

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \left(\frac{1 + \sqrt{u_n}}{2} \right)^2$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 1$.

2. بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{u_n})(1 + 3\sqrt{u_n})$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر تقاربها.

II. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \sqrt{u_n} - 1$.

1. أ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حددها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)^2$ واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة منها 6 كريات بيضاء مرقمة ب: 0, 2, 2, 2, 2, 4 و كريتين سوداوين مرقمتين ب: 0, 1.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس ونعتبر الحدثين A و B بحيث: الحدث A : الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون والحدث B : الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. احسب كلا من $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب

2. بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ ، ثم استنتج كلا من $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب أصغر الأرقام المحصل عليها أو يساويها. ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

4. نسحب الآن عشوائيا n كرية على التوالي بالإرجاع بحيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ونسمي C الحدث الحصول على n كرية سوداء.

✓ بين أن $P(C) = \left(\frac{1}{4} \right)^n$ ، ثم أوجد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $P(\bar{C}) \geq 0,99$.

التمرين الثالث: 05 نقاط

1. جد العددين المركبين α و β بحيث:
$$\begin{cases} 2\bar{\alpha} - \sqrt{3}\bar{\beta} = 3\sqrt{3} + i \\ \frac{\alpha i}{\alpha i - \beta} = 0 \end{cases}$$

II. في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها

$$z_C = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A, z_A = \sqrt{3} + i$$

1. اكتب z_B على الشكلين المثلثي والجبري، ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

2. أ) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}z_A}\right)^n$ تخيليا بحثا سالبا تماما.

ب) تحقق أن صورة B صورة A بتحويل نقطي S يطلب تعيين طبيعته وتحديد عناصره المميزة.

3. أ) بين أن $\frac{z_C}{z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث AOC .

ب) تحقق أن $z_B - z_A = z_C$ ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $AOCB$.

ج) عين طبيعة المجموعة (E) مجموعة النقط $M(Z)$ بحيث $\left|\frac{\bar{z} - \sqrt{3} + i}{\frac{\sqrt{2}}{2}iz}\right| = \left|\frac{z_B}{z_A}\right|$ ، ثم عين صورتها

بالتحويل النقطي S .

التمرين الرابع: 07 نقاط

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$			$1+5e(-2)$	
		$1-e$			1

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{2x} + 1$ والجدول المقابل يمثل جدول تغيراتها.

1. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما العدد 2 والآخر α بحيث $0,4 < \alpha < 0,5$.

2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-x^2 + x)e^{2-x} + x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيتهما.

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) إذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

ب) بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـ (Δ) .

4. احسب $f(0)$ ، ثم أنشئ (Δ) ومثل (C_f) على المجال $[0; +\infty[$. يعطى $f(\alpha) \approx 1,65$.

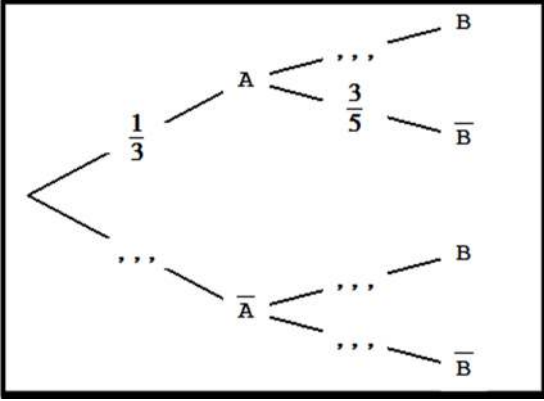
5. أ) بين أن الدالة H المعرفة بـ: $H(x) = (x^2 + x + 1)e^{2-x}$ دالة أصلية للدالة $f(x) = (-x^2 + x)e^{2-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب المساحة A للحيز المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 04.5 نقطة

يحتوي وعاء U على ثلاث كريات متماثلة مرقمة بـ: $-1, 0, 1$ ، ويحتوي وعاء V على خمس كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات حمراء وكريتين بيضاوين. نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بالإرجاع من الوعاء U فإذا كان مجموع رقميهما معدوماً نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع من الوعاء V وإذا كان مجموع رقميهما غير معدوماً نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الوعاء V .
نسمي الحدث A الحصول على كرتين مجموع رقميهما معدوم من الوعاء U .
نسمي الحدث B الحصول على كرتين من نفس اللون من الوعاء V .



1. بين أن $P(A) = \frac{1}{3}$ وأن $P_A(\bar{B}) = \frac{3}{5}$.
2. انقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة.
3. احسب كلا من $P(\bar{B})$ و $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ، ثم استنتج $P_B(\bar{A})$.
4. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بعملية سحب كرتين من نفس اللون من الوعاء V العدد α^2 و يرفق بسحب كرتين مختلفتين في اللون العدد α بحيث α عدد صحيح غير معدوم.

- أ) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب بدلالة α أمله الرياضي $E(X)$.
- ب) عين قيمة العدد الصحيح α حتى يكون $E(X) = -\frac{1}{5}$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} \end{cases}$$

1. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n < \frac{5}{2}$.
ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.
2. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: \frac{5}{2} - u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} - u_n \right)$.
ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: \frac{5}{2} - u_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n \left(\frac{5}{2} - u_0 \right)$ ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = \ln(u_{n+1} - u_n)$.
أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$ يطلب حساب حدها الأول، ثم اكتب v_n بدلالة n .
ب) احسب بدلالة n الجداء P_n بحيث: $P_n = (u_1 - u_0) \times (u_2 - u_1) \times \dots \times (u_{n+1} - u_n)$.

التمرين الثالث: 04.5 نقطة

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط $A \left(z_A = e^{i\frac{\pi}{6}} \right)$ ، $B(z_B = \bar{z}_A)$ ، $z_C = -i$.

1. نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة A وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ والذي يحول النقطة $M(Z)$ إلى النقطة $M'(z')$.
- أ) عين الكتابة المركبة للدوران R ، ثم تحقق أنه يحول النقطة C إلى النقطة B .
- ب) استنتج طبيعة المثلث ABC ، ثم استنتج العناصر المميزة للدائرة المحيطة به.
- ج) عين لاحقة النقطة D التي من أجلها يكون الرباعي $ABCD$ معيناً.
2. يبين أن $i = \left(\frac{z_B}{z_A} \right)^{1443} - \left[\frac{1}{2} (z_B - \overline{z_A}) \right]^{2973} + (z_A \times z_B)^{2023}$.
3. عين طبيعة المجموعة (E) للنقط $M(z)$ بحيث: $\text{Arg} \left(\frac{z_C - z}{z_A - z} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$.
4. ليكن S التحويل النقطي الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)z + z_C$.
- أ) عين طبيعة التحويل النقطي S محدداً عناصره المميزة.
- ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي $S \circ R$ محدداً عناصره المميزة.
- التمرين الرابع: 07 نقاط**
- I. نعتبر الدالة g المعرفة والمتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ بحيث: $g(x) = x^3 + 3x - 2$.
1. يبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $0,5 < \alpha < 0,7$.
2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.
- II. الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. تحقق أنه من أجل $x > -1$: $f(x) = \ln(x+1) + \ln \left(1 - \frac{x}{x^2 + 1} \right)$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
2. أ) يبين أنه من أجل $x > -1$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^3 + 1)(x^2 + 1)}$ ، ثم تحقق أنه من أجل $x > -1$: $x^3 + 1 > 0$.
- ب) ادرس حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. يبين أن $f(\alpha) = \ln \left(\frac{3}{2} \alpha \right)$ ، ثم استنتج حصر $f(\alpha)$.
4. الدالة h معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $h(x) = \ln(x+1)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المستوي السابق.
- أ) استنتج أن (C_h) صورة المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.
- ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً وادرس الوضع النسبي لـ (C_h) و (C_f) .
5. أ) احسب $f(1)$ و $h(1)$ ، ثم مثل (C_f) .
- ب) عين بيانياً قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m التي من أجلها المعادلة $f(x) = \ln(m)$ تقبل ثلاث حلول متميزة.