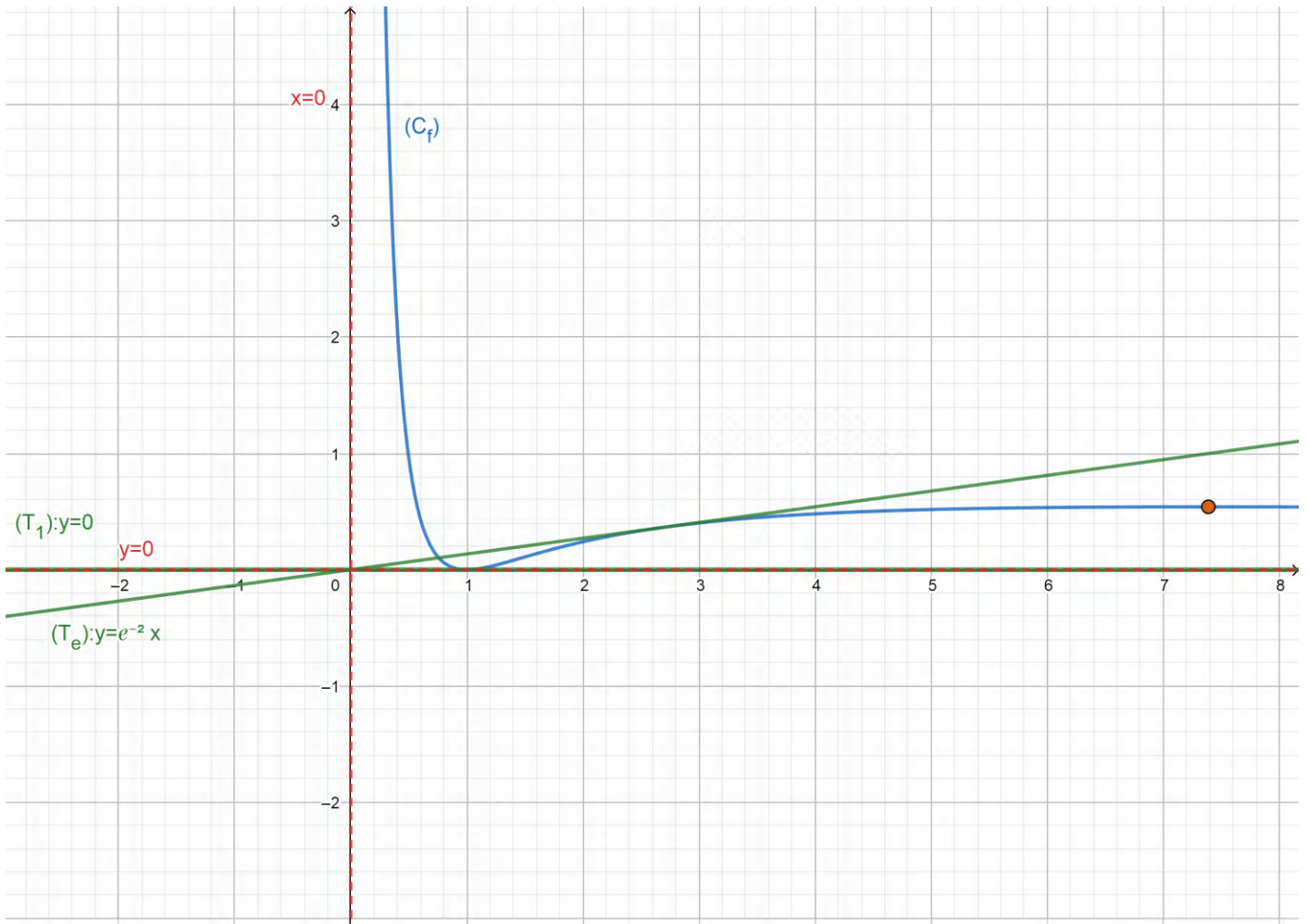
$$\begin{aligned}
 (T_1): y &= 0x + 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (T_e): y &= \left(\frac{(2 - 1) \times 1}{e^2} \right) x + \frac{2(1 - 1)}{e} \\
 &= \frac{1}{e^2} x \\
 &= e^{-2} x
 \end{aligned}$$

(3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=0$ و $y=0$
- نعين النقطة الحدية ذات الاحداثيات $(e^2; 4e^{-2})$
- نرسم المماسين: (T_e) و (T_1)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(II)

1) تبين أن الدالة g فردية:



دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية):

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \quad \text{لتبيين أن الدالة } f \text{ فردية} \quad \text{نبين أن}$$

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \quad \text{لتبيين أن الدالة } f \text{ زوجية} \quad \text{نبين أن}$$

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(\ln|-x|)^2}{-x} \\ &= -\frac{(\ln|x|)^2}{x} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة g فردية.

(2) تبين أنه يمكن رسم (C_g) منحنى الدالة g انطلاقاً من (C_f) :

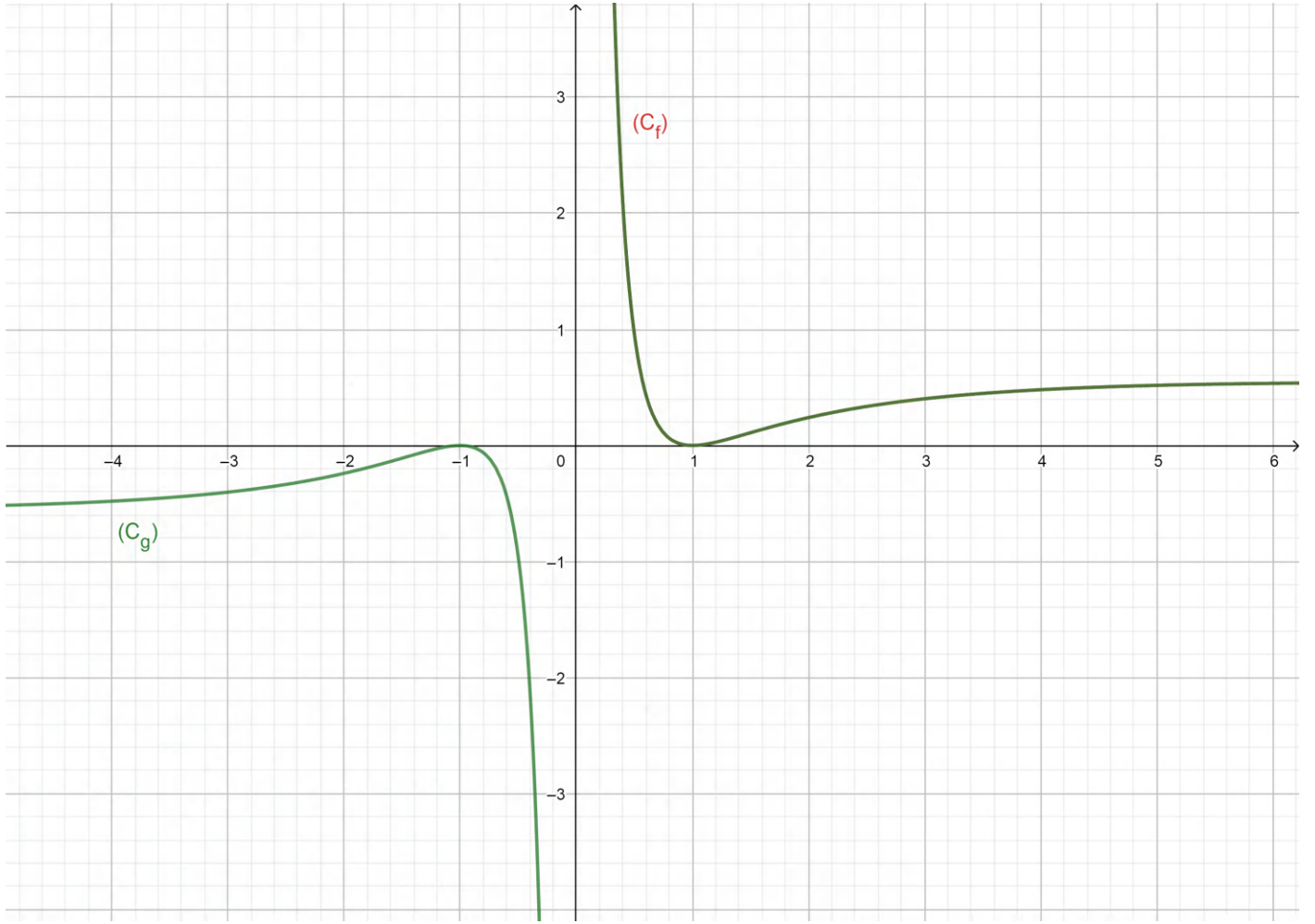
لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ \frac{(\ln(-x))^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ -\frac{(\ln(-x))^2}{-x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$: (C_g) ينطبق على (C_f)

ولما $x < 0$: (C_g) يناظر (C_g) بالنسبة للمبدأ

- تمثيل (C_g)



07

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{-\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right)}_{-\infty} \right] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$.ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{x}_{+\infty} + \frac{1}{2} + \underbrace{\ln x}_{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right)}_{+\infty} \right] \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

(2) أ/ تبين أن لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$ وأن لكل x من $[1; +\infty[$:

$$(x - 1) + \ln x \geq 0$$

نضع: الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x - 1 + \ln x$
 لدينا:

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

لدينا: $h'(x) > 0$ ولدينا: $h(1) = 0$ ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نجد أن: لكل x من المجال $]0; 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$

وأن لكل x من المجال $[1; +\infty[$: $(x - 1) + \ln x \geq 0$

ب/ تبين أنه من أجل كل من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{2}{x} \ln x$$

$$= \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

$x > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة $h(x)$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

(3) دراسة الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحني (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \ln x \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \frac{1}{2} \ln x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

ومنه:

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$\frac{1}{2} \ln x - 1$	-	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	-	+

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما: $]0; 1[\cup]e^2; +\infty[$
- (C_f) يقطع (D) في النقطتين: $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ و $B\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$
- (C_f) تحت (D) لما: $]1; e^2[$.

(4) تعيين احداثي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيه المماس (T) موازيا للمستقيم (D) :

المماس (T) يوازي المستقيم (D) معناه:

$$\begin{aligned}
 f'(a) = 1 &\Rightarrow \frac{a - 1 + \ln a}{a} = 1 \\
 &\Rightarrow a - 1 + \ln a = a \\
 &\Rightarrow \ln a = 1 \\
 &\Rightarrow a = e
 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
 (T): y &= f'(e)(x - e) + f(e) \\
 &= x - e + e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

اذن المستقيم (T) مماس لـ (C_f) في النقطة $\omega(e; e)$

(5) أ/ تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x - (x - 1 + \ln x)}{x^2} \\
 &= \frac{x + 1 - x + 1 - \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{2 - \ln x}{x^2}
 \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها:

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2 - \ln x)$

$$\begin{aligned}
 2 - \ln x = 0 &\Rightarrow \ln x = 2 \\
 &\Rightarrow x = e^2
 \end{aligned}$$

ومنه:

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

لدينا $f''(x)$ تنعدم وتغير إشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $B\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $x = 0$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D)
- نعين A و B نقط تقاطع (D) مع (C_f)
- نرسم المماس: (T)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = x - 2m$ ومنه:

المعادلة لا تقبل حلول	$m > 0$	أي	$-2m < 0$	لما
المعادلة تقبل حل مضاعف	$m = 0$	أي	$-2m = 0$	لما
المعادلة تقبل حلان	$-\frac{1}{4} < m < 0$	أي	$0 < -2m < \frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حلان أحدهما مضاعف	$m = -\frac{1}{4}$	أي	$-2m = \frac{1}{2}$	لما
المعادلة تقبل حلان	$m < -\frac{1}{4}$	أي	$-2m > \frac{1}{2}$	لما

(1)

(1) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1) \right]$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{x}{x+1} \right] = -\frac{1}{0^+} = -\infty \text{ لأن:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1) \right]$$

$$= -\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2 \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1-2x-2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط

$$-(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$			

(3) أ/ حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

ب/ تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72 < \alpha < -0.71$:

لدينا $h(0) = 0$

اذن منحني الدالة g يقطع محور الفواصل في المبدأ

ولدينا: $g(-0.72) = -0.02$ و $g(-0.71) = 0.02$

ولدينا $g(-0.72) \times g(-0.71) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] - 0.72; -0.71[$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $] - 1; +\infty[$:

x	-1	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها وتفسير النتائج:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right]$$

نضع: $k(x) = \ln(x+1)$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x+1)] = k'(0) = 1$$

ومنه

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] = 0$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$.

(2) / تبين أنه من أجل كل x من D_f $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+1}x^2 - 2x \ln(x+1)}{x^4} \\ &= \frac{\frac{1}{x+1}x - 2 \ln(x+1)}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	-1	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0
x^3	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	0

(3) تبين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2 \ln(\alpha+1) \\ &\Rightarrow 2 \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{\alpha+1} \\ &\Rightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\ln(\alpha+1)}{\frac{\alpha^2}{\alpha}} \\ &= \frac{2(\alpha+1)}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha^2(\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} -0.72 < \alpha < -0.71 \\ 0.28 < \alpha + 1 < 0.29 \dots (*) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$-1.44 < 2\alpha < -1.42 \dots (**)$$

بضرب (*) في (**) نجد:

$$\begin{aligned} -0.41 < 2\alpha(\alpha + 1) < -0.39 \\ -2.56 < \frac{1}{2\alpha(\alpha + 1)} < -2.43 \end{aligned}$$

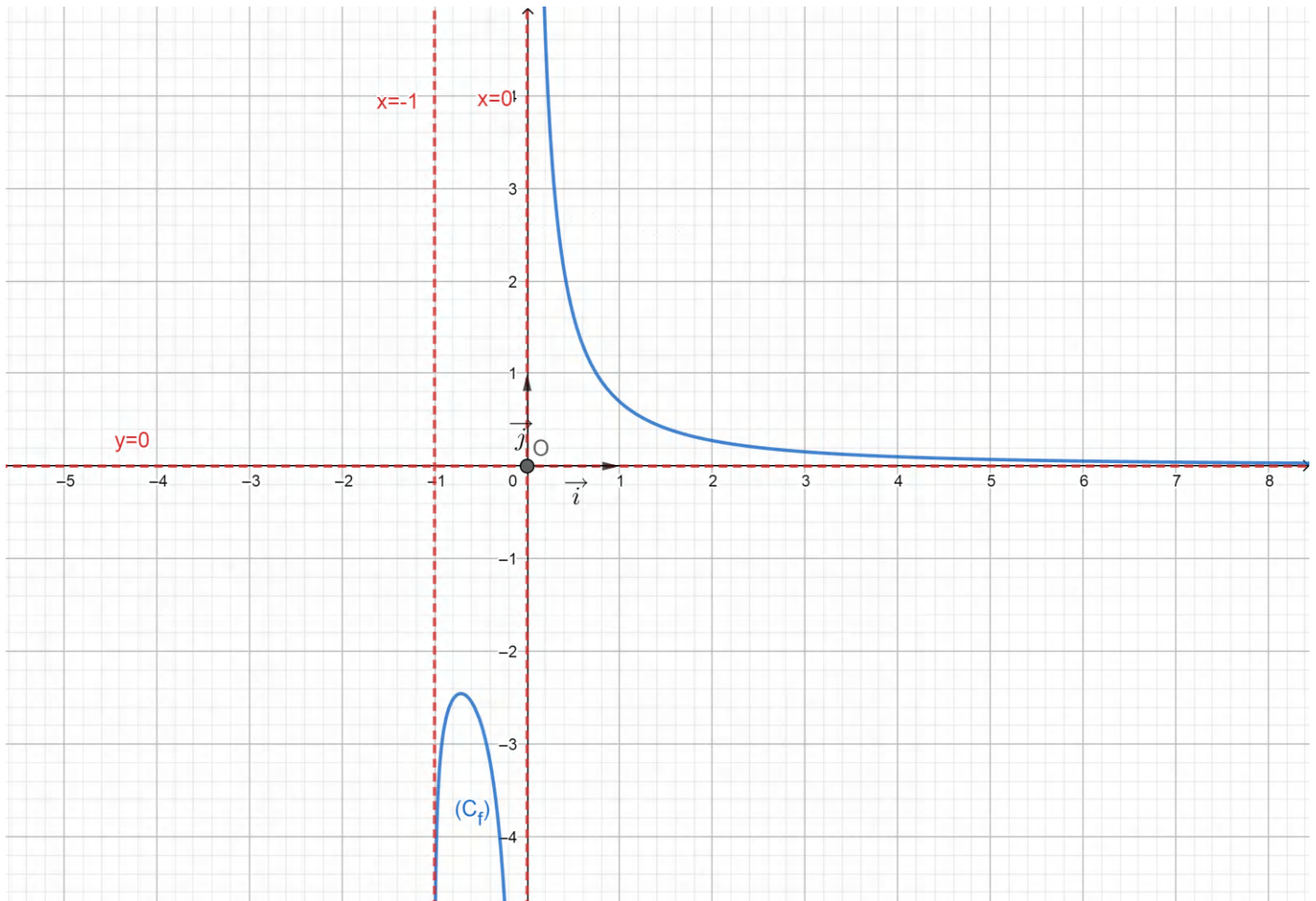
اذن:

$$-2.56 < f(\alpha) < -2.43$$

4 التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=0$ و $x=-1$ و $y=0$
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



5 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \ln m$ ومنه:

لما	$\ln m < f(\alpha)$	أي	$m < e^{f(\alpha)}$	للمعادلة حلان سالبان
لما	$\ln m = f(\alpha)$	أي	$m = e^{f(\alpha)}$	للمعادلة حل مضاعف
لما	$f(\alpha) < \ln m < 0$	أي	$e^{f(\alpha)} < m < 1$	للمعادلة لا تقبل حلول
لما	$\ln m > 0$	أي	$m > 1$	للمعادلة حل وحيد موجب

(1) أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) \right] \\ &= \ln \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= -\ln 2\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = -\ln 2$ ب/ تبين أن: $f(x) = x + \ln 2 + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{2e^{2x} \left(1 + \frac{1}{2e^{2x}} \right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)} \right) \\ &= \ln \left(\frac{2e^{2x}}{e^x} \right) + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2e^{2x}}}{1 + \frac{2}{e^x}} \right) \\ &= \ln(2e^x) + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right) \\ &= \ln 2 + x + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)\end{aligned}$$

ج/ استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln 2 + \underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)}_0 \right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

- دراسة $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{4e^{2x}(e^x + 2) - e^x(2e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)^2} \right)}{\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right)} \\ &= \frac{4e^{2x}(e^x + 2) - e^x(2e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)} \\ &= \frac{4e^{3x} + 8e^{2x} - 2e^{3x} - e^x}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)} \\ &= \frac{e^x(2e^{2x} + 8e^x - 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{cases} e^x > 0 \\ e^x + 2 > 0 \\ 2e^{2x} + 1 > 0 \end{cases}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^{2x} + 8e^x - 1)$:

$$2e^{2x} + 8e^x - 1 = 0$$

نضع $e^x = t$ أي $x = \ln t$

فنجد:

$$2t^2 + 8t - 1 = 0$$

لدينا:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(2)(-1) = 72 = (6\sqrt{2})^2$$

لدينا: $\Delta > 0$ ومنه:

$$\begin{aligned} \begin{cases} t_1 = \frac{-8 + 6\sqrt{2}}{4} = -2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ t_2 = \frac{-8 - 6\sqrt{2}}{4} = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \ln t_1 = \ln \left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \right) \\ x_2 = \ln t_2 \text{ (غير ممكن)} \end{cases} \end{aligned}$$

ولدينا أيضا $f(0) = 0$ ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$\ln\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\ln 2$	$f\left(\ln\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right)$	0	$+\infty$

3) أ/ تبين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته:

◀ شاهد هذا التذكير ▶

(اثبات ان منحني يقبل مستقيم مقارب مائل)

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2}\right) \\
 &= x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) \\
 &= y + \varphi(x)
 \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases}
 \varphi(x) = \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) \\
 y = x + \ln 2
 \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$\begin{aligned}
 f(x) - y = 0 &\Rightarrow \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right) = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} = 1 \\
 &\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}e^{-2x} = 1 + 2e^{-x} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{-x} - 2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-x} - 2 &= 0 \\ \Rightarrow e^{-x} &= 4 \\ \Rightarrow -x &= \ln 4 \\ \Rightarrow x &= -\ln 4 \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} x &> -\ln 4 \\ \Rightarrow -x &< \ln 4 \\ \Rightarrow e^{-x} &< 4 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-x} &< 2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-x} - 2 &< 0 \\ \Rightarrow e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{-x} - 2 \right) &< 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-2x} - 2e^{-x} &< 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{-x} + 1 &< 2e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

لدينا: $2e^{-x} + 1 > 0$ يمكن القسمة عليه

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1} &< 1 \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{\frac{1}{2} e^{-x} + 1}{2e^{-x} + 1} \right) &< 0 \end{aligned}$$

ومنه لما $x > -\ln 4$: $f(x) - y < 0$

بنفس الطريقة نجد: لما $x < -\ln 4$: $f(x) - y > 0$

ومنه:

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما $x \in]-\infty; -\ln 4[$.
- (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الاحداثيات: $(-\ln 4; -\ln 2)$.
- (C_f) تحت (D) لما $x \in]-\ln 4; +\infty[$.

4) تبين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) تنتمي إليه - أي إلى (C_f) -

نحدد أولاً نقطة تقاطع المستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مع المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = -\ln 2$.
لدينا:

$$\begin{cases} y = x + \ln 2 \\ y = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \ln 2 = -\ln 4 \\ y = -\ln 2 \end{cases}$$

ومنه نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي $\omega(-\ln 4; -\ln 2)$

ولدينا: $f(-\ln 4) = -\ln 2$ ومنه $\omega \in (C_f)$

(5) كتابة معادلة للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا:

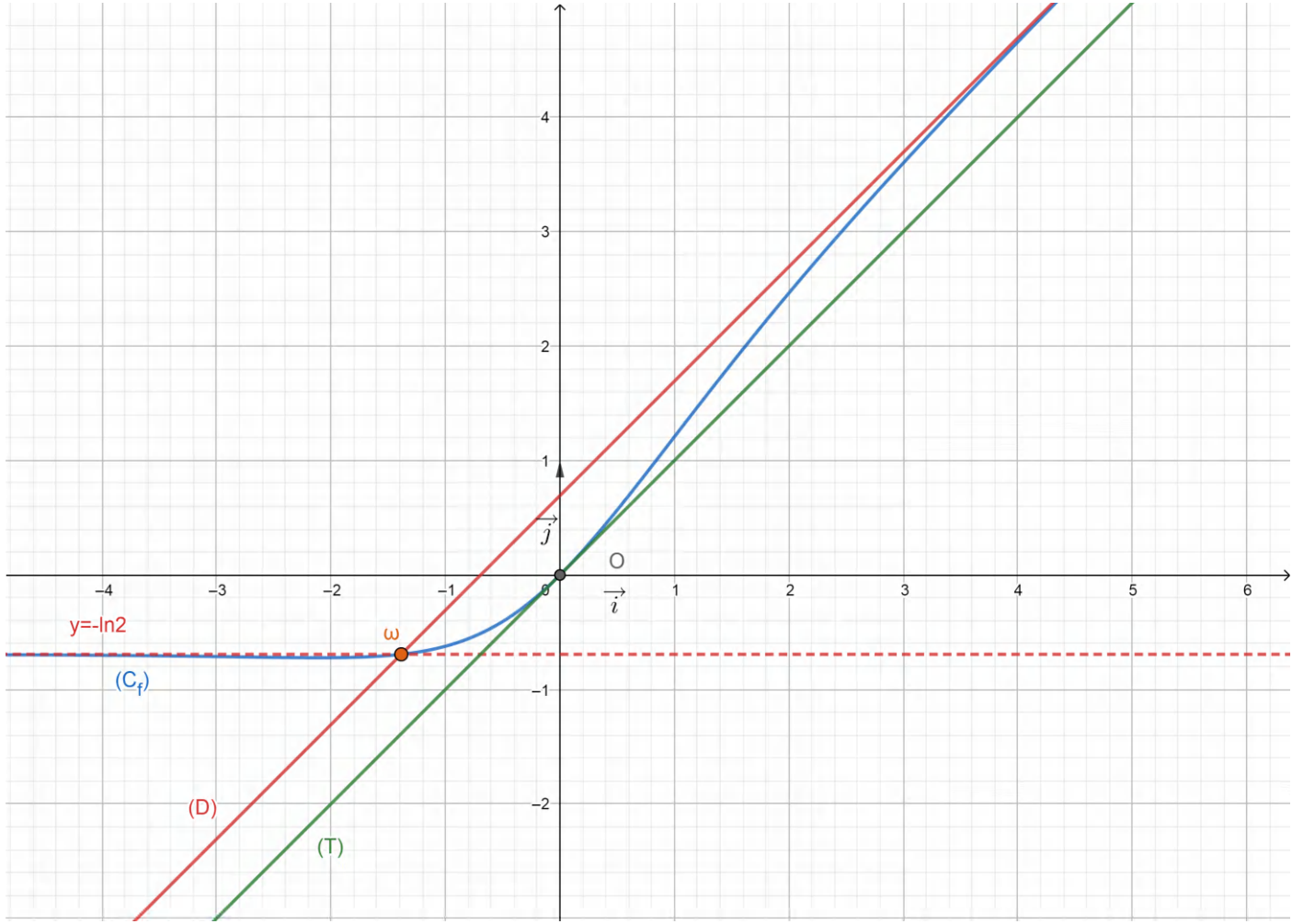
$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0) \\ = x$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مماس للمنحني (C_f) عند المبدأ.

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي: $y = -\ln 2$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D)
- نعين ω نقطة تقاطع المستقيمتين المقاربتين.
- نرسم المماس (T).
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 x - \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{me^x + 2m} \right) &= 0 \\
 \Rightarrow x &= \ln \left(\frac{1}{m} \frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) \\
 \Rightarrow x &= \ln \left(\frac{1}{m} \right) + \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) \\
 \Rightarrow x &= -\ln m + f(x) \\
 \Rightarrow f(x) &= x + \ln m
 \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m = x + \ln m$$

ومنه:

لما	$\ln m < 0$	أي	$m < 1$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$\ln m = 0$	أي	$m = 1$	للمعادلة حل مضاعف
لما	$0 < \ln m < \ln 2$	أي	$1 < m < 2$	للمعادلة حلان

لما	$\ln m = \ln 2$	أي	$m = 2$	للمعادلة حل مضاعف
لما	$\ln m > \ln 2$	أي	$m > 2$	للمعادلة حل وحيد

10

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{\ln x}_{-\infty} + \underbrace{x}_0 - 3 \right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\ln x}_{+\infty} + \underbrace{x}_{+\infty} - 3 \right] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) تبين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومنتزيدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا: $g(2.2) = -0.01$ و $g(2.11) = 0.002$

ولدينا: $g(2.2) \times g(2.11) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.2 < \alpha < 2.21$

3) تعيين إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

(1) حساب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(\underbrace{\ln x}_{+\infty} - 2 \right) \right]$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(\underbrace{\ln x}_{-\infty} - 2 \right) \right]$$

$$= +\infty$$

(2) أ/ حساب $f'(x)$ ، ودراسة اشارتها:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} (\ln x - 2) + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} (\ln x - 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} (\ln x - 2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{x^2} (\ln x + x - 3) \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) تعيين دون حساب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] &= f'(\alpha) \\ &= \frac{g(\alpha)}{\alpha^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماس مواز لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α .

(4) تبين أن: $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

لدينا:

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow \ln \alpha + \alpha - 3 = 0 \\ &\Rightarrow \ln \alpha = 3 - \alpha \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (\ln \alpha - 2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (3 - \alpha - 2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (1 - \alpha) \\ &= \frac{(\alpha - 1)(1 - \alpha)}{\alpha} \\ &= \frac{-(\alpha - 1)^2}{\alpha} \end{aligned}$$

(5) حل المعادلة $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln x - 2) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = 0 \\ \ln x - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \ln x = 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases} \end{aligned}$$

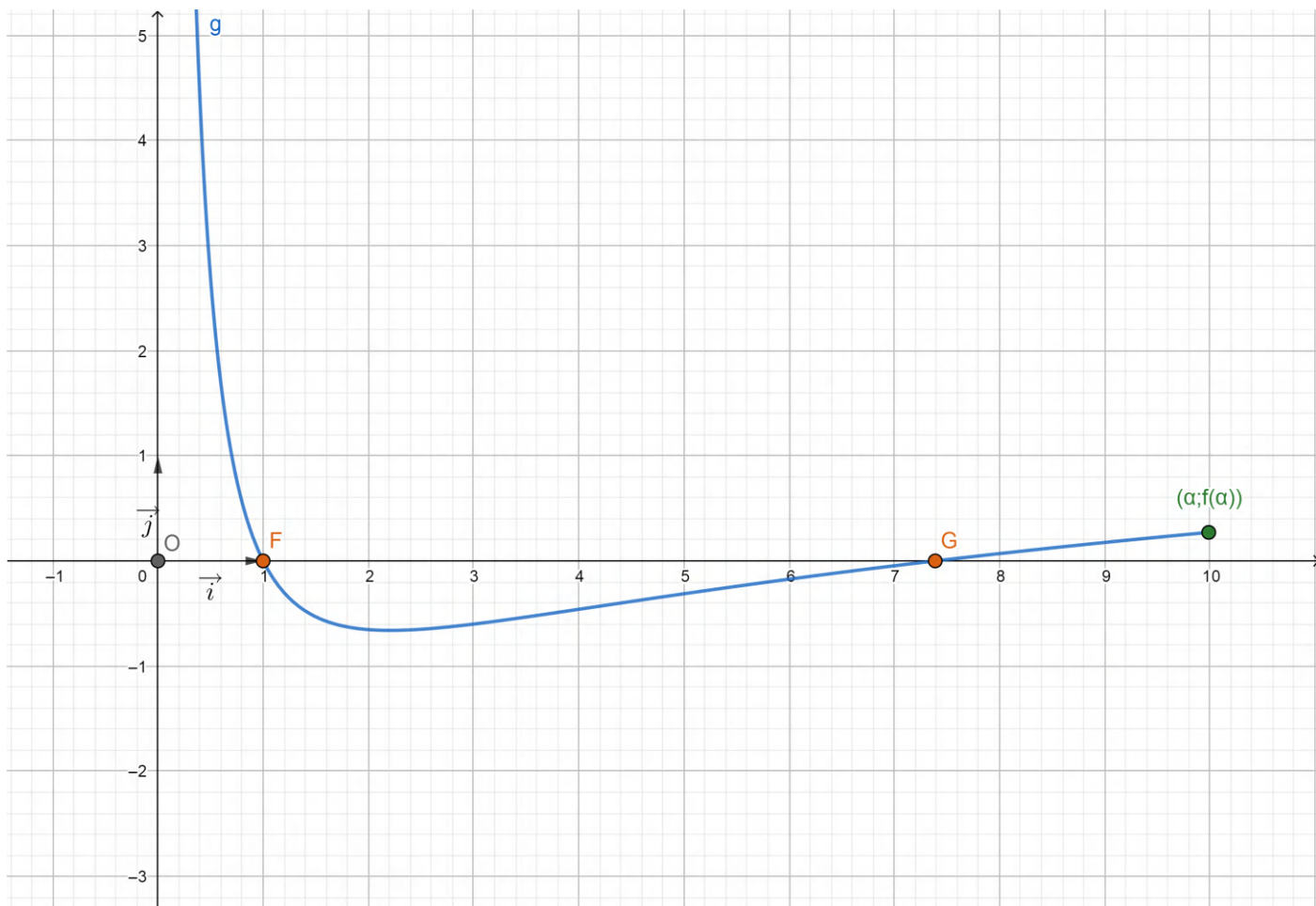
- التفسير الهندسي:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين: $A(1; 0)$ و $B(e^2; 0)$.

(6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$
- نعين النقطتين A و B
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{x^2}_{+\infty} - 2 + \underbrace{\ln x}_{+\infty} \right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{x^2}_0 - 2 + \underbrace{\ln x}_{-\infty} \right] = -\infty$$

- دراسة $g'(x)$:لدينا: الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ومنه:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

لدينا $x > 0$ و $2x^2 + 1 > 0$ ومنه:- جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) أ/ تبين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$:لدينا الدالة g مستمرة ومنتزعة على المجال $]0; +\infty[$

$$\text{ولدينا: } \lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$ ب/ التحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$:لدينا: $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) = 0.02$

ولدينا: $0 < g(1.31) \times g(1.32) < 0$ ، إذن $1.31 < \alpha < 1.32$

(3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

(1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{x^2}_{+\infty} + \left(2 - \underbrace{\ln x}_{+\infty} \right)^2 \right]$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{x^2}_0 + \left(2 - \underbrace{\ln x}_{-\infty} \right)^2 \right]$$

$$= +\infty$$

(2) تبين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$:

لدينا: الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

$$f'(x) = 2x + 2 \left(-\frac{1}{x} \right) (2 - \ln x)$$

$$= 2x - \frac{2(2 - \ln x)}{x}$$

$$= \frac{2(x^2 - 2 + \ln x)}{x}$$

$$= \frac{2}{x} g(x)$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

(3) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) تبين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2$$

$$= \alpha^2 + (2 - 2 - \alpha^2)^2$$

$$= \alpha^2 + \alpha^4$$

$$= \alpha^2(1 + \alpha^2)$$

وهو المطلوب.

(5) استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال: $]0; +\infty[$:

لدينا $f(\alpha) > 0$ ومنه نجد:

x	0	$+\infty$
$f(x)$		+

(III)

(1) تبين أن المسافة AM تُعطى بـ $AM = \sqrt{f(x)}$:

لدينا M نقطة من المنحني (C_h) فاصلتها x_m أي تكتب على الشكل:

$M(x; h(x))$ أي: $M(x; \ln x)$ ومنه المسافة AM تُعطى بـ:

$$AM = \sqrt{(x - 0)^2 + (\ln x - 2)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (-(2 - \ln x))^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2}$$

$$= \sqrt{f(x)}$$

(2) / برهان أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$:

نلاحظ أن:

$$k(x) = (u \circ f)(x)$$

حيث:

$$u(x) = \sqrt{x}$$

لدينا الدالة u متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$

والدالة f موجبة تماماً على $]0; +\infty[$

اذن $(u \circ f)(x)$ متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$

ومنه للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$

ب/ برهان أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) :

بما أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير في المجال $]0; +\infty[$

فإن الدالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي $x = \alpha$

ومنه المسافة أصغرية لما $x = \alpha$

إذن:

$$B(\alpha; \ln \alpha) \Leftrightarrow B(\alpha; 2 - \alpha^2)$$

ج/ برهان أن: $AB = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$:

$$AB = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2}$$

f دالة معرفة على مجال I

و g دالة معرفة على المجال

(I)

• إذا كانت الدالتين f و g لهما

نفس اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$

(g) متزايدة على I

• إذا كانت الدالتين f و g

متعاكستان في اتجاه التغير

فإن: $(f \circ g)$ متناقصة على I

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} \\
&= \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} \\
&= |\alpha|\sqrt{1 + \alpha^2} \\
&= \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}
\end{aligned}$$

(3) تبرير أن المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (C_h) في النقطة B :

لدينا:

ميل المستقيم المماس لـ (C_h) في النقطة B هو:

$$h'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AB) هو :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\
&= \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha - 0} \\
&= -\frac{\alpha^2}{\alpha} \\
&= -\alpha
\end{aligned}$$

تذكر أنه | ◀ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 ▶

لدينا:

$$-\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -1$$

ومنه المستقيم (AB) عمودي على مماس المنحنى (C_h) في النقطة B.

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶