

الأستاذ رمزي مانع

مراجعة محور الدوال



@Ramzi_manaa_prof_de_math



@Ramzi_manaa_prof_de_math

www.dzexams.com

1. ملخص وخصائص الدوال الأسية واللوغارتمية:

الدالة اللوغارتمية: $(\ln(x))$

1- مجال التعريف: الدالة اللوغارتمية معرفة على $]0, +\infty[$
إذا كانت الدالة f معرفة بـ: $f(x) = \ln(u(x))$ فإن:

$$D_f = \{x/u(x) > 0\}$$

2- مشتقة الدالة اللوغارتمية: الدالة اللوغارتمية قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ودالتها المشتقة هي:

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\ln(x))' &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow (\ln(u(x)))' &= \frac{u'(x)}{u(x)} \end{aligned}$$

3- إشارتها:

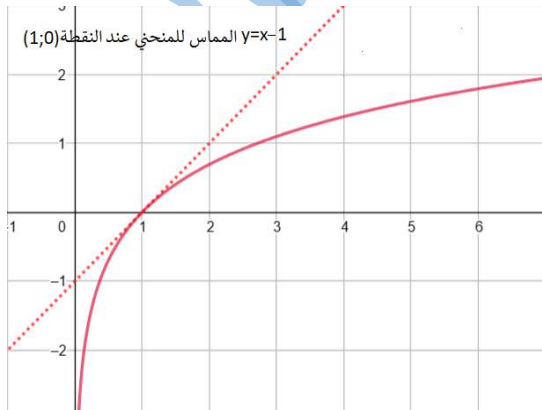
x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+

4- خواص:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(a) &= \ln(\sqrt{a}) \\ \Rightarrow \ln(e^a) &= a \\ \Rightarrow \ln(e) &= 1 \\ \Rightarrow \ln(1) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \ln(a \times b) &= \ln(a) + \ln(b) \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b) \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln(a) \\ \Rightarrow \ln(x^n) &= n \times \ln|x| \end{aligned}$$

5- النهايات:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} &= +\infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) &= +\infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} &= 0 \end{aligned}$$

6- منحنى الدالة $\ln(x)$: في المعلم المتعامد والمتجانسالدالة الأسية: (e^x)

1- مجال التعريف: الدالة الأسية معرفة على R
إذا كانت الدالة f معرفة بـ: $f(x) = e^{u(x)}$ فإن: $D_f = D_u$

2- مشتقة الدالة الأسية: الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ودالتها المشتقة هي:

$$\begin{aligned} \Rightarrow (e^x)' &= e^x \\ \Rightarrow (e^{u(x)})' &= u'(x)e^{u(x)} \end{aligned}$$

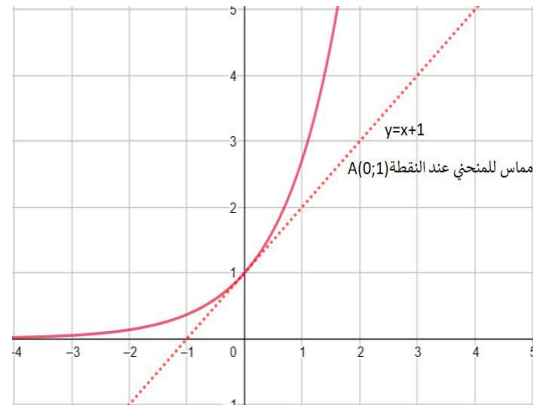
3- إشارتها: الدالة الأسية موجبة تماما على مجال تعريفها ($e^{u(x)} > 0$)

4- خواص:

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^a &= \frac{1}{e^{-a}} \\ \Rightarrow e^{\ln(a)} &= a \\ \Rightarrow |e^x| &= e^x \\ \Rightarrow e^0 &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Rightarrow e^{a+b} &= e^a \times e^b \\ \Rightarrow e^{a \times b} &= (e^a)^b \\ \Rightarrow e^{\frac{a}{2}} &= \sqrt{e^a} \\ \Rightarrow e^{a-b} &= \frac{e^a}{e^b} \end{aligned}$$

5- النهايات:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty \end{aligned}$$

6- منحنى الدالة e^x : في المعلم المتعامد والمتجانس

➤ العمليات على الدوال الأصلية:

الدالة f	الدالة الأصلية	على المجال
$u + v$	$U + V$	I
λu	λU	I
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$	I
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	$x \in I / u(x) > 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	$x \in I, u(x) \neq 0$ $n \geq 2$
$u'e^u$	e^u	I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$x \in I / u(x) > 0$

➤ أمثلة:

- $\int x + 1 dx = \int x dx + \int 1 dx = \frac{1}{2}x^2 + x + c$
- $\int 2(2x + 1)^2 dx = \frac{1}{3}(2x + 1)^3 + c$
- $\int \frac{3}{(3x+2)^2} dx = -\frac{1}{3x+2} + c$
- $\int \frac{1}{x+4} dx = \ln(x + 4) + c$
- $\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + c$
- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} + c$

الحساب التكاملي:

➤ تعريف:

لتكن الدالة f مستمرة على المجال $[a; b]$ و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a; b]$, يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ التكامل من a الى b ونرمز له بالرمز: $\int_a^b f(x) dx$ ونكتب:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال:

$$\int_1^2 2x dx = [x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

الدوال الأصلية:

➤ تعريف:

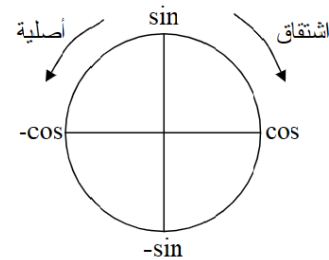
f دالة عددية معرفة على I , نقول أن F دالة أصلية للدالة f إذا وفقط إذا كانت $F'(x) = f(x)$ ونكتب: I

➤ مبرهنة:

الدالة f تقبل دالة أصلية F على المجال I إذا وفقط إذا كانت f مستمرة على I

➤ الدوال الأصلية للدوال مأخوذة:

الدالة f	الدالة الأصلية	ملاحظات
k	$kx + c$	$k, c \in \mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$x \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$n \in \mathbb{N}^*$ $x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$x \in \mathbb{R}^*$ $n \geq 2$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0; +\infty[$



➤ أمثلة:

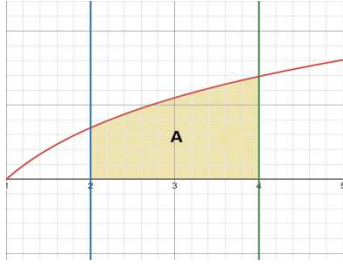
- $\int 2 dx = 2x + c$
- $\int 3x dx = 3 \int x dx = 3 \frac{1}{2}x^2 + c = \frac{3}{2}x^2 + c$
- $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$
- $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{-1}{2x^2} + c$
- $\int 2\sin(2x) dx = -\cos(2x) + c$
- $\int \frac{3}{2\sqrt{x}} dx = 3 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 3\sqrt{x} + c$



حساب المساحات:

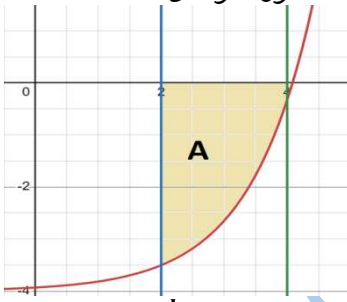
نرمز بـ A إلى مساحة حيز من المستوي محدد بالمنحنى (cf) ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ لحساب المساحة A نميز حالتين:

➤ إذا كان $f(x) \geq 0$ على المجال $[a; b]$ أي (cf) فوق محور الفواصل



$$A = \int_a^b f(x) dx$$

➤ إذا كان $f(x) \leq 0$ على المجال $[a; b]$ أي (cf) تحت محور الفواصل



$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

➤ مساحة حيز محدودة بمنحنيين:

نرمز بـ A إلى مساحة حيز من المستوي محدد بالمنحنى (cf) و (cg) والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ لحساب المساحة A نميز حالتين:

إذا كان $f(x) \geq g(x)$ على المجال $[a; b]$ أي (cf) فوق (cg) ونكتب:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

إذا كان $f(x) \leq g(x)$ على المجال $[a; b]$ أي (cf) تحت (cg) ونكتب:

$$A = \int_a^b g(x) - f(x) dx$$

➤ خواص التكامل:

➤ إذا كان $f(x) \geq 0$ على $[a;]$ فإن:

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

1. إذا كان $f(x) \leq g(x)$ على $[a; b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

2. إذا كانت f دالة زوجية ومستمرة على $[-a; a]$ فإن:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

3. إذا كانت f دالة فردية ومستمرة على $[-a; a]$ فإن:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

4. إذا كانت f مستمرة مجال I حيث $a \in I$ فإن:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

5. علاقة شال:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

6. خاصية التناظر:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

7. خاصية الخطية: α و β أعداد حقيقية

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

8. القيمة المتوسطة لدالة على مجال $[a; b]$:

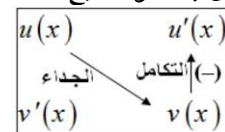
$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

➤ المكاملة بالتجزئة:

U و V دالتين قابلتين للاشتقاق على I , U' و V' مشتقاتهما على الترتيب مستمرتين على I , من أجل a و b من I حيث $a < b$ فإن:

$$\int_a^b U(x)V'(x) dx = [U(x)V(x)]_a^b - \int_a^b U'(x)V(x) dx$$

طريقته: لاستعمال التكامل بالتجزئة نتبع المخطط



السؤال	الجواب
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ فسر النتيجة بيانيا؟	(cf) يقبل مستقيم مقارب عمودي موازي لحامل محور الترتيب معادلته $x = a$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ فسر النتيجة بيانيا؟	(cf) يقبل مستقيم مقارب افقي موازي لحامل محور الفواصل معادلته $y = a$
$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ فسر النتيجة بيانيا؟	(cf) يقبل مستقيم مقارب مائل عند ∞ معادلته $y = ax + b$
بين ان المستقيم $y = ax + b$ (Δ) مقارب مائل لـ (cf)	نبين ان $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
بين ان (cf) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادله؟	طريقة 1: نكتب f على الشكل: $f(x) = ax + b + h(x)$ بحيث $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ ومنه (cf) يقبل مستقيم مقارب مائل عند ∞ معادلته $y = ax + b$ طريقة 2: نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$ ومنه () يقبل مستقيم مقارب مائل عند ∞ معادلته $y = ax + b$
ادرس الوضع النسبي للمنحنى (cf) و المستقيم (Δ): $y = ax + b$	ندرس اشارة الفرق $f(x) - y$ اذا كان $f(x) - y > 0$ فان (cf) يقع فوق (Δ) اذا كان $f(x) - y < 0$ فان (cf) يقع تحت (Δ) اذا كان $f(x) - y = 0$ فان (Δ) يقطع (cf)

السؤال	الجواب
بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $a < \alpha < b$	f مستمرة ورتيبة (متزايدة تماما او متناقصة تماما) على المجال $[a; b]$ والتحقق من: $f(a) \times f(b) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل وحيدا α بحيث: $f(\alpha) = 0$

السؤال	الجواب
اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (cf) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 (بصيغة أخرى عند النقطة $A(x_0; y_0)$)	لدينا معادلة المماس نكتب من الشكل: $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ نحسب $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ ثم نعوضهما في العبارة
اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (cf) عند النقطة ذات الترتيبة y_0	اولا نحل المعادلة $f(x) = y_0$ نجد قيمة x_0 ثم نحسب $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ ونعوضهما في العبارة: $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
بين ان المنحنى (cf) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ يطلب تعيين معادلته بصيغة اخرى: بين ان المنحنى (cf) يقبل مماس (T) معامل توجيهه يساوي a يطلب تعيين معادلته	$(T) // (\Delta)$ معناه ان لهما نفس معامل التوجيه اي $f'(x_0) = a$ نحل المعادلة لنجد قيمة x_0 ثم نحسب $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ ونعوضهما في العبارة: $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
بين ان المنحنى (cf) يقبل مماس او اكثر يشمل النقطة $A(\alpha; \beta)$	نحل المعادلة $\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0)$ نجد قيمة x_0 ثم نحسب $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ ونعوضهما في العبارة: $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

➤ التناظر:

السؤال	الجواب
بين ان الدالة f زوجية	يكفي تبين: $f(-x) = f(x)$
بين ان الدالة f فردية	يكفي تبين: $f(-x) = -f(x)$
بين ان $x = a$ محور تناظر للمنحنى (cf)	يكفي تبين: $f(2a - x) = f(x)$
بين ان النقطة $A(\alpha; \beta)$ مركز تناظر للمنحنى (cf)	يكفي تبين: $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$
بين ان الدالة h زوجية حيث: $h(x) = f(x)$	$h(-x) = f(-x) = f(x) = h(x)$ ومنه الدالة h زوجية

➤ النقاط الخاصة:

السؤال	الجواب
بين ان المنحنى (cf) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيينها	➤ اذا انعدمت المشتقة الثانية عند α وغيره اشارة اشارتها فان $w(\alpha; f(\alpha))$ نقطة انعطاف للمنحنى (cf) (شرط لازم) ➤ اذا انعدمت المشتقة الاولى عند α ولم غيره اشارة اشارتها فان $w(\alpha; f(\alpha))$ نقطة انعطاف للمنحنى (cf) (شرط كافي)
عين نقاط تقاطع المنحنى (cf) مع محور الفواصل	نحل المعادلة $f(x) = 0$ حيث حلول المعادلة هي فواصل نقاط التقاطع
عين نقطة تقاطع المنحنى (cf) مع محور الترتيب	نضع $x = 0$ حيث نقطة التقاطع هي $(0; f(0))$

➤ استنتاج منحنى دالة انطلاقا من منحنى دالة اخرى:

السؤال	الجواب
استنتاج (ch) منحنى الدالة h انطلاقا من (cf) منحنى الدالة f حيث: $h(x) = -f(x)$	(ch) نظير (cf) بالنسبة لمحور الفواصل
استنتاج (ch) منحنى الدالة h انطلاقا من (cf) منحنى الدالة f حيث: $h(x) = f(-x)$	(ch) نظير (cf) بالنسبة لمحور الترتيب
استنتاج (ch) منحنى الدالة h انطلاقا من (cf) منحنى الدالة f حيث: $h(x) = -f(-x)$	(ch) نظير (cf) بالنسبة للمبدأ 0
اكتب الدالة h دون رمز القيمة المطلقة ثم استنتاج (ch) منحنى الدالة h انطلاقا من (cf) منحنى الدالة f حيث: $h(x) = f(x) $	$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{لما } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{لما } f(x) < 0 \end{cases}$ (ch) منطبق على (cf) لما يكون (cf) فوق محور الفواصل و (ch) نظير (cf) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون (cf) تحت محور الفواصل
اكتب الدالة h دون رمز القيمة المطلقة ثم استنتاج (ch) منحنى الدالة h انطلاقا من (cf) منحنى الدالة f حيث: $h(x) = f(x)$	$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{لما } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{لما } x < 0 \end{cases}$ (ch) منطبق على (cf) على المجال $[0; +\infty[$ و نناظره بالنسبة لمحور الترتيب لان الدالة h زوجية