

مجاميع و جداءات المتتاليات

إعداد: عبلة محمد أمين

(u_n) متتالية حسابية حيث $u_n = 2 + 3n$ (الأساس $r = 3$ و الحد الأول $u_0 = 2$)

(v_n) متتالية هندسية حيث $v_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (الأساس $q = \frac{1}{3}$ و الحد الأول $v_0 = 2$)

ولتكن المتتالية (w_n) حيث $v_n = w_n + a$ (مع عدد a حقيقي غير معدوم)

و نعتبر المتتاليتين العدديتين $\alpha_n = \frac{1}{n(n+1)}$ و $\beta_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ (مع $n > 0$)

أحسب المجاميع و الجداءات التالية :

$$S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_n - 1$$

$$S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_n - 2$$

$$S_3 = b^{u_0} + b^{u_1} + \dots + b^{u_n} - 3 \quad (\text{مع } b \text{ عدد حقيقي غير معدوم مختلف عن } 1)$$

$$S_4 = v_0^\alpha + v_1^\alpha + \dots + v_n^\alpha - 4 \quad (\text{مع } \alpha \text{ عدد حقيقي غير معدوم مختلف عن } 1)$$

$$S_5 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n} - 5$$

$$S_6 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \dots + \sqrt{v_n} - 6$$

$$S_7 = w_0 + w_1 + \dots + w_n - 7$$

$$S_8 = v_0 + v_1 + \dots + v_{2n} - 8$$

$$S_9 = v_0 + v_2 + \dots + v_{2n} - 9$$

$$S_{10} = v_1 + v_3 + \dots + v_{2n+1} - 10$$

$$P_1 = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n - 11$$

$$S_{11} = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n - 12 \quad (\text{بطريقتين})$$

$$S_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 13 \quad (\text{بعد إثبات أن } \alpha_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

خاصة بشعبة الرياضيات:

$$P_2 = \beta_1 \times \beta_2 \times \dots \times \beta_n - 14$$

$$S_{13} = \ln \beta_1 + \ln \beta_2 + \dots + \ln \beta_n - 15 \quad (\text{بطريقتين})$$

$$S_{14} = 1v_1 + 2v_2 + \dots + nv_n - 16$$

تذكير:

قانون مجموع متتالية حسابية:

إذا كانت $u_n = u_0 + nr$ فإن:

$$S_n = u_p + \dots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2}$$

حيث:

u_p الحد الأول في المجموع

u_n الحد الأخير في المجموع

p دليل الحد الأول

n دليل الحد الأخير

$n - p + 1$ عدد الحدود

قانون مجموع المتتالية الهندسية:

إذا كانت $v_n = v_0 \times q^n$

$$S_n = v_p + \dots + v_n = v_p \left(\frac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q} \right) \text{ فإن}$$

حيث:

v_p الحد الأول في المجموع

v_n الحد الأخير في المجموع

p دليل الحد الأول

n دليل الحد الأخير

$n - p + 1$ عدد الحدود

$$S_4 = v_0^\alpha + v_1^\alpha + \dots + v_n^\alpha - 4$$

هنا نلاحظ ان المجموع هو لمتتالية مكتوبة

على الشكل v_n^α

$$v_n^\alpha = (v_0 \times q^n)^\alpha = v_0^\alpha \cdot q^{n\alpha} = v_0^\alpha \cdot (q^\alpha)^n$$

بعد الإثبات نجد أن (v_n^α) متتالية هندسية

$$v_0^\alpha = 2^\alpha \text{ أساسها } q^\alpha = \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \text{ وحدها الأول}$$

إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد

$$S_4 = v_0^\alpha \left(\frac{1 - (q^\alpha)^{n-0+1}}{1 - q^\alpha} \right) = 2^\alpha \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha(n+1)}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha} \right)$$

$$S_5 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n} - 5$$

$$\frac{1}{v_n} = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{2} \times 3^n \text{ لدينا}$$

إذا بعد البرهان نجد أن $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ متتالية

هندسية أساسها $\frac{1}{q} = 3$ وحدها الأول

$$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{2}$$

إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد

$$S_5 = \frac{1}{v_0} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^{n-0+1}}{1 - \left(\frac{1}{q}\right)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{-2} \right) = \frac{1}{4} (3^{n+1} - 1)$$

$$S_6 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \dots + \sqrt{v_n} - 6$$

$$S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_n - 1$$

المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=3$ وحدها

$$u_0 = 2 \text{ الأول}$$

$$S_1 = \frac{(u_0 + u_n)(n-0+1)}{2} = \frac{(4+3n)(n+1)}{2} \text{ إذا}$$

$$S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_n - 2$$

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها

$$v_0 = 2 \text{ الأول}$$

$$S_2 = v_0 \left(\frac{1 - q^{n-0+1}}{1 - q} \right) = 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \right) \text{ إذا}$$

$$= 3 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$$S_3 = b^{u_0} + b^{u_1} + \dots + b^{u_n} - 3$$

هنا نلاحظ ان المجموع هو لمتتالية مكتوبة على

الشكل b^{u_n}

$$b^{u_n} = b^{u_0 + nr} = b^{2+3n} = b^2 \times b^{3n} = b^2 \times (b^3)^n \text{ إذا}$$

بعد الإثبات نجد أن (b^{u_n}) متتالية هندسية

أساسها $b^{u_0} = b^2$ وحدها الأول $q' = b^r = b^3$

إذا نطبق قانون مجموع متتالية هندسية فنجد

$$S_3 = b^{u_0} \left(\frac{1 - (b^r)^{n+1}}{1 - b^r} \right) = b^2 \left(\frac{1 - (b^3)^{n+1}}{1 - b^3} \right)$$

$$S_8 = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{2n+1} \right)$$

$$S_9 = v_0 + v_2 + \dots + v_{2n} - 9$$

$$\text{نلاحظ أن } \frac{v_{2n}}{v_{2n-2}} = \dots = \frac{v_2}{v_0} = q^2 \text{ (قسمة كل$$

حد على الحد الذي يسبقه)

إذا المجموع S_9 هو مجموع متتالية

هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_0

$$\text{نسميها } x_n = v_0 \cdot (q^2)^n$$

$$\text{إذا } S_9 = x_0 + x_1 + \dots + x_n = v_0 \left(\frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - q^2} \right)$$

$$S_{10} = v_1 + v_3 + \dots + v_{2n+1} - 10$$

نكتب كل الحدود بدلالة v_1 و q باستخدام

$$\text{عبارة الحد العام } v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$$

فيصبح لدينا

$$S_{10} = v_1 + v_1 q^2 + v_1 q^4 + \dots + v_1 q^{2n}$$

$$\text{ثم نلاحظ أن } \frac{v_1 q^{2n}}{v_1 q^{2n-2}} = \dots = \frac{v_1 q^2}{v_1} = q^2$$

إذا يصبح المجموع عبارة عن مجموع متتالية

هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_1

$$\text{نسميها } y_n = v_1 (q^2)^n$$

$$\text{ومنه } S_{10} = y_0 + y_1 + \dots + y_n = v_1 \left(\frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - (q^2)} \right)$$

هنا نلاحظ ان المجموع هو لمتتالية مكتوبة على

$$\text{الشكل } \sqrt{v_n} = (v_n)^{\frac{1}{2}}$$

و نطبق نفس الطريقة في المثال 4

$$S_7 = w_0 + w_1 + \dots + w_n - 7$$

المتتالية (w_n) لا حسابية ولا هندسية ولكنها

مكتوبة بدلالة المتتالية الهندسية (v_n)

$$\text{لدينا } w_n = v_n - a$$

نكتب كل حدود لمتتالية (w_n) بدلالة حدود المتتالية

(v_n) فيصبح لدينا:

$$s_7 = v_0 - a + v_1 - a + \dots + v_n - a$$

نجمع حدود المتتالية (v_n) لوحدهم و الأعداد $-a$

لوحدهم أيضا

$$\text{إذا } S_7 = \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}_{S_2} - \underbrace{a - a - a - \dots - a}_{n+1}$$

هناك $n+1$ حد من الأعداد $-a$ لأن كل حد من

حدود المتتالية (v_n) يرافقه عدد $-a$

$$\text{إذا } S_7 = S_2 - a(n+1)$$

$$S_8 = v_0 + v_1 + \dots + v_{2n} - 8$$

S_8 عبارة عن مجموع متتالية هندسية أساسها q

وحدها الأول v_0

ولكن الاختلاف مع S_2 يكمن في عدد الحدود فقط

$$\text{إذا } S_8 = v_0 \left(\frac{1 - (9)^{2n+1}}{1 - 9} \right) = 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{2n+1}}{\frac{2}{3}} \right)$$

$$P_1 = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n - 11$$

نكتب كل حدود المتتالية (v_n) بدلالة v_0 و q أي
بإستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية

$$v_n = v_0 q^n$$

$$P_1 = v_0 \times v_0 q \times v_0 q^2 \times \dots \times v_0 q^n$$

$$= \underbrace{v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0}_n \times q^1 \times q^2 \times \dots \times q^n$$

$$P_1 = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n}$$

نلاحظ أن $1+2+3+\dots+n$ هو مجموع متتالية
حسابية أساسها 1 و حدها الأول 1 (لاحظ أن
المجموع بدأ من 1 و الفرق بين حد و الحد الذي يليه
هو 1)

إذا بعد تطبيق قانون مجموع متتالية حسابية نجد

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P_1 = v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ و منه}$$

$$S_{11} = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n - 12$$

طريقة 1: بتطبيق خواص الدالة اللوغاريتمية

نكتب كل حدود المتتالية (v_n) بدلالة v_0 و q أي
بإستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية

$$v_n = v_0 q^n \text{ فنجد:}$$

$$S_{11} = \ln v_0 + \ln v_0 \cdot q + \ln v_0 \cdot q^2 + \dots + \ln v_0 \cdot q^n$$

نطبق خاصية الدالة اللوغاريتمية

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$$

يصبح لدينا

$$S_{11} = \ln v_0 + \ln v_0 + \ln q + \ln v_0 + \ln q^2 + \dots + \ln v_0 + \ln q^n$$

بتطبيق خاصية الدالة اللوغاريتمية

$$\ln a^n = n \ln a \text{ و بجمع الحدود } \ln v_0 \text{ لوحدهم}$$

و الحدود من الشكل $\ln q^n$ لوحدهم نجد

$$S_{11} = \underbrace{\ln v_0 + \ln v_0 + \dots + \ln v_0}_{(n-0+1) \text{ ح}} + \ln q + 2 \ln q + \dots + n \ln q$$

$$S_{11} = (n+1) \ln v_0 + (1+2+\dots+n) \ln q$$

$$= (n+1) \ln v_0 + \frac{n(n+1)}{2} \ln q$$

$$S_{11} = 2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \ln \frac{1}{3} \text{ إذا}$$

طريقة 2: (شرط أن نكون قد وجدنا جداء

المتتالة الهندسية)

نستخدم العلاقة $\ln a + \ln b = \ln a \cdot b$

$$S_{11} = \ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n) = \ln P_1 \text{ نجد}$$

$$S_{11} = \ln \left(v_0^{n+1} \times q^{\frac{n(n+1)}{2}} \right) = \ln v_0^{n+1} + \ln q^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ إذا}$$

$$= (n+1) \ln v_0 + \frac{n(n+1)}{2} \ln q$$

$$S_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 13$$

بعدما أثبتنا أن $\alpha_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ يصبح المجموع

$$S_{12} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

لاحظ أن كل حد له علاقة مكتوب على شكل

مجموع كسرين الكسر الأول موجود عكسه

في حد الذي يسبقه أما الكسر الثاني عكسه

$$S_{13} = \ln \beta_1 + \ln \beta_2 + \dots + \ln \beta_n - 15$$

طريقة 1: بتطبيق خواص الدالة اللوغاريتمية

$$\ln a \cdot b = \ln a + \ln b, \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \text{ لدينا}$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

$$S_{13} = \ln \left(\frac{1 \times (1+2)}{(1+1)^2} \right) + \ln \left(\frac{2 \times (2+2)}{(2+1)^2} \right) + \dots + \ln \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right)$$

تصبح

$$S_{13} = \ln 1 + \ln(1+2) - 2 \ln(1+1) + \ln 2 + \ln(2+2) - 2 \ln(2+1) + \dots + 2 \ln n + \ln(n+2) - 2 \ln(n+1)$$

بعد التبسيط نجد

$$S_{13} = \ln 1 - \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n+2)$$

طريقة 2: يشرط علينا حساب الجداء

نطبق الخاصية $\ln a + \ln b = \ln ab$ نجد

$$S_{13} = \ln(\beta_1 \times \beta_2 \times \dots \times \beta_n) = \ln P_2$$

$$S_{13} = \ln \left(\frac{n+1}{2(n+2)} \right) = \ln(n+1) - \ln 2 - \ln(n+2) \text{ إذا}$$

موجود في الحد الذي يليه فتحذف كل الكسور إلا

أول كسر و آخر كسر

مثال للتوضيح:

$$u_{n-5} = \frac{1}{n-5} - \frac{1}{n-4} \text{ (هو الحد الذي يسبق الحد } u_{n-4} \text{)}$$

$$u_{n-4} = \frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-3} \text{ (الكسر } \frac{1}{n-4} \text{ عكسه موجود}$$

$$\text{في } u_{n-3} \text{ و الكسر } \frac{1}{n-3} \text{ عكسه موجود في } u_{n-3} \text{)}$$

$$u_{n-3} = \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} \text{ (هو الحد الذي يلي الحد } u_{n-4} \text{)}$$

$$\text{فيصبح لدينا } S_{12} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

المجاميع الخاصة بشعبة الرياضيات:

$$P_2 = \beta_1 \times \beta_2 \times \dots \times \beta_n - 14$$

$$P_2 = \frac{1(1+2)}{(1+1)^2} \times \frac{2(2+2)}{(2+1)^2} \times \dots \times \frac{(n-1)(n-1+2)}{(n-1+1)^2} \times \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \text{ إذا}$$

لاحظ أن كل حد (ما عدا الحد الأول و الأخير)

مكتوب على شكل كسر حيث أن في البسط جداء

دليله (الذي يحذف مع مقام الحد الذي يسبقه)

ضرب دليله + 2 (الذي يحذف مع مقام الحد الذي

بعده) و مقامه هو مربع دليله + 1 (الذي يحذف مع

بسط الحد الذي قبله و بسط الحد الذي بعده)

إذا بعد التبسيط نجد

$$P_2 = \frac{1}{(1+1)} \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$S_{13} = \frac{v_1}{1-q} (1 - q^n + q - q^n + q^2 - q^n + \dots + q^{n-1} - q^n)$$

نشرنا q^n على الكسر و إستخرجنا عامل $\frac{1}{1-q}$

(مشترك)

$$S_{13} = \frac{v_1}{1-q} \left(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} - \underbrace{q^n - q^n - \dots - q^n}_{n \text{ (} -1 \rightarrow 0+1)} \right)$$

$$S_{13} = \frac{v_1}{1-q} \left(\left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) - nq^n \right) \text{ إذا}$$

$$S_{14} = 1v_1 + 2v_2 + \dots + nv_n - 16$$

$$S_{14} = v_1 + v_2 + v_2 + \dots + \underbrace{v_n + v_n + \dots + v_n}_n$$

إستخدمت هذا

النوع من الكتابة

لإظهار الحسابات

فقط

فالمجموع بين قوسين

و كل مرة أعود إلى

السطر فقط

$$S_{13} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \\ v_2 + v_3 + \dots + v_n + \\ v_3 + \dots + v_n + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1} + v_n + \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$S_{13} = \begin{pmatrix} v_1 + v_1q + v_1q^2 + \dots + v_1q^{n-1} + \\ v_1q + v_1q^2 + \dots + v_1q^{n-1} + \\ v_1q^2 + \dots + v_1q^{n-1} + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_1q^{n-2} + v_1q^{n-1} + \\ v_1q^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$S_{13} = \begin{pmatrix} v_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) + \\ v_1q(1 + q + \dots + q^{n-2}) + \\ v_1q^2(1 + \dots + q^{n-3}) + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_1q^{n-2}(1 + q) + \\ v_1q^{n-1} \end{pmatrix}$$

لدينا $1 + q + q^2 + \dots + q^n$ مجموع متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول 1 إذا

$$S_{13} = v_1 \left(\left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) + q \left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q} \right) + q^2 \left(\frac{1-q^{n-2}}{1-q} \right) + \dots + q^{n-2} \left(\frac{1-q^2}{1-q} \right) + q^{n-1} \left(\frac{1-q^1}{1-q} \right) \right)$$