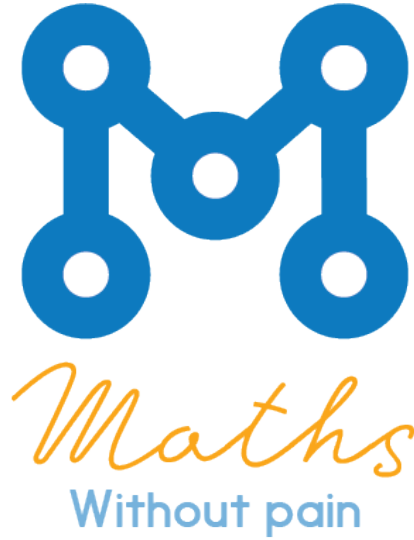


الطريق الى البكالوريا

عدد التمارين : 88

الشعب العلمية

الأستاذ مرنيذ وليد



3 conseils pour devenir bon en maths

Ne pas apprendre, comprendre !

Faire des exercices

Ne pas regarder les solutions

آخر تحديث : 23 ديسمبر 2019

السنة الدراسية

2020 - 2019

المحتويات

2	I بطاقة تعريفية للمتتاليات العددية
6	II تمارين تدريبية
14	III مواضيع بكالوريات جزائرية
15	1 شعبة علوم تجريبية
29	2 شعبة تقني رياضي
36	3 شعبة رياضيات
42	IV مواضيع بكالوريات أجنبية
49	V مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس أشبال الأمة
50	4 شعبة علوم تجريبية
53	5 شعبة رياضيات

القسم 1

بطاقة تعريفية للمتتاليات العددية

المتتاليات العددية

طريقة توليد متتالية عددية

يوجد طريقتين لتعريف متتالية عددية :

■ عبارة الحد العام $u_n = f(n)$

■ علاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

التمثيل البياني لمتتالية معرفة بعلاقة

تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

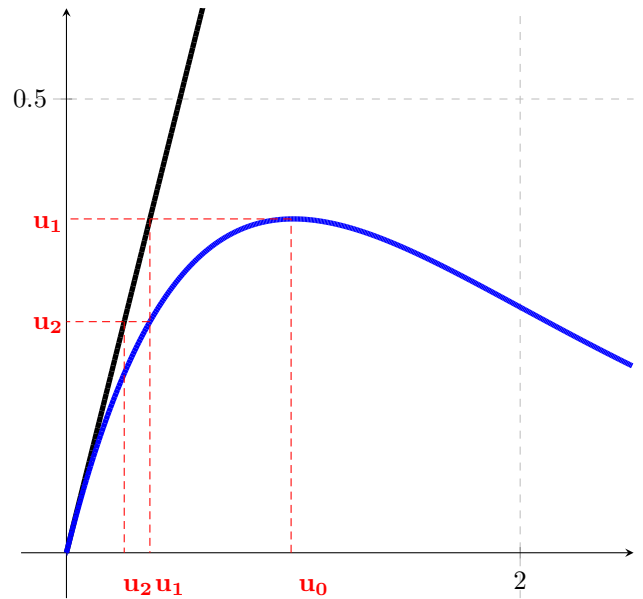
طريقة :

نقوم برسم التمثيل البياني (C_f) للدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

مثال :

لتكن المتتالية u_n معرفة:

بحدها الاول $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$



دراسة اتجاه تغير متتالية عددية

لدراسة اتجاه تغير متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

$u_{n+1} = f(u_n)$ نتبع احدى الطرق الاتية :

■ ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ (إخراج العامل المشترك و استعمال جدول الإشارة)

– اذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n \geq 0$ اذن المتتالية متزايدة

– اذا كان الفرق $u_{n+1} - u_n \leq 0$ اذن المتتالية متناقصة.

■ اذا كانت جميع الحدود موجبة، نقوم بحساب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

– اذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ، اذن المتتالية متزايدة

– اذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ اذن المتتالية متناقصة

■ باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع، نثبت انه من اجل كل

عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n \geq 0$

المتتالية الحسابية

عبارة الحد العام

1. متتالية حسابية (u_n) معرفة :

■ بحدها الاول u_0 او u_p

■ من اجل كل عدد طبيعي n

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{أو} \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

حيث r هو أساس (u_n)

2. نقول ان المتتالية (u_n) حسابية حدها الاول u_0 واساسها

r اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n ، الفرق

بين كل حدين متتابعين هو ثابت اي

$$u_{n+1} - u_n = r$$

الوسط الحسابي

اذا كانت a ، b و c اعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب

حدودا متتابعة من متتالية حسابية فان : $a + c = 2b$

المجموع

مجموع متتالية حسابية:

■ حدها الاول u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

■ حدها الاول u_p

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

حيث : $(n - p + 1)$ عدد حدود المتتالية من u_p حتى u_n .

بصفة عامة

$$S_n = (\text{عدد الحدود}) \times \left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right)$$

اتجاه التغير

■ إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية u_n متزايدة تماما

■ إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية u_n متناقصة تماما

■ إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة

المتتالية الهندسية

عبارة الحد العام

1. متتالية هندسية (u_n) معرفة

■ بعدها الاول v_0 او v_p

■ من اجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = v_p \times r^{(n-p)} \quad \text{أو} \quad v_n = v_0 \times r^n$$

2. نقول ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية حدها الاول v_0

و اساسها $q \neq 0$ اذا فقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n ، النسبة

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

حيث q عدد ثابت يمثل اساس المتتالية.

الوسط الهندسي

اذا كانت a ، b و c اعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب
حدودا متتابعة من متتالية هندسية فان : $a \times c = b^2$

المجموع

مجموع متتالية هندسية:

■ حدها الاول v_0 :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

■ حدها الاول v_p :

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

حيث : $(n - p + 1)$ عدد حدود المتتالية من v_p حتى v_n .

عدد حدود المتتالية = دليل الحد الاخير - دليل الحد الاول + 1

بصفة عامة

$$S_n = (\text{الحد الاول}) \times \left(\frac{\text{عدد الحدود}}{1 - q} \right)$$

اتجاه التغير

■ إذا كان $q > 1$ ، المتتالية (q^n) متزايدة

■ إذا كان $0 < q < 1$ ، المتتالية (q^n) متناقصة.

ومن اجل متتالية هندسية كيفية، نأخذ بعين الاعتبار الحد الاول v_0

■ إذا كان $v_0 > 0$ ، (v_n) و (q^n) لهما نفس اتجاه التغير

■ إذا كان $v_0 < 0$ ، (v_n) و (q^n) لهما اتجاه تغير متعاكسان

■ إذا كان $q = 1$ او $q = 0$ المتتالية (q^n) ثابتة

■ إذا كان $q < 0$ المتتالية (q^n) غير رتيبة

نهاية متتالية هندسية

■ إذا كان $q > 1$ فان $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ (متباعدة)

■ إذا كان $q = 1$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ (متقاربة)

■ إذا كان $-1 < q < 1$ فان $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ (متقاربة)

■ إذا كان $q \leq -1$ فان النهاية غير موجودة (متباعدة)

كيفية حساب نهاية متتالية عددية

1. متتالية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

لحساب نهاية متتالية نتبع احدى الطرق التالية:

■ الطريقة 1: (متتالية محدودة)

اذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة

من الاعلى $u_n \leq M$ فهي متقاربة نحو عدد حقيقي

$$l \leq M$$

■ اذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة

من الاسفل $u_n \geq m$ فهي متقاربة نحو عدد

$$l \geq m$$

■ الطريقة 2:

اذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة (الطريقة 1) نحو

عدد حقيقي l و f مستمرة عند l ، اذن l هو حل

$$f(l) = l$$

■ الطريقة 3:

استعمال مبرهنة الحصر في حساب النهايات

■ الطريقة 4:

حساب النهايات باستعمال المقارنة تسمح لنا باثبات

ان المتتالية متباعدة

1. المرحلة 1 : (الخاصية الابتدائية)

من اجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 1$ اذن $0 < u_0 < 2$ ومنه $P(0)$ صحيحة

2. المرحلة 2 : (الوراثية)

من اجل عدد طبيعي $n > 0$ نفرض صحة الخاصية $P(n)$ اي $0 < u_n < 2$ ونبرهن ان الخاصية $P(n+1)$ صحيحة اي $0 < u_{n+1} < 2$.
من فرضية التراجع لدينا :

$$0 < u_n < 2$$

$$2 < 2 + u_n < 4$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{4}$$

$$\underbrace{0 < \sqrt{2}}_{\text{بالتعدي}} < u_{n+1} < 2$$

اي ان الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل $n+1$

3. المرحلة 3 : (الاستنتاج)

اذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع و من اجل كل عدد طبيعي n فان : $0 < u_n < 2$

2. متتالية معرفة بعلاقة الحد العام $u_n = f(n)$

نقوم بحساب نهاية المتتالية (u_n) اي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

■ اذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ فهي متقاربة

■ اذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ فهي متباعدة.

⚠ النهاية اذا وجدت فهي وحيدة.

◀ متتاليتان متجاورتان

نقول عن متتاليتين (u_n) و (v_n) انهما متجاورتان اذا وفقط اذا كان

■ (u_n) متزايدة

■ (v_n) متناقصة

■ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

◀ مبدأ البرهان بالتراجع

يستعمل مبدأ البرهان بالتراجع لاثبات خاصية متعلقة بالاعداد الطبيعية n .
للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من اجل كل عدد طبيعي n يكفي :

1. نتأكد من ان $P(0)$ صحيحة

2. اذا كانت $P(n)$ صحيحة فان $P(n+1)$ صحيحة

اذن الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

تطبيق :

لتكن (u_n) متتالية معرفة بحددها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

• اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

الحل:

من اجل كل عدد طبيعي n نسمي الخاصية : $0 < u_n < 2$: $P(n)$

القسم II

تمارين تدريبية

رموز مفتاحية

- 🏠 تمارين للتدرب في المنزل
- 📝 تمارين للتدرب تتضمن افكار اساسية
- 👁 فكرة تستحق المحاولة
- © تمارين محلولة
- 🌟 تمارين للتعلم

تمرين رقم 1:



- (u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية بحدها الاول $u_0 = 2$ و بالعلاقة : $u_2 + u_5 = 25$
- (1) عين اساس المتتالية الحسابية (u_n) .
 - (2) اكتب الحد العام u_n بدلالة n .
 - (3) احسب قيمة الحد الذي رتبته 11.
 - (4) احسب المجموع : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

تمرين رقم 2:



- (u_n) متتالية حسابية حيث :
- $$\begin{cases} u_0 + u_3 = 6 \\ u_2 + u_5 = 22 \end{cases}$$
- (1) اوجد الحد الاول u_0 و الاساس r لهذه المتتالية.
 - (2) اكتب الحد العام (u_n) بدلالة n .
 - (3) هل العدد 2013 هو حد من حدود المتتالية؟
 - (4) ماهي قيمة و رتبة الحد الذي نبدء منه حتى يكون مجموع 20 حدا متتبعاً من هذه المتتالية مساوياً 1100 ؟
 - (5) احسب بدلالة n الجداء : $P_n = 2011^1 \times 2011^5 \times 2011^9 \times \dots \times 2011^{4n+1}$.

تمرين رقم 3:



- (u_n) متتالية هندسية حددا الاول : $u_1 = 2$ و اساسها $q = \frac{1}{3}$
- لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \ln(u_n)$
- اجب بصحيح او خطأ مع التبرير في كل حالة :
- (1) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا : $u_n = \frac{2}{3^{n+1}}$

(2) (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = -\ln 3$

(3) لدينا : $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)$

(4) لدينا : $v_1 + v_2 + \dots + v_n = n \ln 2 - \frac{n(n-1)}{2} \ln 3$

(5) لدينا : $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = \frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

تمرين رقم 4:



(1) برهن بالتراجع على ان من اجل كل عدد طبيعي n : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$

(2) استنتج قيمة المجموع : $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101$

تمرين رقم 5:



(u_n) متتالية حسابية متزايدة حدها الاول : $u_1 = -4$ و $u_2^2 + u_3^2 = 37$

(1) اوجد r اساس هذه المتتالية.

(2) اكتب الحد العام (u_n) بدلالة n .

(3) هل يوجد حد من حدود المتتالية يساوي 486 ؟

(4) ماهي رتبته ؟

(5) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(6) اوجد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 282$.

تمرين رقم 6:



(v_n) متتالية حسابية حدها الاول v_1 و

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 6 \end{cases}$$

(1) عين الحدود v_1 ، v_2 و v_3 للمتتالية واساسها.

(2) احسب الحد العام v_n بدلالة n .

(3) عبر بدلالة n عن المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

(4) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = -21$.

تمرين رقم 7:



(u_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{3}{2}$ ومجموع حدودها الثلاثة الاولى u_0, u_1, u_2 يساوي 38.

(1) احسب الحدود u_0, u_1, u_2 .

(2) احسب الحد العام u_n بدلالة n .

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
ثم استنتج المجموع S_5 (يعطي S_5 على شكل كسر غير قابل للاختزال).

تمرين رقم 8:



(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة بحدها الاول u_0 و الاساس q بحيث : $8u_6 = 125u_9$.

(1) احسب الاساس q . احسب بدلالة u_0 و n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(2) عين u_0 بحيث : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 150$.

(3) نفرض $u_0 = 90$ ، عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق $u_n \leq 10^{-3}$.

تمرين رقم 9:



(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 3u_n - 6$.

من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n - 3$.

(1) بين ان المتتالية (v_n) هندسية، ثم عين اساسها وحدها الاول.

(2) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، ثم استنتج بدلالة n المجموع : $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

تمرين رقم 10:



لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = \alpha$ و بالعلاقة : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

(1) نفرض $\alpha = 3$.

(1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 . ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم اثبت صحة تخمينك.

(2) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

(ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$

(1) اثبت ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(2) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) بين ان المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها.

(4) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ج) نفرض $\alpha = 6$. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

تمرين رقم 11:



لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \alpha(u_n - 2)$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم.

(1) عين العدد α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n + 4$

(ا) عين العدد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الاول و اساسها.

(ب) من اجل قيمة α المحصل عليها في السؤال (أ).

- احسب بدلالة n كل من المجموعين: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $T_n = (v_0)^3 + (v_1)^3 + (v_2)^3 + \dots + (v_n)^3$

تمرين رقم 12:



(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$

(1) احسب الحدود: u_1 ، u_2 ، u_3 . (تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال).

(2) (w_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $w_n = \frac{n}{n+1}$

(ا) قارن بين الحدود الاربعة الاولى للمتتالية (u_n) و الحدود الاربعة الاولى للمتتالية (w_n) .

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = w_n$

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(ا) بين ان: $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$

(ب) ليكن S_n المجموع المعرف كمايلي: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

- اكتب S_n بدلالة n ، ثم عين نهاية المجموع S_n لما n يؤول الى $+\infty$.

تمرين رقم 13:



(u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي: $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

(1) ادرس رتبة المتتالية (u_n) .

(ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n > n^2$.

(ب) ما هي نهاية المتتالية u_n ؟

(2) خمن عبارة u_n بدلالة n ، ثم برهن صحة تخمينك الذي وضعته.

تمرين رقم 14:



لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كمايلي: $u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n :
 $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$ نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

(1) اثبت ان المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(2) احسب w_n بدلالة n .

(3) اثبت ان المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.

(4) اثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و ان المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

(5) عين u_n و v_n بدلالة n .

(6) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

تمرين رقم 15:



(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$$

(1) احسب الحدود: u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 . (يطلب كتابة هذه الحدود على الشكل 2^α)

(2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي: $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

(ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية معيننا اساسها وحدها الاول.

(ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n

(ج) احسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(د) عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق: $u_n > 3.96$

تمرين رقم 16:



(I) (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما و بحيث : $\ln u_3 + \ln u_4 = 5$ و $\ln u_3 - \ln u_4 = -1$

(1) عين اساس المتتالية (u_n) وحدها الاول u_1

(2) اكتب u_n بدلالة n ، ثم احسب الجداء : $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

(II) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $v_n = \ln u_{n+1} - 2 \ln u_n$

(I) بين ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

(ب) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

(ج) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\ln S_n = 0$

تمرين رقم 17:



نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = \frac{1}{4}$ و $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}$

(1) احسب u_1 و u_2

(2) (I) بين بالتراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ فان : $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

(ج) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل

(3) (I) بين ان من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$

(ب) استنتج ان من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ فان : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 18:



(1) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = xe^{-x}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني

في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(I) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) انشئ المنحني (C)

(د) بين انه من اجل كل عدد حقيقي m من المجال $\left[0; \frac{1}{e}\right]$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين.

(هـ) حل المعادلة $f(x) = m$ في الحالتين : $m = 0$ و $m = \frac{1}{e}$

$$(2) \quad \begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases} \quad (u_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي :}$$

(ا) اثبت بالتراجع انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 0$ اثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة

(ب) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها.

$$(3) \quad (w_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي : } w_n = \ln u_n$$

(ا) اثبت انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = w_n - w_{n+1}$

(ب) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، اثبت ان : $S_n = w_0 - w_{n+1}$

(ج) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

القسم III

مواضيع بكالوريات جزائرية

1

شعبة علوم تجريبية

تمرين رقم 19:

© | | علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 13$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

(1) (ا) برهن بالتراجع انه : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$

اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(3) اكتب v_n بدلالة n ثم بين انه : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ و احسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

تمرين رقم 20:

© | | علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

f الدالة المعرفة على المجال $[4; 7[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

(1) (ا) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7[$

(ب) استنتج انه : من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فان $f(x) \in [4; 7[$

(2) برهن انه : من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فان $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x + 2}}$

ثم استنتج انه : من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فان $f(x) - x > 0$

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 4$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) برهن بالتراجع انه : من اجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$

(ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين انها متقاربة.

(4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$

(5) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 21:

📌 علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الاول $u_0 = 1$ حيث $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

(1) (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$

(ب) بين ان (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و استنتج انها متقاربة

(2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

- اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حددها الاول

(3) عبر بدلالة n عن u_n و v_n ، واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

تمرين رقم 22:

📌 علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي : $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

(1) احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2n + 1$

(ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$

(ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) احسب المجموعين S_n و T_n حيث :

$T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}}$ و $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$

تمرين رقم 23:

© | علوم تجريبية - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر المتتاليتين u_n و v_n المعرفتين على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

(1) احسب الحدين : u_1 و v_1

(2) اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$

(ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

(3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = u_n - v_n$

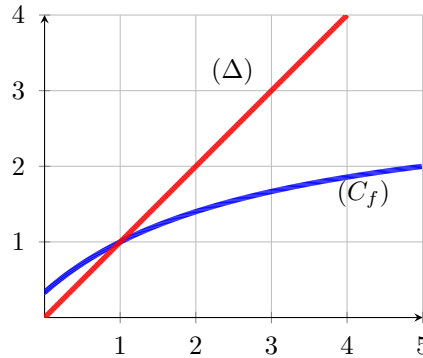
برهن ان المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n

(4) بين ان المتتالية (u_n) و (v_n) متجاورتان

تمرين رقم 24:

© | علوم تجريبية - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$



α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول u_0 حيث $u_0 = \alpha$

و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(I) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

(II) نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$

(1) (ا) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حساب الحدود)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

- (ا) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الاول
- (ب) عبر بدلالة n عن v_n و u_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- (3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \frac{1}{u_{n+2} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$

تمرين رقم 25:

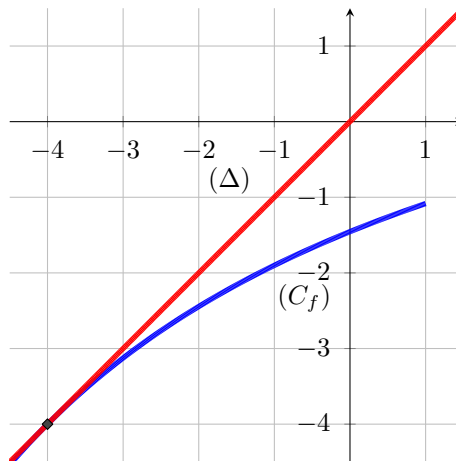
علوم تجريبية - 2017 - الموضوع الأول (04 نقاط)

- (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي :
- $u_0 = \frac{1}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$
- (1) (ا) برهن بالتراجع ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$
- (ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة.
- (2) (ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n
- (ب) اثبت ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$ ثم استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 26:

علوم تجريبية - 2017 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

- المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- f الدالة المعرفة على المجال $[-4; 1]$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x - 16}{x + 11}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها،
- (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$



- (ا) تحقق ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4; 1]$ ثم بين ان : من اجل كل $x \in [-4; 1]$ فان $f(x) \in [-4; 1]$
- (II) (u_n) متتالية معرفة بحددها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
- (1) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 (لا يطلب حساب الحدود)
- ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

(2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $-4 < u_n \leq 0$ ،

ثم بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$ ،

اثبت ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم احسب المجموع S حيث

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_{2016} \times u_{2016}$$

تمرين رقم 27:

علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الأول (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0; 4]$ كمايلي : $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

(1) (ا) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال I

(ب) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى I

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ ، من اجل كل عدد طبيعي n

(ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 4$ ،

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج انها متقاربة

(3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

(4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

(ا) برهن ان المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول v_0

(ب) اكتب v_n بدلالة n

(ج) استنتج ان : $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من اجل كل عدد طبيعي n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 28:

علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الثاني (4.50 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} \text{ و لتكن المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ بـ : } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

(1) بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول v_0

(2) (ا) عبر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n

(ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(4) تحقق ان : $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من اجل كل عدد طبيعي n

$$(5) \text{ استنتج بدلالة } n \text{ المجموع: } S' = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$$

تمرين رقم 29:

© | علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الأول (05 نقاط)

(I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x+8}$ (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

$$(1) \text{ ا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ احسب}$$

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) عين احداثي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له.

(3) ارسم (C) و (Δ).

(II) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و (u_3 بدون حسابها) موضحا خطوط الانشاء.

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربا.

(3) (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

(ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.

$$(د) \text{ استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

تمرين رقم 30:

🏠 علوم تجريبية - 2016 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

1. f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{5x}{x+2}$

$$(I) \text{ ا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ احسب}$$

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(II) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$

2. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$

(1) (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج انها متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

(ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{5}$ يطلب حساب حدها الاول v_0

(ب) اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) (د) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S'_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

تمرين رقم 31:

🏠 علوم تجريبية - 2015 - الموضوع الأول (04.5 نقطة)

 (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$ (1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 .(2) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$ (3) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل(4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$ (ا) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول(ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (ج) بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

تمرين رقم 32:

© | 🏠 علوم تجريبية - 2015 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

المستوى منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و $(O;$ (ا) f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.(1) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ (2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$ (3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$ (II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(1) (ا) انشئ على حامل محاور الفواصل الحدود: $u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3$ دون حسابها.(ب) خمن اتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) (2) (ا) اثبت انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث: $\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ (ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) (3) (ا) اثبت انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ (ب) بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (ج) استنتج ان: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ؛ ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n)

تمرين رقم 33:

🏠 علوم تجريبية - 2014 - الموضوع الأول (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي : $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ ،
و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 4$.

(1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(2) اكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n .

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

(4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n = 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$

(ا) بين ان المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$.

تمرين رقم 34:

🏠 علوم تجريبية - 2014 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

(1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2^{-n}}}$ (e هو اساس اللوغاريتم النيبيري).

(ا) بين ان (u_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(2) نضع، من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز الى اللوغاريتم النيبيري).

(1) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

(2) (ا) احسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$.

(ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$.

تمرين رقم 35:

🏠 علوم تجريبية - 2013 - الموضوع الاول (04 نقاط)

(ا) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

(1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول.

(2) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

(1) برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$.

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

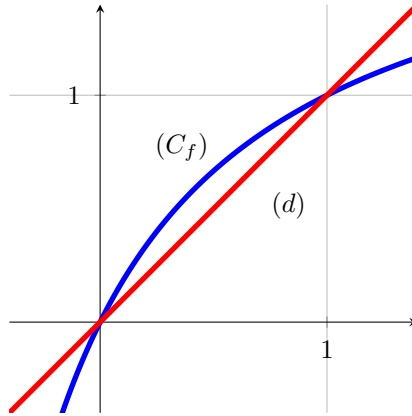
(3) (ا) برهن انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

(ب) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ ، استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين رقم 36:

🏠 علوم تجريبية - 2013 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

في الشكل المقابل ، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; 1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.



(1) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الاول، $u_0 = \frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(ا) اعد رسم هذا الشكل في ورقة الاجابة، ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزاً خطوط التمثيل.

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) (ا) اثبت ان الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 1]$.

(ب) برهن بالتراجع انه، من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

(ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حددها الاول v_0 .

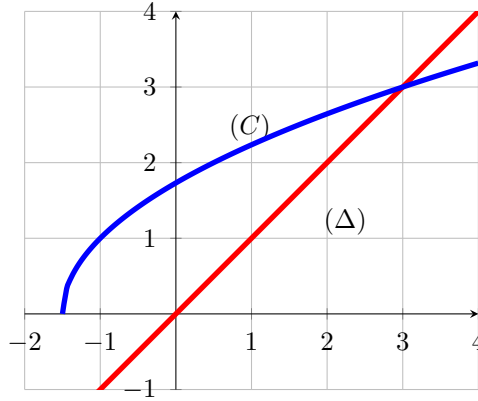
(ب) احسب نهاية (u_n) .

تمرين رقم 37:

علوم تجريبية - 2012 - الموضوع الأول (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

(1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كمايلي : $h(x) = \sqrt{2x + 3}$ ، (C) ، تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس. (انظر الشكل المقابل).



(ا) اعد رسم الشكل المقابل على ورقة الاجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها و موضحا خطوط الانشاء)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها.

(2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

(3) (ا) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(ب) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 38:

علوم تجريبية - 2012 - الموضوع الثاني (04.5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الاول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

(2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج ان (u_n) متزايدة تماما.

(3) برر لماذا (u_n) متقاربة.

(4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 3)$

(ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الاول.

(ب) اكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$

اكتب P_n بدلالة n ، ثم بين ان $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$

تمرين رقم 39:

🏠 علوم تجريبية - 2011 - الموضوع الأول (03 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = -1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الاتية افترحت ثلاث اجابات، اجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

(1) المتتالية (v_n) :

(ا) حسابية.

(ب) هندسية

(ج) لا حسابية ولا هندسية

(2) نهاية المتتالية (u_n) هي :

(ا) $+\infty$

(ب) $-\frac{1}{2}$

(ج) $-\infty$

(3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$

(ا) $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

(ب) $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$

(ج) $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

تمرين رقم 40:

🏠 علوم تجريبية - 2011 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

(v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

(1) (ا) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها α

(ب) اكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n .

(ج) عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من اجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

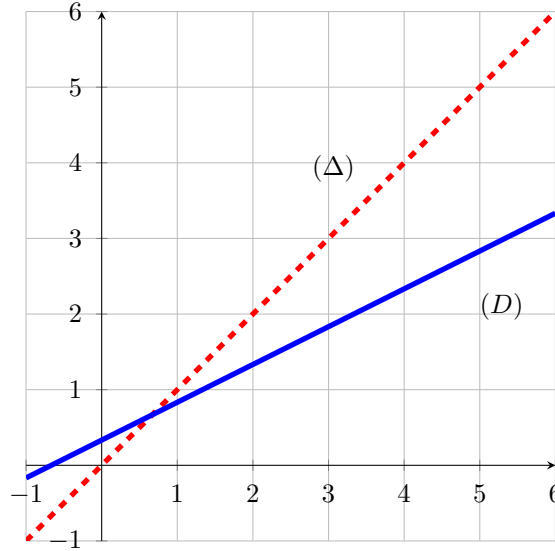
(2) نضع $\alpha = \frac{3}{2}$

- احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تمرين رقم 41:

🏠 علوم تجريبية - 2010 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

في المستوى المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ،
مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتهما على الترتيب: $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$



(1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

(أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 دون حسابها مبرزاً خطوط الرسم.

(ب) عين إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

(ج) أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) (أ) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \frac{2}{3}$.

(ب) إستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

(ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، وإستنتج عبارة u_n بدلالة n .

(ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، ثم إستنتج المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

تمرين رقم 42:

🏠 علوم تجريبية - 2009 - الموضوع الاول (03.5 نقطة)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$.

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(1) أحسب v_0 و v_1 .

(2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) (ا) أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] + 1$

(ج) بين أن (u_n) متقاربة.

تمرين رقم 43:

🏠 علوم تجريبية - 2009 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

(1) (ا) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و إستنتج الحد الأول u_1 .

(ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(ج) أحسب S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

(2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$.

(ا) أحسب v_2 و v_3 .

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بين أن (w_n) متتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

(ج) أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج v_n بدلالة n .

تمرين رقم 44:

🏠 علوم تجريبية - 2008 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1; 2]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

(ا) بين أن الدالة f متزايدة على I .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتهي إلى I .

(2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، u_n ينتهي إلى I .

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

(ب) عين النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين رقم 45:

🏠 علوم تجريبية - 2008 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة كما يلي: } u_0 = \frac{5}{2} \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$$

(1) (ا) أرسم في معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$, المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

(ب) باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود: u_4, u_3, u_2, u_1, u_0 .

(ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية u_n و تقاربها.

(2) (ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq 6$

(ب) تحقق أن (u_n) متزايدة.

(ج) هل (u_n) متقاربة؟ برر إجابتك.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = u_n - 6$

(ا) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2

شعبة تقني رياضي

تمرين رقم 46:

🏠 تقني رياضي - 2019 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$v_n = u_n - 3n + 1 \text{ و } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9 \end{cases}$$

(1) اثبت ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(2) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(4) (ا) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ 7^n على 9.

(ب) ماهو باقي القسمة الاقليدية على 9 للعدد $1442^{2019} + 1962^{1954} + 1954^{1962}$

(ج) اثبت انه من اجل كل طبيعي n : $6S_n - 7u_n \equiv 0 [9]$

تمرين رقم 47:

🏠 تقني رياضي - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{e \cdot x + 1}$ (e اساس اللوغاريتم النيبيري)

و (u_n) المتتالة العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = \frac{5}{4e}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{e}$.

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{e \cdot u_n (\frac{1}{e} - u_n)}{e \cdot u_n - 1}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر انها متقاربة.

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n كمايلي : $v_n = \frac{e \cdot u_n}{e \cdot u_n - 1}$ اثبت ان (v_n) متتالية هندسية اساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الاول v_0 و عبارة v_n بدلالة n

(3) (ا) تحقق انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 1 + \frac{1}{e \cdot u_n - 1}$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
(ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

تمرين رقم 48:

🏠 تقني رياضي - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كمايلي : $u_n = 2(3)^n$
و (v_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $v_0 = 4$ و من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = 5v_n + u_n$

(1) نضع من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$

- اثبت ان (w_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{5}{3}$ ، يطلب تعيين حدها الاول.

(2) اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$

(3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n و 3^n على 8

(4) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8

تمرين رقم 49:

🏠 تقني رياضي - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{a}$ و من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{an} u_n$ ، حيث a عدد حقيقي اكبر من او يساوي 2 .

(1) (ا) بين ان : من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n > 0$.

(ب) بين ان المتتالية u_n متناقصة تماما ثم استنتج انها متقاربة .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $v_n = \frac{1}{an} u_n$

(ا) بين ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{a}$ و عين حدها الاول v_1 بدلالة a .

(ب) جد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

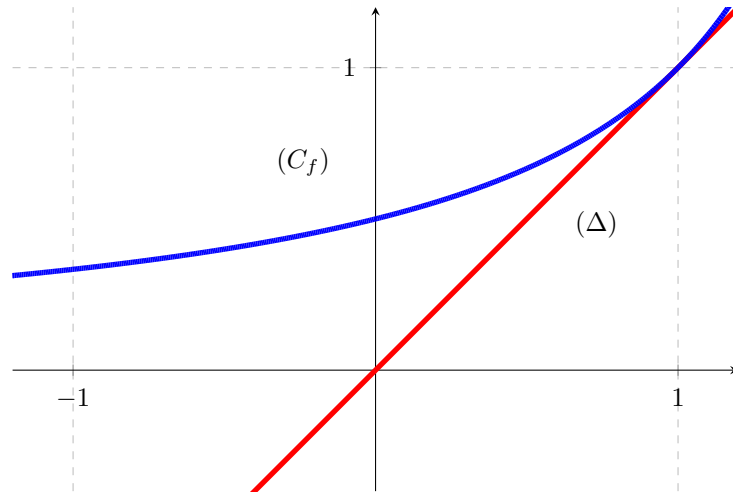
(3) احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \dots + \frac{1}{n}u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2016} \text{ حيث } a \text{ قيمة } a$$

تمرين رقم 50:

🏠 تقني رياضي - 2017 - الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2-x}$. (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$. المتتالية العددية المعرفة بحددها الاول u_0 حيث $u_0 = -1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$



(1) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع ان: من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة.

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{2}{1-u_n}$

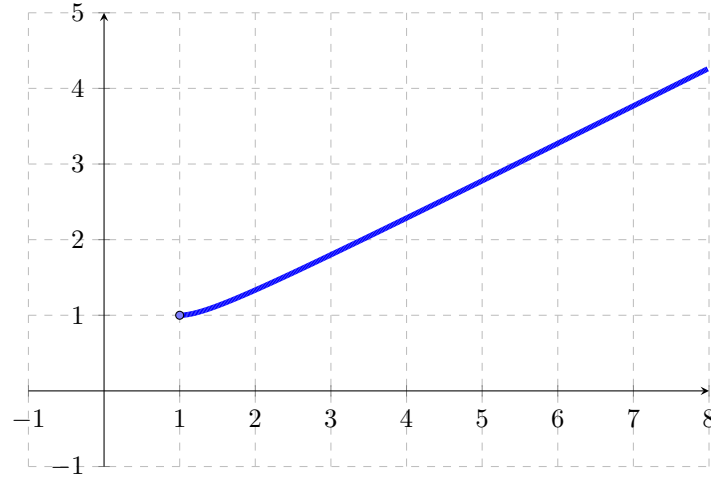
(ا) برهن ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها 2 ثم عين عبارة حدها العام v_n بدلالة n

(ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 51:

🏠 تقني رياضي - 2016 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، الشكل المقابل



(1) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) انقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الاربعة الاولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضعا خطوط الانشاء.

(ب) اعط تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(ج) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$

(د) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(هـ) برر تقارب المتتالية (u_n)

(3) نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

(ا) برهن ان (w_n) متتالية هندسية اساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الاول.

(ب) اكتب w_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n

(ج) بين ان: $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

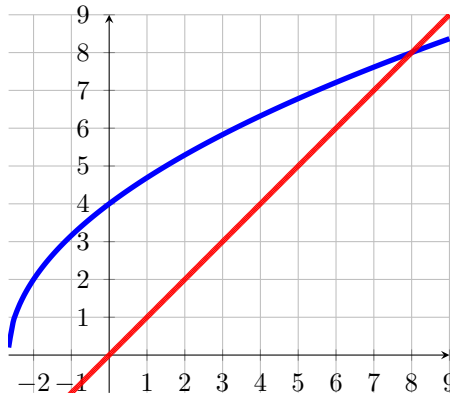
(4) احسب بدلالة n المجموع التالي: $S_n = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \dots + \frac{1}{w_n}$

تمرين رقم 52:

📌 تقني رياضي - 2015 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحده الاول: $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

(1) h الدالة المعرفة على $\left[-\frac{8}{3}; +\infty\right[$ بمايلي: $h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (انظر الشكل)



- (أ) اعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء)
 (ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها

(1) (أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n: 0 \leq u_n \leq 8$

(ب) بين انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(8 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{6u_n + 16} + u_n}$

(ج) استنتج اتجاه تغير (u_n)

(2) (أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n: 0 < 8 - u_n \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n: 0 < 8 - u_n \leq 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 53:

🏠 تقني رياضي - 2014 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(أ) f هي الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ ب: $f(x) = x - \ln(x - 1)$

(1) حدد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$

(2) (أ) عين اتجاه تغير f

(ب) بين انه اذا كان $x \in [2; e + 1]$ فان $f(x) \in [2; e + 1]$

(II) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = e + 1$ و من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \in [2; e + 1]$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم احسب نهايتها.

تمرين رقم 54:

🏠 تقني رياضي - 2014 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

f هي دالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$

ادرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 5^4 \left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$

$$(1) \text{ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي } n, u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$$

(2) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، فان u_n عدد طبيعي.

(3) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

تمرين رقم 55:

🏠 تقني رياضي - 2013 - الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي :

$$u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}} : n \text{ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n, u_0 = e^2$$

$$(v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي : } v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$$

(1) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الاول.

(2) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n ، حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(4) احسب بدلالة n الجداء P_n ، حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

تمرين رقم 56:

🏠 تقني رياضي - 2011 - الموضوع الأول (05 نقاط)

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N}^* \text{ كمايلي : } u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

(1) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج ان : $u_n > 1$

(2) ادرس اتجاه تغير (u_n) ثم بين انها متقاربة ، احسب نهاية (u_n)

(3) ليكن الجداء p_n المعرف كمايلي : $p_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ ، اثبت بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان : $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $v_n = \ln u_n$ حيث $\ln$ دالة اللوغاريتمية النيبيري عبر بدلالة p_n عن S_n ، حيث : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ثم احسب نهاية S_n لما n يتنتهي الى $+\infty$

تمرين رقم 57:

🏠 تقني رياضي - 2008 - الموضوع الأول (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; 2]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

(1) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2]$

ب) انشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة على المحورين $4cm$)

ج) برهن انه اذا كان $x \in [0; 2]$ فان $f(x) \in [0; 2]$

(2) نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

ا) برر وجود المتتالية (u_n) . احسب الحدين u_1 و u_2

ب) مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) والمستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها انطلاقا من التمثيل السابق.

(3) ا) برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n ان : $0 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

ب) برهن انه مهما يكن العدد الطبيعي n فان : $u_{n+1} > u_n$
ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب (u_n) ؟

ج) تحقق ان : $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{u_n + 2}(u_n - \sqrt{3})$ من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

عين عددا حقيقيا k من $]0; 1[$ بحيث : $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k|u_n - \sqrt{3}|$

بين انه من اجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n |u_0 - \sqrt{3}|$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 58:

🏠 تقني رياضي - 2008 - الموضوع الثاني (08 نقاط)

(1) f الدالة العددية المعرفة على $]-2; +\infty[$ كماياتي : $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$

(C_f) منحنى f في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الاطوال $2cm$)

ا) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف.

ب) ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين ان المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب للمنحنى (C_f) ثم ارسم (C_f) و (D)

د) بين ان صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الاول $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = f(u_n)$

ا) باستخدام (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x$ ، مثل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل (ox) .

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)

ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ و ان المتتالية (u_n) متزايدة.

د) استنتج ان (u_n) متقاربة و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3

شعبة رياضيات

تمرين رقم 59:

رياضيات - 2019 - الموضوع الاول (04 نقاط)

(1) حل المعادلة (E) $505x - 673y = 1$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عدنان صحيحان.

(لاحظ أن: $2019 = 3 \times 673$ و $2020 = 4 \times 505$).

(2) بين أنه من أجل كل ثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x و y من نفس الإشارة.

(3) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$$

- أكتب u_α بدلالة α ثم أكتب v_β بدلالة β حيث α و β عدنان طبيعيان.

(4) (أ) عين الحدود المشتركة للمتاليتين (u_n) و (v_n) ثم بين أن هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$
أحسب بدلالة n الجداء $p = X_1 \cdot X_2 \dots X_n$

تمرين رقم 60:

رياضيات - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة معرفة بحدها الأول u_1 حيث $u_1 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$$

1. (1) تحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$ ،

(2) استنتج كتابة الحد العام u_n بدلالة n

2. تحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = n(n-2) + 1$.

3. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $n-2$ يقسم $n-5$.

4. (ا) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، بين أن : $PGCD(n-2; u_n) = 1$.

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$.

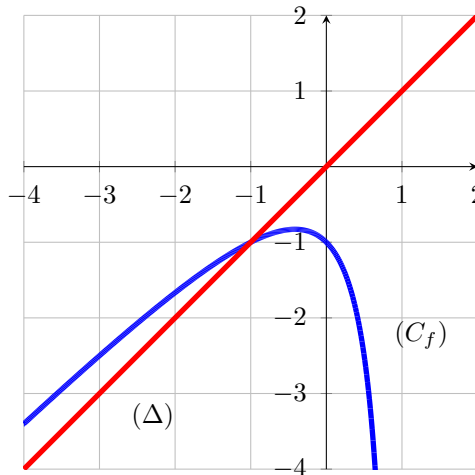
تمرين رقم 61:

رياضيات - 2018 - الموضوع الاول (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ ب: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = -3$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (انظر الشكل المقابل).



(1) اعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزاً خطوط التمثيل، اعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $-3 \leq u_n < -1$

(3) (ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$

(ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n + 1 \geq -2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$(4) \text{ نضع } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) \leq 8 \left[\left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} - 1 \right]$
واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

تمرين رقم 62:

📌 رياضيات - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4u_n + 1$

$$(1) \text{ ا بين ان: من اجل كل عدد طبيعي } n, u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$$

(ب) تحقق ان : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العددان الطبيعيان u_n و u_{n+1} اوليين فيما بينهما.

$$(2) \text{ لتكن المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة كمايلي : من اجل كل عدد طبيعي } n, v_n = u_n + \frac{1}{3}$$

(ا) اثبت ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول v_0

(ب) عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{3n}$

(3) عين من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، القاسم المشترك الاكبر للعددين الطبيعيين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$

(4) (ا) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7.

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n المعرف بـ : $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ ، القسمة على 7

تمرين رقم 63:

📌 رياضيات - 2017 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الاول $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 7u_n + 8$

$$(1) \text{ برهن بالتراجع ان : من اجل كل عدد طبيعي } n, 3u_n = 7^{n+1} - 4$$

$$(2) \text{ نضع من اجل كل عدد طبيعي } n : S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n \text{ و } S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

(ا) احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S'_n و S_n

(ب) استنتج ان : من اجل كل عدد طبيعي n ، $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$

(3) (ا) عين قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5

تمرين رقم 64:

📌 رياضيات - 2016 - الموضوع الاول (04 نقاط)

$$\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الاول } u_0 \text{ و اساسها } q \text{ حيث :}$$

(1) احسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q

(2) نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$

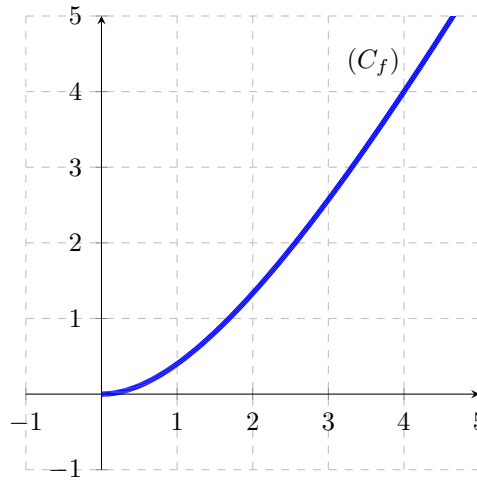
(ا) عبر عن u_n بدلالة n

(ب) نضع: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$ احسب S_n بدلالة n .

تمرين رقم 65:

✈ رياضيات - 2014 - الموضوع الثاني (04.5 نقاط)

الدالة العددية f المعرفة على $[0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل ادناه.



(1) بين ان الدالة f متزايدة تماما.

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = f(u_n)$ المستقيم الذي معادلته $y = x$

(ا) باستعمال المنحني (C_f) و المستقيم (Δ) مثل ، على حامل محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 دون حسابها

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(3) (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n , $0 \leq u_n \leq 3$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة

(ج) استنتج ان (u_n) متقاربة.

(4) (ا) ادرس اشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ و استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n , $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n , $0 \leq u_n \leq 3 \left(\frac{6}{7}\right)^n$

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n الى $+\infty$

تمرين رقم 66:

رياضيات - 2009 - الموضوع الأول (06 نقاط)

(1) نعرف الدالة العددية f على المجال $[1; 5]$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{x} \right)$ ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة على المحورين $3cm$

(أ) ادرس تغيرات الدالة f

(ب) انشئ المنحنى البياني (C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في نفس المعلم.

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الاول $u_0 = 5$ و بالعلاقة:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{5}{u_n} \right)$$

(أ) احسب u_1 و u_2

(ب) استعمل المنحنى (C) و المستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل.

(3) (أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n: u_n \geq \sqrt{5}$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب (u_n) ؟

(4) (أ) برهن انه مهما يكن العدد الطبيعي n فان: $(u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$

(ب) استنتج ان: $(u_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$. ما هي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 67:

رياضيات - 2008 - الموضوع الاول (06 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ الى منحني f في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة على المحورين $2cm$)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ وفسر النتيجة هندسيا.

(أ) ادرس تغيرات الدالة f

(ب) باستعمال منحني دالة "الجزر التربيعي"، انشئ المنحنى (C)

(ج) ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$

(2) نعرف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) باستعمال (D) و (C) ، مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

(3) (أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2 \leq u_n \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$

(ب) استنتج ان (u_n) متقاربة. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين رقم 68:

🏠 رياضيات - 2008 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحددها الاول $u_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

(1) احسب u_1 و u_2 و u_3

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع ان (v_n) متتالية ثابتة

- استنتج عبارة u_n بدلالة n

- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) (w_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع S حيث : $S = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$

القسم IV

مواضيع بكالوريات أجنبية

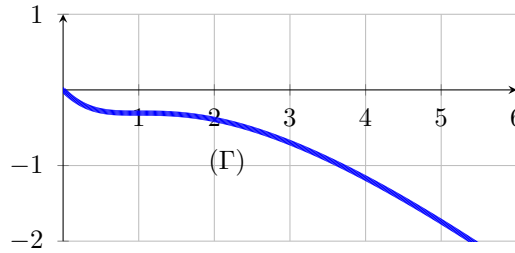
تمرين رقم 69:

🏠 بكالوريا تونس 2016

المنحنى (Γ) المقابل هو التمثيل البياني ، في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ للدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = -x + \ln(1 + x^2)$$

(Γ) يقطع محور الفواصل، فقط عند المبدأ O



(1) بقراءة بيانية، برر انه من اجل كل x من $[0; +\infty[$: $\ln(1 + x^2) \leq x$

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1 + u_n^2) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

(ا) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

(ب) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

(ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة، واعط نهايتها.

(3) لتكن المتتالية S_n المعرفة على بـ : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(ا) بين ان المتتالية (S_n) متزايدة تماما.

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n \leq 3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(ج) استنتج ان المتتالية (S_n) متقاربة.

تمرين رقم 70:

🏠 بكالوريا تونس 2015

(1) لتكن المتتالية الهندسية (u_n) التي حدها الاول $u_0 = \frac{1}{3}$ و اساسها $q = \frac{1}{3}$

(ا) احسب u_1

(ب) عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) من اجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بين ان $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

(2) بدراسة تغيرات الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = e^x - 1 - x$ بين انه مهما يكن $x \in \mathbb{R}$: $1 + x \leq e^x$

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة، من اجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \times \cdots \times (1 + u_n)$

(ا) احسب v_0 و v_1

(ب) بين ان المتتالية v_n متزايدة

(ج) بين انه، من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n \leq e^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)}$

(د) بين ان المتتالية (v_n) متقاربة.

(هـ) لتكن l نهاية المتتالية (v_n) . بين ان $1 < l < \sqrt{e}$

تمرين رقم 71:

✈ بكالوريا تونس 2010

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان كمايلي : $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \alpha u_n + (1 - \alpha)v_n$ و $v_{n+1} = (1 - \alpha)u_n + \alpha v_n$ حيث α عدد حقيقي مع $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

(1) لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $w_n = v_n - u_n$

(ا) احسب w_0 و w_1

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = (2\alpha - 1)^n$

(ج) استنتج نهاية المتتالية (w_n)

(2) (ا) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq v_n$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة و ان المتتالية (v_n) متناقصة

(ج) استنتج ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية

(د) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n + v_n = 3$ و استنتج قيمة النهاية

تمرين رقم 72:

✈ بكالوريا المغرب 2016

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

(1) (ا) تحقق من ان $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$

(ب) بين بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n ان $u_n < 3$

(2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

(ا) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

(ب) استنتج ان $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

(ج) بين ان $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ ، لكل n من $\mathbb{N}$ ثم اكتب u_n بدلالة n

(د) حدد نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 73:

🏠 بكالوريا فرنسا 2017
(Antilles Guyane)

(1) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(ا) ادرس تغيرات الدالة f ثم استنتج القيم الحدية للدالة f ؟

(2) اثبت انه من اجل كل $n \geq 3$ ، المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا α_n على المجال $[1, e]$

(ا) على البيان لدينا التمثيلات البيانية لكل من المستقيمات D_3 ، D_4 و D_5 ذو المعادلات $y = \frac{1}{3}$ ، $y = \frac{1}{4}$ و $y = \frac{1}{5}$ على التوالي.

(ب) ضع تخمينا لاتجاه تغير المتتالية (α_n)

(ج) قارن بين $f(\alpha_n)$ و $f(\alpha_{n+1})$ وذلك من اجل كل $n \geq 3$

(د) حدد اتجاه تغير المتتالية (α_n)

(هـ) استنتج ان المتتالية (α_n) متقاربة

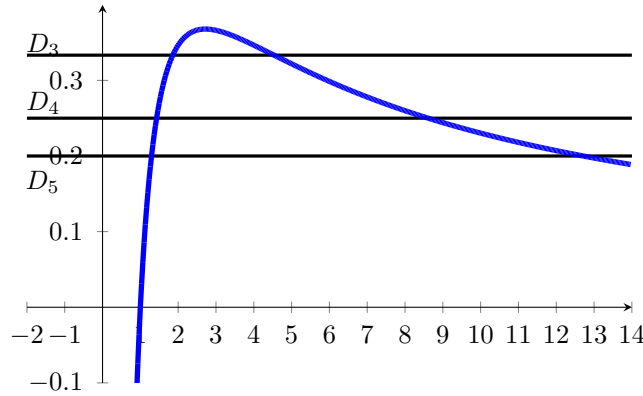
(3) نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ ، المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلا اخر β_n حيث $1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$

(ا) نفرض ان المتتالية β_n متزايدة.

اثبت انه من اجل كل $n \geq 3$ فان

$$\beta_n \geq n \frac{\beta_n}{3}$$

(ب) استنتج نهاية المتتالية (β_n)



تمرين رقم 74:

🏠 بكالوريا فرنسا 2015
(Polynésie)

(1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $u_n = e^{v_n}$ و المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_1 = \ln(2)$

و من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n})$

(ا) تحقق ان $u_1 = 2$ و ان من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$

(ب) احسب كل من u_2 ، u_3 و u_4 . (تعطى النتائج على شكل كسور)

(ج) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n = \frac{n+1}{n}$

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_1 = \ln(2)$ و من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n})$

(ا) عبر عن v_n بدلالة u_n ثم بدلالة n

(3) (ا) لتكن المتتالية (S_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

(ب) تحقق ان $S_3 = \ln(4)$

(ج) عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتالية (S_n)

تمرين رقم 75:

🏠 بكالوريا فرنسا 2015

(Centres étrangers)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = a$ ، و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$. حيث a عدد حقيقي ثابت غير معدوم.

(1) لتكن g الدالة المعرفة، من اجل كل عدد حقيقي x بـ: $g(x) = e^{2x} - e^x - x$

(ا) احسب $g'(x)$ ، وتحقق انه، من اجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$

(ب) حدد تغيرات الدالة g ، واعط قيمتها الحدية الصغرى.

(ج) بملاحظة ان $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ ، ادرس اتجاه تغير المتتالية u_n

(2) في هذا السؤال، نفرض ان $a \leq 0$

(ا) برهن بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n ، ان $u_n \leq 0$

(ب) استنتج، من الاسئلة السابقة، ان (u_n) متقاربة.

(ج) اعط نهاية المتتالية (u_n) ، في حالة $a = 0$

(3) في هذا السؤال، نفرض ان $a > 0$

(ا) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$

(ب) برهن بالتراجع، من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq a + n \times g(a)$

(ج) عين نهاية المتتالية (u_n)

تمرين رقم 76:

🏠 بكالوريا فرنسا 2014

(Polynésie)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$

(1) احسب u_1 و u_2

(2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_{n+1} - u_n$

(ا) اكتب v_n بدلالة n .

(ب) ماهي طبيعة المتتالية (v_n) ؟

(ج) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = (n+1)(n+2)$ ،

(د) بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $S_n = u_{n+1} - u_0$ ثم استنتج u_n بدلالة n

تمرين رقم 77:

بكالوريا فرنسا 2013

(Métropole)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ ،

(1) (ا) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) (ا) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n + 3$

(ب) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ،

(ج) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - n$

(ا) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{3}$

(ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ ،

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n)

(4) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

(ا) عبر عن S_n بدلالة n .

(ب) عين نهاية المتتالية (T_n)

تمرين رقم 78:

بكالوريا فرنسا 2012

(Antilles Guyane)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$

(1) احسب u_2 ، u_3 و u_4

(2) (ا) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان u_n موجب تماما

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج انها متقاربة، ثم احسب نهايتها

(3) من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $v_n = \frac{u_n}{n}$

(ا) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول v_1

(ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n ، $u_n = \frac{n}{2^n}$

(4) نعتبر الدالة f و المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ ب : $f(x) = \ln x - x \ln 2$

(ا) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

(ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين رقم 79:

🏠 بكالوريا فرنسا 2010

(Antilles Guyane)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

(1) احسب u_2 ثم استنتج ان (u_n) لا هي هندسية ولا هي حسابية.

(2) نعرف المتتالية (v_n) من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

(ا) احسب v_0

(ب) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

(ج) استنتج ان المتتالية (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

(د) عبر عن v_n بدلالة n .

(3) نعرف المتتالية (w_n) من اجل كل عدد طبيعي n ب : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

(ا) احسب w_0

(ب) باستعمال العلاقة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ ، عبر عن w_{n+1} بدلالة u_n و v_n

(ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $w_{n+1} = w_n + 2$

(د) عبر عن w_n بدلالة n

(4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

(5) من اجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

القسم ٧

مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس أشبال الأمة

4

شعبة علوم تجريبية

تمرين رقم 80:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

(1) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n + 3$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل. هل هي متقاربة؟ برر.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - n$

(أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(ج) احسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(3) نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة بـ: $t_n = \ln(v_n)$

(أ) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(ب) احسب المجموع: $S_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$

تمرين رقم 81:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي، الموضوع الثاني (04 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $[-1; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = x - \ln(x+2)$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) (u_n) متتالية معرفة كمايلي : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(ا) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$.

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و احسب نهايتها.

(3) (v_n) متتالية معرفة كمايلي : $v_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \ln[(u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times \cdots \times (u_{n-1} + 2)]$$

(ا) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 - u_n$

(ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(u_0 + 2) \times (u_1 + 2) \times \cdots \times (u_{n-1} + 2)]$

تمرين رقم 82:

© | 🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2018 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

(ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq n$

(ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما

(2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = u_n - n + 1$

(ا) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية ثم اكتب v_n و u_n بدلالة n

(ب) احسب قيمة المجموع : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{n-1}^2$ بدلالة n .

(ج) احسب قيمة المجموع : $K_n = (u_0)^2 + (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 2)^2 + \cdots + (u_{n-1} - n + 1)^2$ بدلالة n .

تمرين رقم 83:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
$$n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_0 = 6 \\ 3u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$$

(1) (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{2}$

(ب) بين ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج انها متقاربة.

(ج) عين نهاية المتتالية (u_n) (2) لنعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln \left(u_n - \frac{1}{2} \right)$ (ا) بين ان (v_n) متتالية حسابية، يطلب تحديد اساسها r وحدها الاول.(ب) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n (ج) عين نهاية ثانية للمتتالية (u_n)

تمرين رقم 84:

✈ بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الثاني (04 نقاط)

نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1}$
 حيث α عدد حقيقي من المجموعة $\{0\} -]-1; 1[$
 نضع و من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$

(1) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول بدلالة α .(2) هل المتتالية (v_n) متقاربة؟(3) احسب بدلالة α و n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ (4) عين قيمة العدد الحقيقي α علما ان $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$
 - استنتج عندئذ (u_n) بدلالة n ثم بين ان (u_n) متقاربة.(5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ (ا) بين ان: $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2 - n - 2}{2}}$ (ب) عين اصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$

5

شعبة رياضيات

تمرين رقم 85:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2019 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

(1) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين $4^5 - 1$ و $4^6 - 1$

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$

(أ) احسب الحدود: u_2 ، u_3 و u_4 .

(ب) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

(ج) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n عدد طبيعي، ثم استنتج $PGCD(u_n; u_{n+1})$

(3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

(أ) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول.

(ب) اكتب بدلالة العدد الطبيعي n ثم عبارة u_n

(ج) عين من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(4^{n+1} - 1; 4^n - 1)$

تمرين رقم 86:

🏠 بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2018 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

(1) (u_n) متتالية حسابية حدها الاول $u_0 = 5$ واساسها 4

(ا) اكتب الحد العام u_n بدلالة n (ب) احسب قيمة المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n .(ج) اذا كان مجموع خمسة حدود متعاقبة من (u_n) هو 2025 فما هو الحد الاول من هذه الحدود(2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = (2n + 1) \times 2^{(4n+5)}$ (ا) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7(ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3(ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{(2n+1)!}{2^n \times n!} = 1 \times 3 \times 5 \dots \times (2n+1)$ (د) استنتج قيمة الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ بدلالة n

تمرين رقم 87:

✈ بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2017 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

 v_0 و q عددان طبيعيان غير معدومين. (v_n) متتالية هندسية حدها الاول v_0 و اساسها q (1) عين q و v_0 علما ان q اولي مع v_0 و $3v_0^2 = v_3 - v_1$ (2) نفرض فيما يلي ان: $v_0 = 8$ و $q = 3$ ونضع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ احسب كل من S_n و T_n بدلالة n (ا) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد $3n$ على 13(ب) عين قيم n التي يكون من اجلها S_n مضاعفا للعدد 13

تمرين رقم 88:

✈ بكالوريا تجريبية لمدارس أشبال الأمة - 2016 - دورة ماي، الموضوع الأول (04 نقاط)

 a و b عددان حقيقيان حيث $0 < a < b$. (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ $u_0 = a$ و $v_0 = b$ و من اجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

(1) اثبت من اجل كل عدد طبيعي n ان $0 \leq u_n \leq v_n$ (2) بين من اجل كل عدد طبيعي n ان $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. (يمكن استعمال النتيجة $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq 1$ حيث $x > 0$ و $y > 0$)(3) استنتج ان $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$ من اجل كل عدد طبيعي n .(4) اثبت ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.(5) فيما يلي نضع $a = 2$ و $b = 5$.بواسطة آلة حاسبة احسب u_3 ثم استنتج قيمة مقربة بالنقصان الى 10^{-3} للنهاية المشتركة للمتتاليتين

...

الفهرس

النهايات بالمقارنة, 51

مبرهنة الحصر, 12, 16, 20, 21, 23, 33, 35, 38--40

متتالية حسابية, 15, 16, 19, 31, 36, 50, 52, 53

متتالية هندسية, 9--11, 17--20, 22--30, 32, 34, 38, 43,

44, 47, 48, 50--54

متجاورتان, 17, 54