

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

أهم الخواص التي تساعد على البرهان في الهندسة

في التعليم المتوسط

ترجمة الأستاذ : فرغوس عبدالحق



الأستاذ : بلحوسين
للرياضيات

أهم الخواص التي تساعد على البرهان في الهندسة

belhocine : <https://prof27math.weebly.com>

لإثبات خاصية ما في الهندسة، يمكن اتباع الخطوات التالية :

- نبدأ برسم شكل يمثل الوضعية المدروسة.
- نُشَقِّر الشكل حسب المعطيات (منتصف قطعة، زاوية قائمة، مستقيمات متوازية، ... إلخ).
- من بين الخواص التي تنطبق على المطلوب، نبحث عن الخاصية التي يكون الشكل فيها (العمود الأوسط من الجدول الآتي) مماثلاً للشكل المرسوم.
- لتحرير الجواب، يكفي ذكر الخاصية المستعملة (كما في العمود الأيمن) ثم تحقيق فرضياتها و استخلاص المطلوب (كما في العمود الأيسر).

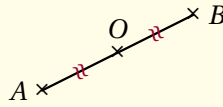
- | | |
|--|-----------------------|
| (1) إثبات أن نقطة هي منتصف قطعة | خاصية 01 إلى خاصية 06 |
| (2) إثبات توازي مستقيمين | خاصية 07 إلى خاصية 14 |
| (3) إثبات تعامد مستقيمين | خاصية 15 إلى خاصية 22 |
| (4) إثبات أن رباعيا ما متوازي أضلاع | خاصية 23 إلى خاصية 29 |
| (5) إثبات أن رباعيا ما معين | خاصية 30 إلى خاصية 32 |
| (6) إثبات أن رباعيا ما مستطيل | خاصية 33 إلى خاصية 35 |
| (7) إثبات أن رباعيا ما مربع | خاصية 36 إلى خاصية 39 |
| (8) إيجاد طول قطعة | خاصية 40 إلى خاصية 53 |
| (9) تحديد قياس زاوية | خاصية 54 إلى خاصية 62 |
| (10) البرهان بتوظيف خواص المستقيمية الخاصة في المثلث | خاصية 63 إلى خاصية 69 |

Ce document est publié sous licence libre « CC by SA »



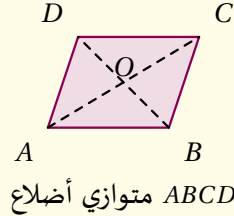
Le texte intégral est disponible à l'adresse : <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/legalcode>

النقطة O تنتمي إلى القطعة $[AB]$
و $OA = OB$ (أو $OA = \frac{1}{2}AB$)
و بالتالي O هي منتصف $[AB]$.



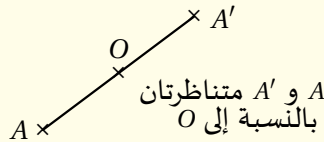
خاصية 1 إذا انتمت نقطة إلى قطعة مستقيمة و كانت متساوية البعد عن طرفيها فإن هذه النقطة هي منتصف القطعة.

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فإن قطريه متناصفان و بالتالي O منتصف $[AC]$ و أيضا O منتصف $[BD]$.



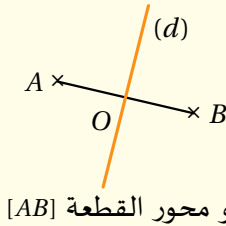
خاصية 2 في متوازي الأضلاع (كفي، مستطيل، مربع، معين)، القطران متناصفان (يتقاطعان في منتصفهما).

بما أن A' نظيرة A بالنسبة إلى O فإن O هي منتصف القطعة $[AA']$.



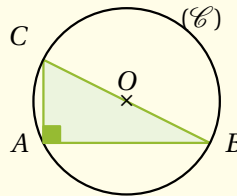
خاصية 3 إذا كانت A و A' متناظرتين بالنسبة إلى O فإن O هي منتصف القطعة $[AA']$.

بما أن المستقيم (d) محور القطعة $[AB]$ يقطعها في O فإن O منتصف $[AB]$.



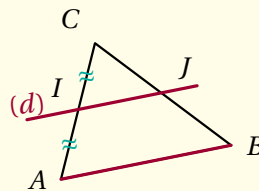
خاصية 4 محور قطعة مستقيم هو المستقيم العمودي على هذه القطعة في منتصفها.

بما أن ABC مثلث قائم وتره $[BC]$ و O مركز الدائرة المحيطة به فإن O منتصف الوتر $[BC]$.



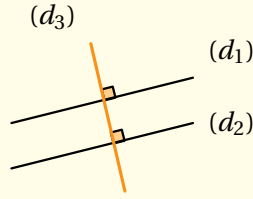
خاصية 5 مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم هو منتصف الوتر.

في المثلث ABC ، المستقيم (d) يشمل I ، منتصف $[AC]$ ، و يوازي الضلع $[AB]$ و بالتالي I هي منتصف الضلع $[BC]$.



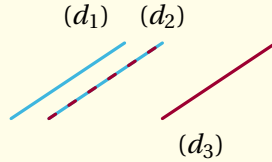
خاصية 6 في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصف أحد الأضلاع و يوازي ضلعاً ثانياً فإنه يشمل منتصف الضلع الثالث (النظرية العكسية لنظرية مستقيم المنتصين).

بما أن $(d_1) \perp (d_3)$ و $(d_2) \perp (d_3)$
فإن $(d_1) \parallel (d_2)$.



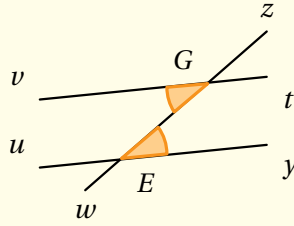
خاصية 7 المستقيمان العموديان على نفس المستقيم هما مستقيمان متوازيان.

بما أن $(d_1) \parallel (d_2)$ و $(d_2) \parallel (d_3)$
فإن $(d_1) \parallel (d_3)$.



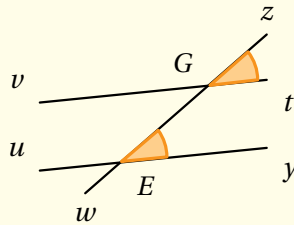
خاصية 8 إذا كان مستقيمان متوازيين فإن كل مستقيم يوازي أحدهما فهو يوازي الآخر.

المستقيمان (vt) و (uy) مقطوعان بالقاطع (zw) والزويتان $\widehat{vGw}$ و $\widehat{zEy}$ متبادلتان داخليا و متقايستان إذن $(vt) \parallel (uy)$.



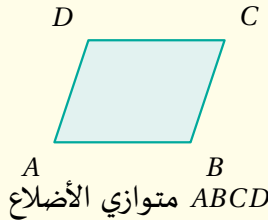
خاصية 9 حتى يتوازي مستقيمان، يكفي أن يُشكّل معهما قاطع زاويتين متبادلتين داخليا و متقايستين.

المستقيمان (vt) و (uy) مقطوعان بالقاطع (zw) والزويتان $\widehat{vGw}$ و $\widehat{zEy}$ متماثلتان و متقايستان إذن $(vt) \parallel (uy)$.



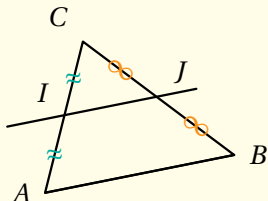
خاصية 10 حتى يتوازي مستقيمان، يكفي أن يُشكّل معهما قاطع زاويتين متماثلتين و متقايستين.

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فإن $(AD) \parallel (BC)$ و $(AB) \parallel (CD)$.



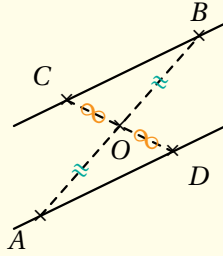
خاصية 11 في متوازي الأضلاع (كيفي، مستطيل، معين، مربع) كل ضلعين متقابلين (متقايسان و) حاملهما متوازيان.

في المثلث ABC لدينا I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[BC]$ فحسب نظرية مستقيم المنتصبين نستنتج أن $(IJ) \parallel (AB)$.



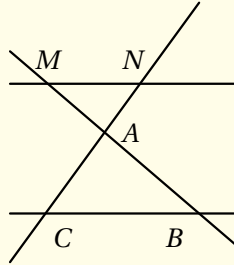
خاصية 12 في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصفَي ضلعين يوازي حامل الضلع الثالث (نظرية مستقيم المنتصبين).

بما أن (AD) و (BC) متناظران
بالنسبة إلى O فإن $(AD) \parallel (BC)$.



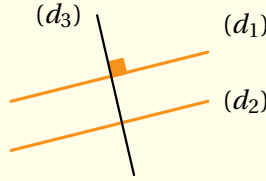
خاصية 13 المستقيمان
المتناظران بالنسبة إلى نقطة هما
مستقيمان متوازيان.

النقط M ، A ، B من جهة
و النقط N ، A ، C من جهة
أخرى على استقامة واحدة و بهذا
الترتيب مع $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ فحسب
النظرية العكسية لنظرية طاليس نستنتج أن
 $(MN) \parallel (BC)$.



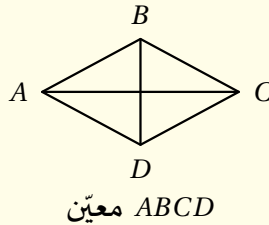
خاصية 14 عكس نظرية طاليس
إذا كانت النقط M ، B ، A
من جهة و النقط N ، A ، C
من جهة أخرى على استقامة
واحدة و بنفس الترتيب بحيث
 $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ فإن المستقيمين (BC)
و (MN) متوازيان.

بما أن $(d_1) \parallel (d_2)$ و $(d_1) \perp (d_3)$
فإن $(d_2) \perp (d_3)$.



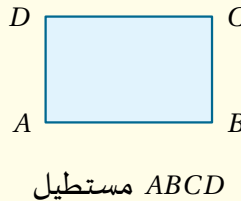
خاصية 15 إذا عامد مستقيم
أحد مستقيمين متوازيين فإنه
يعامد الآخر.

بما أن $ABCD$ معين فإن قطريه
متعامدان أي $(AC) \perp (BD)$.



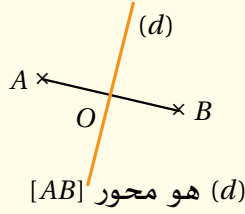
خاصية 16 قُطرا المعين
(أو المربع) متعامدان.

بما أن $ABCD$ مستطيل فإن
 $(AD) \perp (DC)$ ، $(AB) \perp (AD)$
و $(BC) \perp (AB)$ و $(DC) \perp (BC)$.



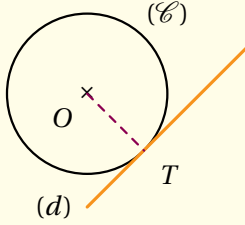
خاصية 17 في المستطيل
(أو المربع)، كل ضلعين متتاليين
حاملهما متعامدان.

بما أن (d) هو محور $[AB]$ فإن $(d) \perp (AB)$.



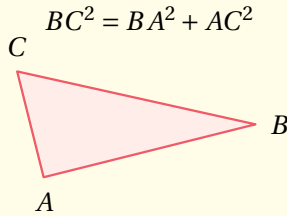
خاصية 18 محور قطعة مستقيم هو مستقيم يعامدها (في المنتصف).

بما أن (d) هو المماس في النقطة T للدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها O فإن $(d) \perp (OT)$.



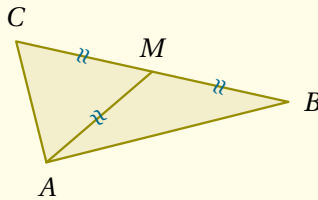
خاصية 19 المماس لدائرة في نقطة منها يعامد المستقيم القطري الذي يمر من هذه النقطة.

بما أن $BC^2 = BA^2 + AC^2$ فحسب النظرية العكسية لنظرية فيثاغورس نستنتج أن المثلث ABC قائم في A أي $(AB) \perp (AC)$.



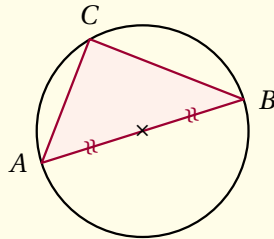
خاصية 20 عكس نظرية فيثاغورس في مثلث ABC ، إذا كان $[BC]$ هو الضلع الأطول بحيث $BC^2 = BA^2 + AC^2$ فإن المثلث ABC قائم ووتره هو الضلع $[BC]$.

بما أن $[AM]$ هو المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ بحيث $AM = BC \div 2$ فإن المثلث ABC قائم في A أي $(AB) \perp (AC)$.



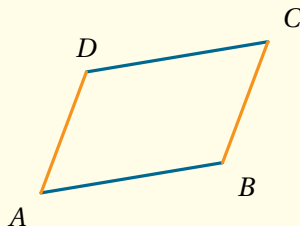
خاصية 21 في مثلث، إذا كان طول المتوسط المتعلق بأحد الأضلاع يساوي نصف طول هذا الضلع فإن هذا المثلث قائم ووتره هو ذلك الضلع.

بما أن الرأس C ينتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن المثلث ABC قائم في C أي $(AC) \perp (BC)$.



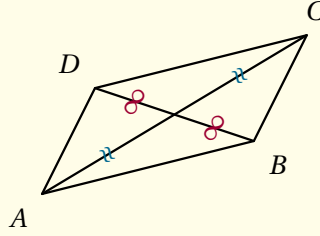
خاصية 22 إذا كان أحد أضلاع مثلث قطعاً للدائرة المحيطة به فإن هذا المثلث قائم ووتره هو ذلك الضلع.

بما أن $(AD) \parallel (BC)$ و $(AB) \parallel (DC)$ فإن $ABCD$ متوازي الأضلاع.



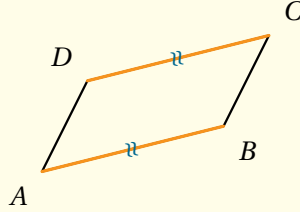
خاصية 23 إذا كان في رباعي كل ضلعين متقابلين حاملهما متوازيان فإن هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

بما أن القطرين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان فإنّ الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.



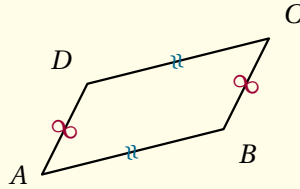
خاصية 24 إذا كان لرباعي قطران متناصفان (يتقاطعان في منتصفهما) فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

الرباعي $ABCD$ غير متصلب فيه $AB = DC$ و $(AB) \parallel (CD)$ و بالتالي $ABCD$ متوازي الأضلاع.



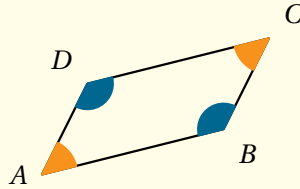
خاصية 25 إذا كان لرباعي (غير متصلب) ضلعان متقايسان و حاملهما متوازيان فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

بما أن $AB = CD$ و $AD = BC$ فإنّ الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.



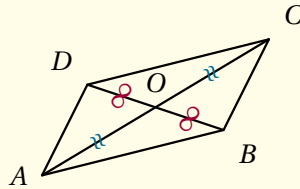
خاصية 26 إذا كان في رباعي كل ضلعين متقابلين متقايسان فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

في الرباعي $ABCD$ لدينا : $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$ و $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ إذاً $ABCD$ متوازي الأضلاع.



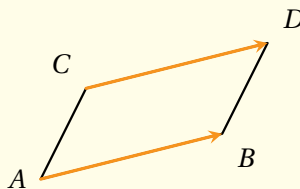
خاصية 27 إذا كان في رباعي كل زاويتين متقابلتين متقايستان فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

النقطتان A و C من جهة، و النقطتان B و D من جهة أخرى، متناظرتان بالنسبة إلى O و بالتالي فالرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.



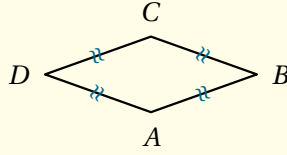
خاصية 28 إذا كان لرباعي مركز تناظر فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.

بما أن $\vec{AB} = \vec{CD}$ فإنّ الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع.



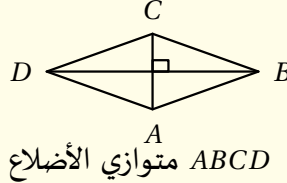
خاصية 29 إذا كانت A ، B ، C ، D أربع نقط بحيث $\vec{AB} = \vec{CD}$ فإنّ الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع.

بما أن $AB = BC = CD = DA$ فإنّ
الرباعي $ABCD$ معين.



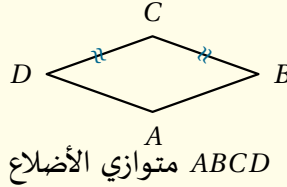
خاصية 30 إذا كان لرباعي
أربعة أضلاع متقايسة فإنّ هذا
الرباعي معين.

$ABCD$ متوازي الأضلاع بحيث
($AC \perp BD$) (قطراه متعامدان)
و بالتالي $ABCD$ معين.



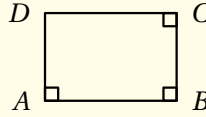
خاصية 31 إذا كان لمتوازي
الأضلاع قطران متعامدان فإنه
معين.

بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع
و فيه $CD = CB$ فإنّ الرباعي
 $ABCD$ معين.



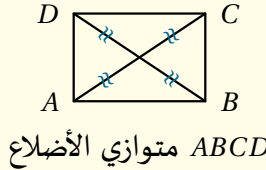
خاصية 32 إذا كان لمتوازي
الأضلاع ضلعان متتاليان
متقايسان فهو معين.

بما أنّ $(AD) \perp (AB)$ ،
 $(AB) \perp (BC)$ و $(BC) \perp (DC)$ فإنّ
الرباعي $ABCD$ مستطيل.



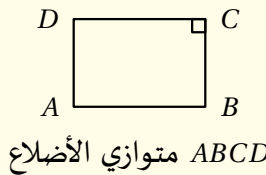
خاصية 33 إذا كان لرباعي
ثلاث زوايا قائمة فإنّ هذا الرباعي
مستطيل.

بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع
بحيث $AC = BD$ (قطراه
متقايسان) فإنّ $ABCD$ مستطيل.



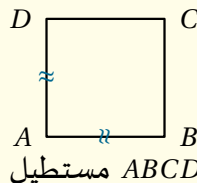
خاصية 34 إذا كان لمتوازي
الأضلاع قطران متقايسان فهو
مستطيل.

بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع
و فيه $(BC) \perp (CD)$ فإنّ $ABCD$
مستطيل.



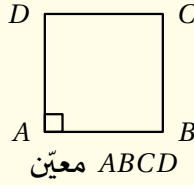
خاصية 35 إذا كان لمتوازي
الأضلاع ضلعان متتاليان
متعامدان فهو مستطيل.

بما أنّ $ABCD$ مستطيل بحيث
 $AB = AD$ (ضلعان متتاليان
متقايسان) فإنّ $ABCD$ مربع.



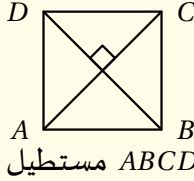
خاصية 36 إذا كان لمستطيل
ضلعان متتاليان متقايسان فهو
مربع.

بما أن $ABCD$ معين بحيث
($AB \perp AD$) (ضلعان متتاليان
و متعامدان) فإن $ABCD$ مربع.



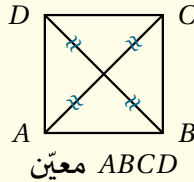
خاصية 37 إذا كان لمعين
ضلعان متتاليان متعامدان فهو
مربع.

بما أن $ABCD$ مستطيل بحيث
($AC \perp BD$) (قطراه متعامدان)
فإن $ABCD$ مربع.



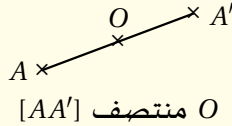
خاصية 38 إذا كان لمستطيل
قطران متعامدان فهو مربع.

بما أن $ABCD$ معين بحيث
 $AC = BD$ (قطراه متقايسان) فإن
 $ABCD$ مربع.



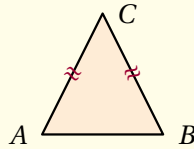
خاصية 39 إذا كان لمعين
قطران متقايسان فهو مربع.

بما أن O منتصف القطعة $[AA']$
فإن $OA = OA' = AA' \div 2$.



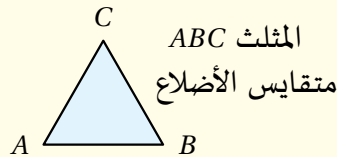
خاصية 40 منتصف قطعة
مستقيم تبعد بنفس المسافة عن
طرفيها.

المثلث ABC متساوي الساقين
رأسه الأساسي C و بالتالي
 $CA = CB$.



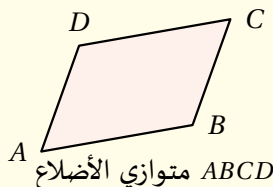
خاصية 41 للمثلث المتساوي
الساقين ضلعان متقايسان (لهما
نفس الطول)

المثلث ABC متقايس الأضلاع
و بالتالي $AB = BC = CA$.



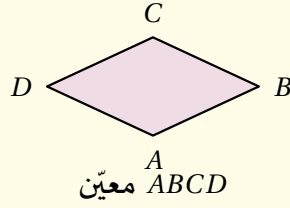
خاصية 42 للمثلث المتقايس
الأضلاع ثلاثة أضلاع متقايسة (لهما
نفس الطول).

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فإن
 $AD = BC$ و $AB = DC$



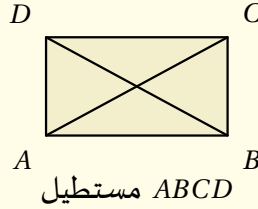
خاصية 43 في متوازي الأضلاع
(كفي، معين، مستطيل، مربع)،
كل ضلعين متقابلين متقايسان.

بما أن $ABCD$ معين فإن أضلاعه الأربعة متقايسة أي $AB = BC = CD = DA$.



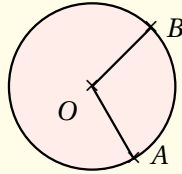
خاصية 44 الأضلاع الأربعة للمعين (أو المربع) متقايسة (لها نفس الطول).

بما أن $ABCD$ مستطيل فإن قطريه متقايسان أي $AC = BD$.



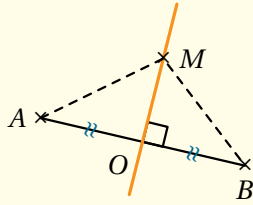
خاصية 45 قطرا المستطيل متقايسان (لهما نفس الطول).

النقطتان A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O إذاً $OA = OB$.



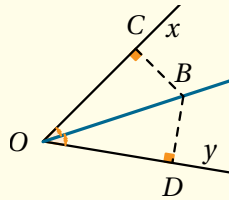
خاصية 46 إذا انتمت نقطتان إلى نفس الدائرة فإنهما تبعدان بنفس المسافة عن مركزها.

النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ إذاً فهي تبعد بنفس المسافة عن طرفيها أي $MA = MB$.



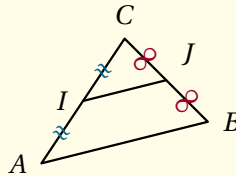
خاصية 47 إذا انتمت نقطة إلى محور قطعة مستقيم فإنها تبعد بنفس المسافة عن طرفيها.

B تنتمي إلى منصف الزاوية $\widehat{xOy}$ مع $(BC) \perp (OC)$ و $(BD) \perp (OD)$ إذاً فهي تبعد بنفس المسافة عن ضلعيها أي $BC = BD$.



خاصية 48 إذا انتمت نقطة إلى منصف زاوية فإنها تبعد بنفس المسافة عن ضلعيها.

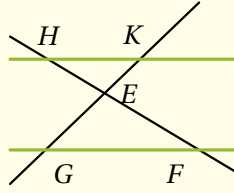
في المثلث ABC لدينا : I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[BC]$ فحسب نظرية مستقيم المنتصين نستنتج أن $IJ = AB \div 2$.



خاصية 49 في مثلث، طول القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين يساوي نصف طول الضلع الثالث (نظرية مستقيم المنتصين).

خاصية 50 نظرية طاليس

إذا كانت $M \in (AB)$ و $N \in (BC)$ بحيث $(MN) \parallel (AC)$ فإن:

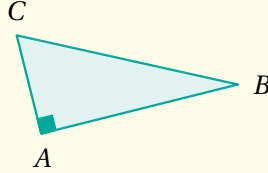
$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$


بما أن $H \in (EF)$ و $K \in (EG)$ بحيث $(HK) \parallel (GF)$ فحسب نظرية طاليس نستنتج أن:

$$\frac{EF}{EH} = \frac{EG}{EK} = \frac{GF}{HK}$$

خاصية 51 نظرية فيثاغورس

في المثلث القائم، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين القائمين.

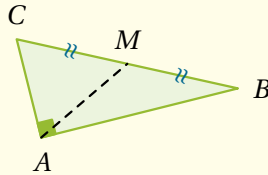


بما أن المثلث ABC قائم في A فحسب نظرية فيثاغورس نستنتج أن:

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

خاصية 52

في المثلث القائم، طول المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر (نظرية طول المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم).

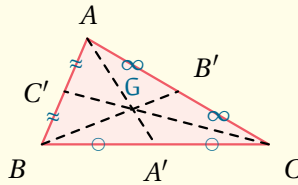


المثلث ABC قائم في A و M منتصف الوتر [BC] فحسب نظرية طول المتوسط المتعلق بالوتر نستنتج أن:

$$AM = BC \div 2$$

خاصية 53

مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات) يبعد عن كل رأس بثُلثي طول المتوسط الذي يشمل هذا الرأس.

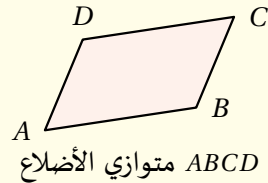


النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC و [AA'] هو المتوسط المتعلق بالضلع [BC] و بالتالي:

$$AG = \frac{2}{3} AA'$$

خاصية 54

في متوازي الأضلاع (كفي، معين، مستطيل، مربع)، كل زاويتين متقابلتين متقايستان.

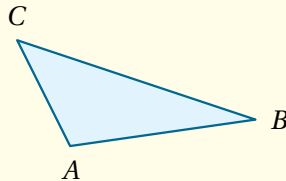


بما أن ABCD متوازي الأضلاع فإن:

$$\widehat{ADC} = \widehat{ABC} \text{ و } \widehat{DAB} = \widehat{BCD}$$

خاصية 55

مجموع أقياس زوايا المثلث يساوي 180° .

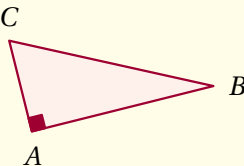


في المثلث ABC لدينا:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

خاصية 56

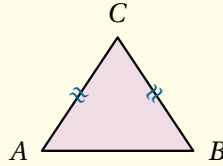
في المثلث القائم، الزاويتان الحادتان متتامتان (مجموعهما يساوي 90°).



بما أن المثلث ABC قائم في A فإن:

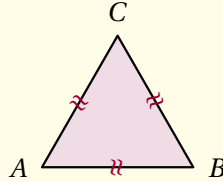
$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$$

بما أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه الأساسي C فإن :
 $\hat{A} = \hat{B}$



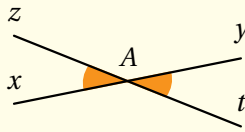
خاصية 57 في المثلث المتساوي الساقين، زاويتا القاعدة متقايستان.

بما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن :
 $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$



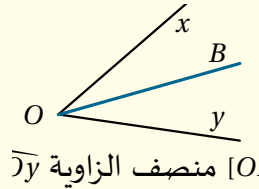
خاصية 58 للمثلث المتقايس الأضلاع ثلاث زوايا متقايسة و قيس كل منها يساوي 60° .

الزاويتان $\widehat{yAt}$ و $\widehat{xAz}$ متقابلتان بالرأس إذا :
 $\widehat{xAz} = \widehat{yAt}$



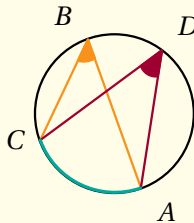
خاصية 59 الزاويتان المتقابلتان بالرأس متقايستان.

بما أن $[OB]$ هو منصف الزاوية $\widehat{xOy}$ فإن :
 $\widehat{xOB} = \widehat{BOy} = \widehat{xOy} \div 2$



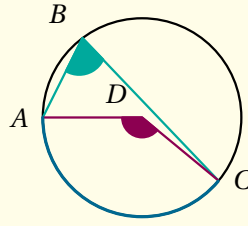
خاصية 60 منصف زاوية يقسمها إلى زاويتين متجاورتين و متقايستين (لهما نفس القيس).

الزاويتان $\widehat{ADC}$ و $\widehat{ABC}$ تحصران نفس القوس $\widehat{AC}$ و بالتالي فهما متقايستان أي :
 $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$



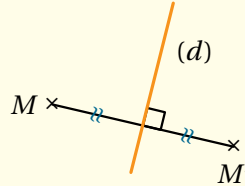
خاصية 61 الزاويتان المرسومتان داخل دائرة و اللتان تحصران نفس القوس هما زاويتان متقايستان.

الزاوية المحيطية $\widehat{ABC}$ و الزاوية المركزية $\widehat{ADC}$ تحصران نفس القوس $\widehat{AC}$ و بالتالي:
 $\widehat{ADC} = 2\widehat{ABC}$



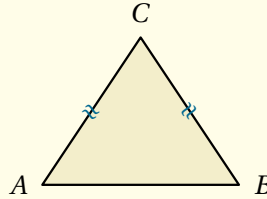
خاصية 62 قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي نصف قياس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس معها.

النقطتان M و M' متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم (d) إذاً (d) هو محور القطعة $[MM']$.



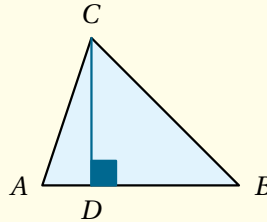
خاصية 63 إذا كانت نقطتان متناظرتين بالنسبة إلى مستقيم فإن هذا المستقيم هو محور القطعة الواصلة بين النقطتين.

بما أن $CA = CB$ فإن النقطة C تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$.



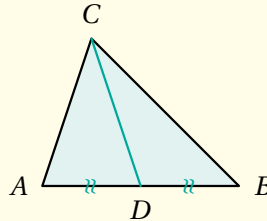
خاصية 64 كل نقطة متساوية المسافة عن طرفي قطعة مستقيم هي نقطة تنتمي إلى محور هذه القطعة.

بما أن $(CD) \perp (AB)$ فإن المستقيم (CD) هو الارتفاع المتعلق بالضلع $[AB]$ في المثلث ABC .



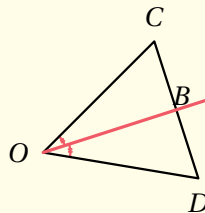
خاصية 65 المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس مثلث و يعامد حامل الضلع المقابل لهذا الرأس هو الارتفاع المتعلق بهذا الضلع.

بما أن النقطة D هي منتصف الضلع $[AB]$ فإن القطعة $[CD]$ هي المتوسط المتعلق بالضلع $[AB]$ في المثلث ABC .



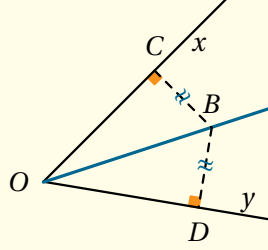
خاصية 66 القطعة التي طرفاها أحد رؤوس مثلث و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس هي المتوسط المتعلق بهذا الضلع.

المستقيم (OB) يقسم الزاوية $\widehat{COD}$ إلى زاويتين متقايسيتين إذاً (OB) هو منصف الزاوية $\widehat{COD}$.



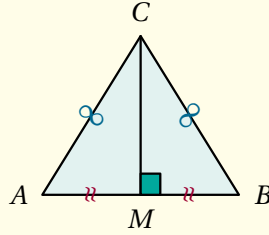
خاصية 67 المستقيم الذي يقسم زاوية إلى زاويتين متقايسيتين هو منصف هذه الزاوية.

بما أن $(OC) \perp (BC)$ ، $BC = BD$ فإن النقطة O تنتمي إلى منصف الزاوية $\widehat{COD}$ (إذاً نصف المستقيم $[OB]$ هو منصف الزاوية $\widehat{COD}$).



خاصية 68 كل نقطة متساوية البعد عن ضلعي زاوية هي نقطة تنتمي إلى منصف هذه الزاوية.

بما أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه الأساسي C ، M منتصف $[AB]$ و $(CM) \perp (AB)$ فإن (CM) هو : المتوسط المتعلق بالزاوية $\widehat{ACB}$ ، $[AB]$ ، الارتفاع المتعلق بالزاوية $\widehat{ACB}$ و منصف الزاوية $\widehat{ACB}$.



خاصية 69 محور قاعدة المثلث المتساوي الساقين هو أيضا الارتفاع المتعلق بهذه القاعدة، المتوسط المتعلق بها و منصف زاوية الرأس الأساسي.

وَ احْذَرِ يَفُوتُكَ فَخْرُ ذَاكَ الْمَغْرَسِ
مَنْ هُمُّهُ فِي مَطْعَمٍ أَوْ مَلْبَسِ
فِي حَالَتَيْهِ: عَارِيًّا أَوْ مُكْتَسِ
وَ اهْجُرْ لَهُ طَيْبَ الرَّقَادِ وَ عَبَسِ
كُنْتَ الرَّئِيسَ وَ فَخْرُ ذَاكَ الْمَجْلِسِ

الْعِلْمُ مَغْرُسٌ كُلُّ فَخْرٍ فَافْتَحِرْ
وَ اعْلَمْ بِأَنَّ الْعِلْمَ لَيْسَ يَنَالُهُ
إِلَّا أَخُو الْعِلْمِ الَّذِي يُعْنَى بِهِ
فَاجْعَلْ لِنَفْسِكَ مِنْهُ حِطَاءً وَافِرًا
فَلَعَلَّ يَوْمًا إِنْ حَضَرْتَ بِمَجْلِسٍ

سَأُنَبِّكَ عَنْ تَقْصِيلِهَا بَيَّانٍ
وَ صُحْبَةُ أُسْتَاذٍ وَ طُولُ زَمَانٍ

أَخِي لَنْ تَنَالَ الْعِلْمَ إِلَّا بِسِتَّةٍ
ذِكَاةً وَ حِرْصَ وَ اجْتِهَادَ وَ بُلْعَةً

