

# تقويم تشخيصي المدة: 01 سا

المستوى: الثالثة ثانوي - شعبة علوم تجريبية  
إعداد: قويسم الخليل

(I)  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{2x - 2}$$

حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين، و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$   
- عيّن  $\alpha$  و  $\beta$  حيث يقبل  $(C_f)$  قيمة حدية عند النقطة  $A(0; -1)$

(II) نضع فيما يلي:  $\alpha = -2$  و  $\beta = 2$ :

① احسب:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا

② احسب:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

③

أ/ بيّن أنه من أجل كل  $x$  يختلف عن الـ 1 لدينا:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 2}$$

ب/ استنتج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  بجوار  $+\infty$  و  $+\infty$  يُطلب تعيين معادلة له

ج/ ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$

④

أ/ بيّن أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  لدينا:

$$f'(x) = \frac{2x(x - 2)}{(2x - 2)^2}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤

أ/ عيّن إحداثيات النقطة  $\omega$  نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة  $x = 1$

ب/ بيّن أن النقطة  $\omega$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى  $(C_f)$  يشمل النقطة  $\omega$

⑥ ارسم كل من  $(\Delta)$  و  $(C_f)$

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $(E)$  حيث:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + m \dots (E)$$

(III) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

① ادرس شفعية الدالة  $h$

② وضح كيف يمكن للمنحنى  $(C_h)$  الممثل للدالة  $h$  انطلاقا من المنحنى  $(C_f)$  (لا يُطلب تمثيل  $(C_h)$ )

# تصحيح نموذجي (مقترح)

(I)

1 تعيين  $\alpha$  و  $\beta$  حتى يقبل  $(C_f)$  قيمة حدية عند 0 و  $f(0) = -1$ :

لدينا:  $f(0) = -1$ ، ومنه:  $\frac{(0)^2 + \alpha(0) + \beta}{2(0) - 2} = -1$  ومنه:  $\frac{\beta}{-2} = -1$  ومنه:  $\boxed{\beta = 2}$

ولدينا:  $f(0) = -1$  تقبل قيمة حدية لـ  $f$  معناه:  $f'(0) = 0$

- نعين أولاً  $f'(x)$ :

لدينا:  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]-\infty; 1[$  و  $]1; +\infty[$  حيث:

$$f'(x) = \frac{(2x + \alpha)(2x - 2) - 2(x^2 + \alpha x + \beta)}{(2x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 2\alpha - 2\beta}{(2x - 2)^2}$$

ولدينا:  $f'(0) = 0$  ومنه:  $\frac{2(0)^2 - 4(0) - 2\alpha - 2\beta}{(2(0) - 2)^2} = 0$  ومنه:  $-2\alpha - 2\beta = 0$  ومنه:  $\alpha = -\beta$  ومنه:  $\boxed{\alpha = -2}$  ومنه:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$

(II) نضع فيما يلي:  $\alpha = 1$  و  $\beta = -2$ :

1 حساب:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

- إشارة المقام:

|          |           |   |           |
|----------|-----------|---|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $2x - 2$ | -         | 0 | +         |

وعليه:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 2) = 0^+$$

التفسير الهندسي: المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته  $x = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 2) = 0^-$$

التفسير الهندسي: المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار  $-\infty$  معادلته  $x = 1$

2 حساب:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{2} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \right) = -\infty$$

3

أ. تعيين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$ :

من أجل كل  $x \neq 1$  لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{2x - 2} \\ &= \frac{(ax + b)(2x - 2) + c}{2x - 2} \\ &= \frac{2ax^2 - 2ax + 2bx - 2b + c}{2x - 2} \\ &= \frac{2ax^2 + (2b - 2a)x - 2b + c}{2x - 2} \end{aligned}$$

$$\text{بالمطابقة نجد: } \begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 2a = -2 \\ -2b + c = 2 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases} \text{ إذن:}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x - 2}$$

ب. استنتاج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  بجوار  $\pm\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) \right] &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x - 2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right] \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2x - 2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  بجوار  $+\infty$  و  $-\infty$  معادلته:  $y_{(\Delta)} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

ج. دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ :

من أجل كل  $x \neq 1$  لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{2x - 2}$$

لدينا:  $2x - 2 = 0$  معناه:  $x = 1$  ومنه:

| $x$                   | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|-----------------------|-----------|-----|-----------|
| $f(x) - y_{(\Delta)}$ | -         |     | +         |

ومنه:

- $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$  لما  $x \in ]-\infty; 1[$
- $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$  لما  $x \in ]1; +\infty[$

4

أ. تبين أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  لدينا:  $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$

لدينا:  $f$  قابلة للاشتقاق على  $] -\infty; 1[$  و  $]1; +\infty[$  حيث:

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(2x - 2) - 2(x^2 - 2x + 2)}{(2x - 2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4x^2 - 4x - 4x + 4 - 2x^2 + 4x - 4}{(2x - 2)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 4x}{(2x - 2)^2} \\
&= \frac{2x(x - 2)}{(2x - 2)^2}
\end{aligned}$$

ب. دراسة تغيرات الدالة  $f$  ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا:  $(2x - 2)^2 > 0$  ومنه: إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $2x(x - 2)$ :

$$\text{لدينا: } 2x(x - 2) = 0 \text{ تكافئ: } \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases} \text{ ومنه:}$$

- جدول تغيرات الدالة  $f$

| $x$     | $-\infty$ | 0             | 1                  | 2                  | $+\infty$    |
|---------|-----------|---------------|--------------------|--------------------|--------------|
| $f'(x)$ | +         | 0             | -                  | 0                  | +            |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow -1$ | $\searrow -\infty$ | $\nearrow +\infty$ | $\searrow 1$ |

5

أ. إيجاد إحداثيي النقطة  $\omega$  نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة  $x = 1$ :

نعوض  $x = 1$  في معادلة المستقيم  $(\Delta)$ ، نجد:  $y = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}$  ومنه:  $y = 0$

ومنه:  $\omega(1; 0)$

ب. تبين أن النقطة  $\omega$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$ :

• لدينا:  $x \in D_f$

معناه:  $x \in ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$  معناه:  $x < 1$  أو  $x > 1$

معناه:  $(-x) < -1$  أو  $(-x) > -1$  معناه:  $(2(1) - x) < 1$  أو  $(2(1) - x) > 1$

معناه:  $(2(1) - x) \in ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$  معناه:  $(2(1) - x) \in D_f$

• ولدينا:

$$\begin{aligned}
f(2(1) - x) + f(x) &= \frac{(2 - x)^2 - 2(2 - x) + 2}{2(2 - x) - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\
&= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2}{4 - 2x - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\
&= 0 \frac{x^2 - 2x + 2}{-(2x - 2)} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\
&= 0 \\
&= 2(0)
\end{aligned}$$

مركز التناظر:

نقول أن النقطة  $\Omega(\alpha; \beta)$  مركز تناظر  $(C_f)$  إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

إذن النقطة  $\omega$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$

ج. اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى  $(C_f)$  يشمل النقطة  $\omega$

إذا وُجد مماس لـ  $(C_f)$  يشمل  $\omega(1; 0)$  معناه يوجد  $a \in \mathbb{R} - \{1\}$  يحقق:

$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$$

لدينا:  $f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$

ومنه:  $f'(a)(1-a) + f(a) = 0$

ومنه:  $\frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2} - \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2} a + \frac{a^2-2a+2}{2a-2} = 0$

ومنه:  $\frac{2a(a-2) - 2a^2(a-2) + (a^2-2a+2)(2a-2)}{(2a-2)^2} = 0$

ومنه:  $2a^2 - 4a - 2a^3 + 4a^2 + 2a^3 - 2a^2 - 4a^2 + 4a + 4a - 4 = 0$

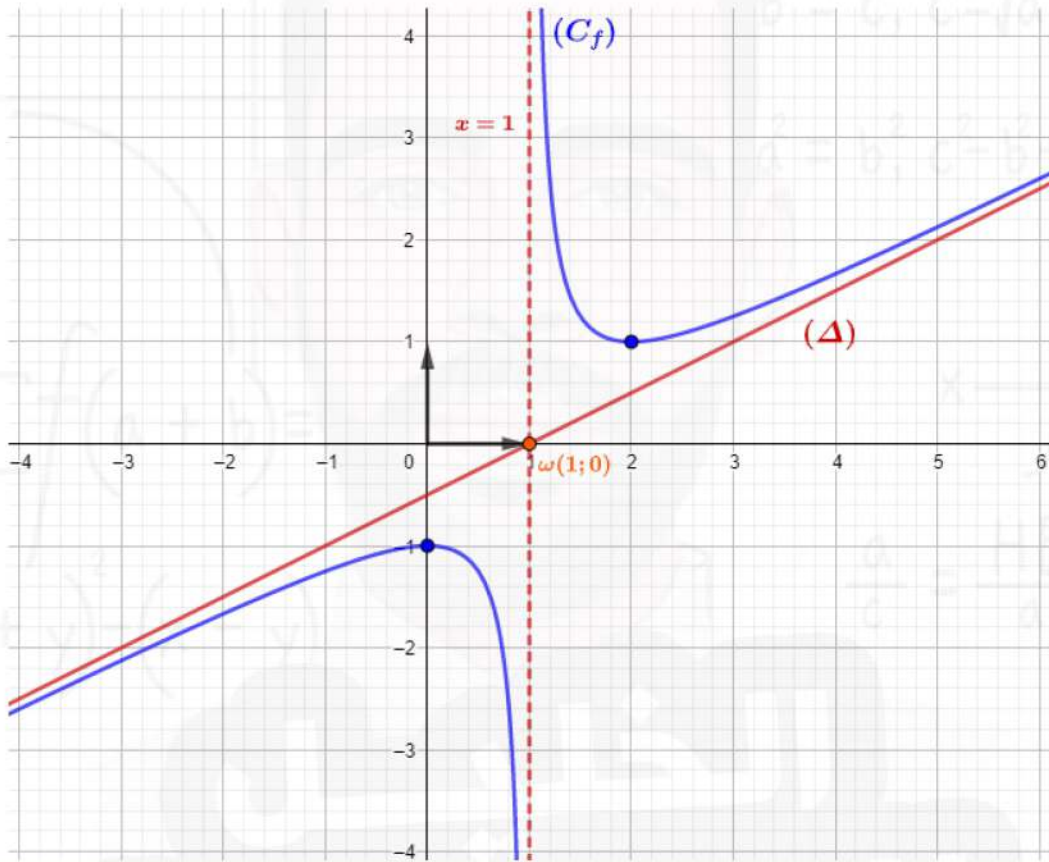
ومنه:  $4a - 4 = 0$

ومنه:  $a - 1 = 0$

ومنه:  $a = 1$

لكن:  $a \notin \mathbb{R} - \{1\}$  إذن: لا يوجد أي مماس للمنحنى  $(C_f)$  يشمل النقطة  $\omega$

6 رسم كل من  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  :



7 المناقشة البيانية:

حلول المعادلة  $(E)$  هي فواصل نقاط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيمات ذات المعادلة  $y_m = \frac{1}{2}x + m$ ، وهي:

|                                     |                         |
|-------------------------------------|-------------------------|
| لما $m \in ]-\infty; -1[$           | للمعادلة حل موجب        |
| لما $m = -1$                        | للمعادلة حل معدوم       |
| لما $m \in ]-1; -\frac{1}{2}[$      | للمعادلة حل سالب        |
| لما $m = -\frac{1}{2}$              | المعادلة لا تقبل حلولاً |
| لما $m \in ]-\frac{1}{2}; +\infty[$ | للمعادلة حل موجب        |

① دراسة شفعية الدالة  $h$ :

من أجل كل  $x \in D_h$  لدينا:  $x \neq 1$  و  $x \neq -1$  ومنه  $-x \neq 1$  و  $-x \neq -1$  ومنه:  $(-x) \in D_h$  ولدينا:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة  $h$  زوجية

② توضيح كيف يمكن المنحنى  $(C_h)$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(|x|) \\ &= \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه  $(C_h)$  ينطبق على  $(C_f)$  لما  $x \geq 0$

وبما أن الدالة  $h$  زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الخليل  
للرياضيات