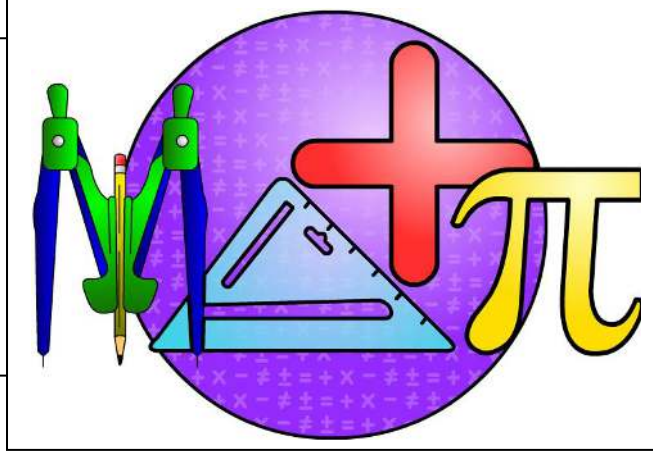


كراريس الرياضيات



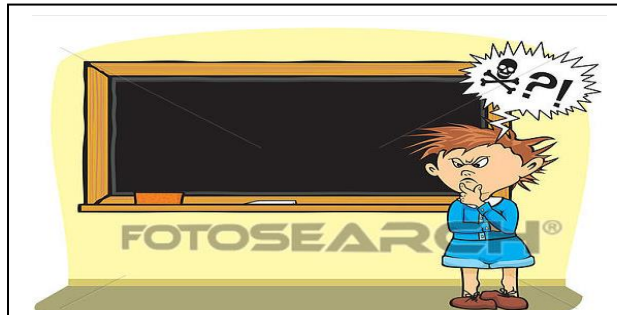
abdelhamidchih3@gmail.com

العلوم التجريبية

السنة الثالثة

تمارين مختارة في المتاليات

إعداد الأستاذ : شيخ عبد الحميد



تمرين 1 :

(u_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ ،

ونعرف المتتالية (v_n) بـ : $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب

تحديد أساسها r وحدّها الأول v_0 .

2) عبر عن v_n ثم عن u_n بدلالة n .

الحل :

1) نبرهن أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية

يطلب تحديد أساسها r وحدّها الأول v_0 .

• نبين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = r$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n}{u_n + 1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n} \text{ أي } = \frac{u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n}$$

أي : $v_{n+1} - v_n = 1$ وهذا معناه :

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 1$.

$$v_0 = 1 \text{ أي } v_0 = \frac{1}{u_0} \quad \bullet$$

ملاحظة : المتتالية (v_n) هي إذا متتالية الأعداد الطبيعية غير المعدومة .

2) التعبير عن v_n ثم عن u_n بدلالة n .

• (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول v_0

وأساسها r :

عبارة حدّها العم معطاة بالعلاقة : $v_n = v_0 + n.r$

$$v_n = n + 1$$

بالتعويض نجد :

$$\bullet \text{ من العلاقة } v_n = \frac{1}{u_n} \text{ ينتج : } u_n = \frac{1}{v_n} \text{ أي}$$

$$\text{أي : } u_n = \frac{1}{n+1}$$

تمرين 2 :

(u_n) هي المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{4u_n} \end{cases}$$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$

1) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب

تحديد أساسها r وحدّها الأول v_0 .

2) عبر عن u_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحل :

1) نبرهن أن (v_n) متتالية حسابية.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{4u_n} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{4u_n} - \frac{2u_n - 1}{2}}$$

$$= \frac{4u_n}{2u_n - 1} - \frac{2}{2u_n - 1}$$

$$= \frac{4u_n - 2}{2u_n - 1}$$

$$= \frac{2(2u_n - 1)}{2u_n - 1}$$

إذا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = 2$

وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $r = 2$

$$\text{وحدّها الأول } v_0 = \frac{1}{u_0 - \frac{1}{2}} \text{ أي } v_0 = \frac{1}{3 - \frac{1}{2}}$$

2) التعبير عن u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\text{من العلاقة } v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \text{ ينتج}$$

$$= \left(\sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \right)^2 - (u_n - 1)^2$$

$$= u_n^2 - 2u_n + 4 - u_n^2 + 2u_n - 1$$

$$\cdot v_{n+1} - v_n = 5$$

إذا (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 5$ وحدّها

$$v_0 = (u_0 - 1)^2 \text{ حيث: } v_0 = 2$$

(2) إيجاد عبارة الحد العام لكل من (v_n) و (u_n) .

• (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول v_0

وأساسها r . إذا :

• من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = v_0 + n.r$

• بالتعويض ينتج : $v_n = 5n + 2$

• من العلاقة $v_n = (u_n - 1)^2$ نجد :

$$u_n - 1 = \sqrt{v_n} \text{ أي } u_n = 1 + \sqrt{v_n}$$

وبتعويض v_n بقيمته نجد : $u_n = 1 + \sqrt{5n + 2}$

تمرين 4:

الأعداد الحقيقية a ؛ b و c حدود متعاقبة من متتالية حسابية متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 7 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 62 \end{cases} \text{ يعطى :}$$

أحسب الأساس r لهذه المتتالية ثم استنتج الحدود a ؛ b و c

الحل:

• حساب الأساس r لهذه المتتالية .

الأعداد a ؛ b و c حدود متعاقبة . إذا :

$$a = b - r \text{ و } c = b + r$$

بالتعويض ، الجملة المعطاة تكتب :

$$\text{أي : } \begin{cases} 2(b - r) + 3b + (b + r) = 6 \\ (b - r)^2 + b^2 + (b + r)^2 = 62 \end{cases}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} 2b - 2r + 3b + b + r = 7 \\ b^2 + r^2 - 2br + b^2 + b^2 + r^2 + 2br = 62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6b - r = 7 & \dots (1) \\ 3b^2 + 2r^2 = 62 & \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{من (1) نجد } b = \frac{r+7}{6} \dots (3)$$

بالتعويض :

$$u_n \cdot v_n - \frac{v_n}{2} = 1 \text{ أي } v_n \left(u_n - \frac{1}{2} \right) = 1 \cdot$$

$$\text{أي } v_n \cdot u_n = \frac{v_n + 2}{2}$$

وبالتالي : $u_n = \frac{v_n + 2}{2v_n} \dots (*)$

بما أنّ (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول $v_0 = \frac{2}{5}$

وأساسها $r = 2$ فإن عبارة حدّها العام هي :

$$v_n = 2n + \frac{2}{5}$$

بتعويض v_n في العلاقة $(*)$ نجد :

$$u_n = \frac{10n + 12}{20n + 4} \text{ أي } u_n = \frac{2n + \frac{2}{5} + 2}{2 \left(2n + \frac{2}{5} \right)}$$

إذا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{5n + 6}{10n + 2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n + 6}{10n + 2} \cdot$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2} \text{ أي } = \frac{5}{10}$$

تمرين 3 :

(u_n) هي المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n \text{ بـ : } \begin{cases} u_0 = 1 + \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$$

نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = (u_n - 1)^2$

نقبل أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

(1) برهن أنّ (v_n) متتالية حسابية.

(2) جد عبارة الحد العام لكل من (v_n) و (u_n)

الحل:

(1) نبرهن أنّ (v_n) متتالية حسابية.

لدينا ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - 1)^2 - (u_n - 1)^2$$

$$= \left(1 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} - 1 \right) - (u_n - 1)^2$$

المتتالية (w_n) معرّفة بعلاقة من الشكل :

$$w_{n+1} = q \cdot w_n$$

تعريفاً : المتتالية (w_n) هي إذا متتالية هندسية

$$\text{أساسها } q = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) نتحقّق أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$w_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (w_n) ذات

الحد الأوّل w_0 والأساس q معطاة بالعلاقة :

$$w_n = w_0 \cdot q^n \text{ . بالتعويض :}$$

$$w_n = 2 \left(\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} \right)^n \text{ أي } w_n = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \\ = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$

تمرين 6:

(u_n) هي المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد

طبيعي n كما يلي : $\ln(3^n u_n) = n - 1$.

(1) برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية .

(2) أدرس رتبة ونهاية المتتالية (u_n) .

الحل:

(1) نبرهن أنّ (u_n) متتالية هندسية .

نبرهن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = q \times u_n$.

$$\ln(3^n u_n) = n - 1 \text{ يكافئ } \ln 3^n + \ln u_n = n - 1$$

$$\text{يكافئ } \ln u_n = n - 1 - \ln 3^n$$

$$\text{يكافئ } u_n = e^{n-1-\ln 3^n}$$

$$\bullet \text{ في هذه الحالة : } u_{n+1} = e^{(n+1)-1-\ln 3^{n+1}}$$

$$= e^{n-1+1-\ln 3^n \times 3}$$

$$u_{n+1} = e^{n-1+1-\ln 3^n - \ln 3}$$

$$= e^{(n-1-\ln 3^n) + (1-\ln 3)}$$

$$\text{أي } u_{n+1} = \frac{e}{3} \cdot u_n$$

إذا : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{e}{3} \cdot u_n$.

$$(2) \text{ يكافئ } 3 \left(\frac{r+7}{6} \right)^2 + 2r^2 = 62$$

$$\text{يكافئ } 3 \left(\frac{r^2 + 14r + 49}{36} \right) + 2r^2 = 62$$

$$(2) \text{ يكافئ } \frac{r^2 + 14r + 49 + 25r^2}{12} = 62$$

$$\text{يكافئ } 25r^2 + 14r + 49 - 12 \times 62 = 0$$

$$\text{يكافئ } 25r^2 + 14r - 695 = 0$$

نحصل إذا على معادلة من الدرجة الثانية .
مميزها Δ هو :

$$\Delta = 14^2 + 4 \times 25 \times 695 = 69696 \text{ أي } \Delta = 69696$$

للمعادلة حلان متمايزان r_1 و r_2 حيث :

$$r_2 = \frac{-14 - \sqrt{69696}}{50} \text{ و } r_1 = \frac{-14 + \sqrt{69696}}{50}$$

$$= \frac{-14 - 264}{50} = \frac{-14 + 264}{50}$$

$$r_2 = -\frac{278}{50} \text{ و } r_1 = 5$$

بما أنّ (u_n) متتالية حسابية متزايدة فإن $r > 0$.

إذا نأخذ $r = 5$.

• حساب الحدود a ، b و c

من العلاقة (3) أي من العلاقة $b = \frac{r+7}{6}$

وبتعويض

r بقيمته نجد : $b = 2$.

في هذه الحالة :

$$a = b - r \text{ و } c = b + r \\ = -3 \text{ و } = 7$$

تمرين 5 :

$$\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} w_n \end{cases}$$

(1) برّر أنّ (w_n) متتالية هندسية .

(2) تحقّق أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$w_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$

الحل:

(1) نبرّر أنّ (w_n) متتالية هندسية .

(1) نبرهن أنّ المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب

تحديد أساسها r وحدّها الأوّل u_0 بدلالة α

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{\alpha^2 + (n+1) - 1}{\alpha + 1} - \frac{\alpha^2 + n - 1}{\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha^2 + n - \alpha^2 - n + 1}{\alpha + 1} \\ &= \frac{1}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

وبالتالي :

المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{\alpha + 1}$

وحدها الأوّل $u_0 = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha + 1}$ أي : $u_0 = \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 1)}{\alpha + 1}$

$$u_0 = \alpha - 1$$

(2) نبين أنّ $S_n = \frac{n(n + 2\alpha - 3)}{2(\alpha + 1)}$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

S_n هو إذا مجموع n حدًا الأولى من المتتالية

الحسابية (u_n) . وعليه : $S_n = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1})$

$$\text{لدينا : } \begin{cases} u_0 = (\alpha - 1) \\ u_{n-1} = \frac{\alpha^2 + n - 2}{\alpha + 1} \end{cases} \text{ بالتعويض نجد :}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} \left(\alpha - 1 + \frac{\alpha^2 + n - 2}{\alpha + 1} \right) \\ &= \frac{n}{2} \left[\frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1) + \alpha^2 + n - 2}{\alpha + 1} \right] \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{n(n + 2\alpha^2 - 3)}{2(\alpha + 1)}$$

(2 - أ) نبين أنّ (v_n) متتالية هندسية .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= e^{\frac{\alpha^2 + (n+1) - 1}{\alpha + 1}} \text{ أي } v_{n+1} = e^{u_{n+1}} \\ &= e^{\frac{\alpha^2 + n - 1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 1}} \\ &= e^{\left(\frac{\alpha^2 + n - 1}{\alpha + 1} \right)} \times e^{\left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)} \end{aligned}$$

وبالتالي (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{e}{3}$

وحدها الأوّل $u_0 = e^{0 - 1 - \ln 3^0}$ أي $u_0 = e^{-2}$.

(2) دراسة رتبة ونهاية المتتالية (u_n) .

(u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأوّل u_0

عبارة حدها العام معطاة بالعلاقة : $u_n = u_0 \cdot q^n$.

بالتعويض نجد : $u_n = e^{-2} \times \left(\frac{e}{3} \right)^n, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= e^{-2} \left(\frac{e}{3} \right)^{n+1} - e^{-2} \left(\frac{e}{3} \right)^n \\ &= e^{-2} \cdot \left(\frac{e}{3} \right)^n \left(\frac{e}{3} - 1 \right) \\ &= e^{-2} \left(\frac{e}{3} \right)^n \left(-\frac{2e}{3} \right) \end{aligned}$$

نلاحظ ما يلي :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n < 0$.

المتتالية (u_n) هي إذا متناقصة تماما في $\mathbb{N}$.

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{e}{3}$.

$-1 < q < 1$ معناه (u_n) متقاربة وتتقارب نحو 0 .

أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

تمرين 7 :

α عدد حقيقي يحقق : $\alpha \neq -1$.

(1) نعرّف في $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) بـ :

$$u_n = \frac{\alpha^2 + n - 1}{\alpha + 1}$$

(أ) برهن أنّ المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب

حساب أساسها r وحدها الأوّل u_0 بدلالة α .

(ب) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

يبين أنّ $S_n = \frac{n(n + 2\alpha^2 - 3)}{2(\alpha + 1)}$.

(2) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_n = e^{u_n}$.

(أ) بين أنّ (v_n) متتالية هندسية ثمّ أحسب بدلالة

α أساسها q وحدها الأوّل v_0 .

(ب) P_n هو الجداء حيث : $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1}$.

برهن أنّ $P_n = e^{S_n}$.

الحل

تمرين 8:

(u_n) هي المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{4} \end{cases}$$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة كما يلي :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$

(1) احسب v_{n+1} بدلالة u_n ثم بدلالة v_n

(2) جد قيمة k حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

(3) جد بعد ذلك نهايتي (v_n) و (u_n)

(عن بكالوريا تجريبية مغربية)

الحل:

(1) حساب v_{n+1} بدلالة u_n ثم بدلالة v_n

لدينا : $v_n = u_n + k$ وبالتالي : $v_{n+1} = u_{n+1} + k$

بتعويض u_{n+1} بقيمته نجد : $v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{4} + k$

بما أن $u_n = v_n - k$ فإن : $v_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - k) + \frac{9}{4} + k$

$$= \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}k \quad \dots (1)$$

(2) إيجاد قيمة k حتى تكون (v_n) متتالية

هندسية.

(v_n) متتالية هندسية أساسها الثابت q

معناه

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = q.v_n$

بالمطابقة مع الشكل (1) ينتج :

$$\frac{9}{4} + \frac{3}{4}k = 0 \quad \text{يكافئ} \quad 3k + 9 = 0$$

$$k = -3 \quad \text{يكافئ}$$

خلاصة

من أجل $k = -3$ تكون المتتالية (v_n) متتالية

هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0 = u_0 - 3$

$$= 1$$

(2) إيجاد نهايتي (v_n) و (u_n) .

• (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

$-1 < \frac{1}{4} < 1$: إذا (v_n) متقاربة وتتقارب نحو 0 .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - 3)$$

$$= -3 \quad (\text{لأن } v_n \rightarrow 0)$$

$$v_{n+1} = e^{\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)} \times v_n \quad \text{إذا :}$$

المتتالية (v_n) هي إذا متتالية هندسية $q = e^{\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}$ وحدها الأول $v_0 = e^{u_0}$ أي $v_0 = e^{\alpha-1}$.

- ب) نبرهن أن $P_n = e^{S_n}$.

بما أن v_0 هو الحد الأول و q هو أساس المتتالية

الهندسية (v_n) فإن عبارة حدها العام معطاة

$$\text{بالعلاقة : } v_n = v_0 \times q^n$$

في هذه الحالة :

$$v_1 = v_0 \cdot q \quad ; \quad v_2 = v_0 \cdot q^2 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad v_{n-1} = v_0 \cdot q^{n-1}$$

ينتج :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1}$$

$$= v_0 \times (v_0 \cdot q) \times (v_0 \cdot q^2) \times \dots \times (v_0 \cdot q^{n-1})$$

$$= (v_0 \times v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0) \times (q \times q^2 \times \dots \times q^{n-1})$$

n مرة

$$= v_0^n \times q^{1+2+3+\dots+(n-1)}$$

المجموع $(1+2+3+\dots+n-1)$ هو مجموع $(n-1)$

حدًا متعاقبة من متتالية حسابية أساسها 1 وحدها

الأول 1 . إذا :

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n-1}{2}(1+n-1)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

في هذه الحالة : $P_n = v_0^n \times q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$= (e^{\alpha-1})^n \times \left(e^{\frac{1}{\alpha+1}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= e^{n(\alpha-1)} \times e^{\frac{n(n-1)}{2(\alpha+1)}}$$

$$\text{لدينا : } n(\alpha-1) + \frac{n(n-1)}{2(\alpha+1)} = \frac{2n(\alpha^2-1) + n(n-1)}{2(\alpha+1)}$$

$$= \frac{n(2\alpha^2-2+n-1)}{2(\alpha+1)}$$

$$= \frac{2(n+2\alpha^2-3)}{2(\alpha+1)}$$

$$= S_n$$

$$P_n = e^{S_n}$$

وبالتالي :

تمرين 9:

(u_n) هي المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3} \end{cases} \text{ و } \alpha \text{ عدد حقيقي.}$$

نعرف في $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) بـ : $v_n = u_n + \alpha$.

(1) ما هي قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية.

(2) حدد بعد ذلك : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الحل:

(1) نعين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية

هندسية .

(v_n) متتالية هندسية معرفة في $\mathbb{N}$)

معناه

من أجل كل عدد طبيعي: $v_{n+1} = q \times v_n \dots (1)$

1. بالرجوع إلى تعريف المتتالية (v_n)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \alpha \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3} + \alpha \\ &= \frac{1}{2}(u_n + \alpha) - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\alpha \\ &= \frac{1}{2}v_n - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

بالمطابقة مع (1) ينتج :

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\alpha = 0 \text{ معناه } \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = \frac{4}{3} \text{ معناه}$$

(2) تحديد نهاية المتتالية (u_n)

نذكر: نهاية متتالية (u_n) هي نهاية حدها العام

لما يؤهل n إلى $+\infty$.

$$\text{لدينا : } u_n = v_n - \alpha \text{ أي } u_n = v_n - \frac{4}{3} .$$

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها

$$\text{الأول } v_0 = u_0 + \frac{4}{3} \text{ أي } v_0 = \frac{5}{3} \text{ فإن :}$$

$$v_n = \frac{5}{3} \left(\frac{4}{3} \right)^n \text{ ومنه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ (لان } \frac{4}{3} > 1 \text{) .}$$

في هذه الحالة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

تمرين 10:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_n = e^{3n+2}$$

حيث يشير e إلى أساس اللوغاريتم النيبيري.

(1 - أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب

تعيين أساسها وحدها الأول .

هل المتتالية (u_n) مقاربة ؟ علّل.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) نعرف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب

كتابة v_n بدلالة n .

ب) أحسب بدلالة n :

$$\bullet \text{ المجموع : } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} \text{ ثم}$$

$$\text{الجداء : } T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$$

الحل:

(1 - أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب

تعيين أساسها وحدها الأول

بين ما يلي: من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = q \cdot u_n$

لدينا وحسب تعريف المتتالية (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= e^{3(n+1)+2} \text{ أي } u_{n+1} = e^{3n+5} \\ &= e^3 \times e^{3n+2} \\ &= e^3 \times u_n \end{aligned}$$

وبالتالي (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^3$

وحدها الأول $u_0 = e^2$.

✓ بما أن الأساس $q = e^3$ لهذه المتتالية يحقق

$q > 1$ فإن هذه المتتالية متباعدة

ملاحظة 1 :

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

وعليه :

لإثبات أن (u_n) متتالية هندسية بين أنه من أجل

$$\text{كل عدد طبيعي } n : \frac{u_{n+1}}{u_n} = q .$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{e^{3n+5}}{e^{3n+2}} \text{ أي } \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{3n+5-3n-2} \\ &= e^3 \end{aligned}$$

ملاحظة 2 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{3n+2}) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس في $\mathbb{N}$ إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = e^{3n+5} - e^{3n+2} = e^{3n+2}(e^3 - 1)$$

نلاحظ أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n > 0$

المتتالية (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما

ملاحظة :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 0$

يكفي مقارنة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ النسبة مع العدد 1

سبق وأن وجدنا : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^3 > 1$

المتتالية (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما

2 - أ) نبين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب كتابة عبارة حدها العام.

نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = r$

لدينا : $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$

$$= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

$$= \ln(e^3)$$

إذا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = 3$

وهذا يعني أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$

✓ عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية (v_n)

معطاة بالعلاقة : $v_n = v_0 + n.r ; n \in \mathbb{N}$

$$\text{بالتعويض نجد : } \begin{cases} v_0 = \ln(u_0) ; u_0 = e^2 \\ r = 3 \end{cases}$$

$$v_n = 3n + 2, n \in \mathbb{N}$$

ب) حساب بدالة n :

• المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

S_n هو مجموع n حدا الأولى من المتتالية

الحسابية (v_n) . وعليه :

$$S_n = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) \text{ حيث : } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n-1} = 3n - 1 \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(3n + 1) \text{ أي } s_n = \frac{n}{2}(2 + 3n - 1)$$

• الجداء T_n حيث : $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

T_n هو جداء n حدا الأولى من المتتالية الهندسية

(u_n) .

لدينا : $u_1 = u_0.q$; $u_2 = u_0.q^2$; ... ; $u_{n-1} = u_0.q^{n-1}$

بالتعويض نجد :

$$T_n = u_0 \times (u_0.q) \times (u_0.q^2) \times \dots \times (u_0.q^{n-1})$$

$$= \underbrace{(u_0 \times u_0 \times \dots \times u_0)}_{n \text{ عاملا}} \times (q \times q^2 \times \dots \times q^{n-1})$$

$$\text{إذا : } T_n = u_0^n \times q^{1+2+3+\dots+(n-1)}$$

المجموع $(1+2+3+\dots+(n-1))$ هو مجموع $(n-1)$

عددا طبيعيا الأولى وغير المعدومة.

هذه الأعداد تشكل حدود متعاقبة لمتتالية حسابية

أساسها 1 وحدها الأول 1. ومنه :

$$(1+2+3+\dots+(n-1)) = \frac{n-1}{2}(1+n-1)$$

$$= \frac{(n-1)n}{2}$$

بالتعويض حيث : $u_0 = e^2$ و $q = e^3$ نجد :

$$T_n = e^{2n} \times (e^3)^{\frac{(n-1)n}{2}} \text{ أي } T_n = e^{\frac{n(3n+1)}{2}}$$

تمرين 11

I) α عدد حقيقي .

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = \alpha \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} \end{cases}$$

• جد قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون

المتتالية (v_n) متتالية ثابتة .

II) نضع $\alpha = -3$

1) احسب الحدود v_1 ; v_2 و v_3 .

2) نعرّف في $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) بـ :

$$u_n = v_n - 3$$

أ) برهن أن (u_n) متتالية هندسية محددا

أساسها وحدّها الأول.

ب) أكتب u_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد

العام للمتتالية (v_n) .

ج) احسب بدلالة n المجموع

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ثم استنتج بدلالة n المجموع

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

د) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

الحل

I (إيجاد قيمة α حتى تكون (v_n) ثابتة.
متتالية ثابتة في $\mathbb{N}$)

معناه

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = v_n = \dots = v_0 = \alpha$$

من العلاقة $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4}$ وبالتعويض نجد :

$$\alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{9}{4} \quad \text{وبالتالي } \alpha = 3$$

II (1) حساب الحدود v_1 ؛ v_2 و v_3

$$v_1 = \frac{1}{4}v_0 + \frac{9}{4} \quad \text{أي } v_1 = \frac{1}{4}(-3) + \frac{9}{4}$$

$$v_1 = \frac{3}{2}$$

$$v_2 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{9}{4} \quad \text{أي } v_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4}$$

$$v_2 = \frac{21}{8}$$

$$v_3 = \frac{1}{4}v_2 + \frac{9}{4} \quad \text{أي } v_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{21}{8}\right) + \frac{9}{4}$$

$$v_3 = \frac{93}{32}$$

ملاحظة:

ما الفائدة من حساب الحدود v_1 ؛ v_2 و v_3 ؟

$$(1) \quad v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1 \quad \text{و} \quad \frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$$

المتتالية (v_n) ليست لا حسابية ولا هندسية.

$$(2) \quad v_0 > v_1 > v_2 > v_3$$

إذا كانت (v_n) رتبة فهي متناقصة.

2 (نبرهن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد

أساسها وحدّها الأول.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 3$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}v_n - \frac{3}{4} \quad \text{أي} \quad = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} - 3$$

$$= \frac{1}{4}(v_n - 3)$$

$$= \frac{1}{4}u_n$$

وعليه : (u_n) متتالية هندسية أساسها وحدّها

$$\text{الأول } u_0 = v_0 - 3 = -6$$

1. ب كتابة u_n بدلالة n

(u_n) متتالية هندسية أساسها q معرفة في $\mathbb{N}$.
عبارة حدّها العام معطاة بالعلاقة :

$$u_n = u_0 \cdot q^n \quad \text{. بالتعويض نجد : } u_n = -6\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

• استنتاج عبارة الحد العام للمتتالية (v_n)

من العلاقة $u_n = v_n - 3$ ينتج : $v_n = u_n + 3$

$$\text{بالتعويض : } v_n = -6\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3$$

ملاحظة :

كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربة .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 ; \left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3 ; \left[-6\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \rightarrow 0 \quad \checkmark$$

ج (حساب بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$)

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا الأولى من المتتالية

الهندسية. ومنه :

$$S_n = u_0 \left[\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right] \quad \text{وبالتعويض} \quad S_n = -6 \left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} \right]$$

$$S_n = -8 \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

• استنتاج $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

بما أنّ $v_n = u_n + 3$ فإنّ :

$$S'_n = (u_0 + 3) + (u_1 + 3) + \dots + (u_n + 3)$$

$$= (u_0 + u_1 + \dots + u_n) + (3 + 3 + \dots + 3)$$

($n+1$) مرة

$$S'_n = S_n + 3(n+1) \quad \text{وعليه}$$

$$= -8 \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1 \right] + 3(n+1)$$

1. د (حساب S'_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = +\infty , \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \rightarrow 0 \\ 3(n+1) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

تمرين 12:

(u_n) هي المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases} \text{ حيث } e \text{ أساس اللوغاريتم}$$

النيبيري

(v_n) هي المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = \ln(u_n) - 2$$

(1) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب كتابة

عبارة حدّها العام v_n .

(2) استنتج u_n بدلالة n .

(3) بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$.

(4) احسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ (عن بكالوريا تجريبية مغربية).

الحل:

(1) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد

أساسها وحدّها الأوّل .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2$$

$$= \ln(e\sqrt{u_n}) - 2 = \ln e + \ln(\sqrt{u_n}) - 2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \ln u_n - 2$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u_n) - 1$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(u_n) - 2)$$

إذا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأوّل $v_0 = \ln(u_0) - 2 = 1$

(2) استنتاج u_n بدلالة n

لدينا : $v_n = \ln(u_n) - 2$ معناه $\ln(u_n) = v_n + 2$

معناه $u_n = e^{v_n+2} \dots (1)$

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $v_n = v_0 \cdot q^n$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

من (1) وبالتعويض نجد : $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$.

نبين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$

لدينا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2} \right)$$

وبما أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$$

(4) حساب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

S_n هو مجموع ($n+1$) حدا الأولى من المتتالية

الهندسية (v_n) .

ومنه :

$$S_n = 1 \times \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right] \text{ أي } S_n = v_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)$$

$$= -2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

تمرين 13:

(u_n) هي المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

(1) بالتراجع ؛برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

(2) نضع : $v_n = u_n - 1$ وذلك من أجل كل n من $\mathbb{N}$

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب إيجاد أساسها وحدّها الأوّل .

(ب) نعرّف في $\mathbb{N}$ المتتالية (w_n) كما يلي :

$$w_n = \ln(v_n)$$

بين أن (w_n) متتالية حسابية

$$\text{ج) أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \left(\frac{w_n}{v_n} \right) \right]$$

الحل:

(1) بالتراجع ؛نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي

$$n : u_n > 1$$

نضع : $P(n) : u_n > 1 ; n \in \mathbb{N}$

(أ) نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 2$ أي $u_0 > 2$.

ومنه : $P(0)$ صحيحة .

(ب) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $u_n > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \left(\frac{w_n}{v_n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n^2 \cdot \left(\frac{\ln 2}{2} \right)^2 \times \frac{4}{\ln 2}}{e^{\left(\frac{n \cdot \ln 2}{2} \right)^2}} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\ln 2} \left[\frac{n \cdot \ln 2}{e^{\frac{n \cdot \ln 2}{2}}} \right]^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{لان} \quad = 0$$

تمرين 14:

(u_n) هي المتتالية ذات الحدود الموجبة تماما والمعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 9e \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

نضع: $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

1) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب إعطاء عبارة حدّها العام v_n بدلالة n .

2) (أ) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n). (ب) ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

الحل:

1) نبرهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب إعطاء عبارة حدّها العام v_n بدلالة n .

لدينا ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{9}\right) \quad \text{بتعويض } u_{n+1} \text{ بقيمته نجد :}$$

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{\sqrt{u_n}}{9}\right) \quad \text{أي} \quad v_{n+1} = \ln\left(\frac{\sqrt{u_n}}{9}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$$

إذا $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ وبالتالي :

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_0 = \ln\left(\frac{u_0}{9}\right) = \ln e = 1$$

• كتابة v_n بدلالة n

ونبين أن $P(n+1)$ صحيحة. أي نبين أن $u_{n+1} > 1$.

لدينا وحسب فرضية التراجع $u_n > 1$ معناه $2u_n > 2$ أي $2u_n - 1 > 1$ معناه $u_{n+1} > 1$

إذا $P(n+1)$ صحيحة

مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع : من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 1$.

2) (أ) نبين أن (v_n) متتالية هندسية.

من أجل كل n من $\mathbb{N} : v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

$$= (2u_n - 1) - 1$$

$$= 2(u_n - 1)$$

$$= 2v_n$$

(v_n) هي إذا متتالية هندسية أساسها

$q = 2$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 1$ أي $v_0 = 1$.

ب) نبين أن (w_n) متتالية حسابية

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

$$= \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$$

المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 ومنه :

$$w_{n+1} - w_n = \ln 2 \quad \text{إذا} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$$

المتتالية (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$.

وحدها الأول $w_0 = \ln v_0 = 0$ لأن $v_0 = 1$.

$$\text{ج) حساب} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \left(\frac{w_n}{v_n} \right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \left(\frac{w_n}{v_n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \left(\frac{n \cdot \ln 2}{2^n} \right) \right] \quad \text{لان} :$$

(w_n) متتالية حسابية أساسها $\ln 2$ وحدها الأول 0
(v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1.

نلاحظ وجود حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

نزول هذه الحالة.

$$\text{لدينا :} \quad n \left(\frac{w_n}{v_n} \right) = \frac{n^2 \cdot \ln 2}{2^n}$$

$$\ln 2 = \left(\frac{\ln 2}{2} \right)^2 \times \frac{4}{\ln 2} ; \quad 2^n = e^{\ln 2^n}$$

$$= e^{\left(\frac{n \cdot \ln 2}{2} \right)^2} \quad \text{ومنه :}$$

تمرين 16:

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية

$$\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \end{cases} \text{ ثم } (u_n) \text{ المعرفة كما يلي :}$$

نعرف ، من أجل كل عدد طبيعي n المتتاليتين

$$(u_n) \text{ و } (w_n) \text{ بـ : } v_n = u_{n+1} - u_n ; w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$$

في كل مما يلي ، أنظر إن كانت القضية المقترحة صحيحة أم خاطئة - مع التعليل .

(أ -) المتتالية (v_n) متتالية هندسية.

(ب -) المتتالية (w_n) متتالية ثابتة.

(ج -) من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.

(د -) المتتالية (u_n) لا تقبل نهاية

الحل:

نظر في كل حالة إن كانت القضية صحيحة أم خاطئة مع التعليل :

(أ -) المتتالية (v_n) هندسية ؟

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} \\ &= -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) \text{ أي } = -\frac{2}{3}v_n \\ &= -\frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

المتتالية (v_n) هي إذا هندسية أساسها $q = -\frac{2}{3}$

(ب -) المتتالية (w_n) ثابتة ؟

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n \\ &= \left(\frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \right) + \frac{2}{3}u_{n+1} - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

وهذا معناه : المتتالية (w_n) متتالية ثابتة .

(ج -) من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$ ؟

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$w_n - v_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} + u_n$$

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n) التي حدها الأول v_0 وأساسها q معطاة بالعلاقة :

$$v_n = v_0 \cdot q^n . \text{ بالتعويض نجد : } n \in \mathbb{N} ; v_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

(2 - أ) استنتاج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

$$\text{من العلاقة : } v_n = \ln \left(\frac{u_n}{9} \right) \text{ ينتج : } \frac{u_n}{9} = e^{v_n}$$

$$\text{أي } u_n = 9e^{v_n}$$

$$\text{بالتعويض نجد : } u_n = 9e^{\left(\frac{1}{2} \right)^n}$$

2. (ب) إيجاد نهاية المتتالية (u_n)

$$\text{بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ لأن } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ فإن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 9e^{\left(\frac{1}{2} \right)^n} = 9$$

تمرين 15:

a ؛ b و c أعداد حقيقية غير معدومة.
(-) بين أنه إذا كانت الأعداد a ؛ b و c بهذا الترتيب
حدود متعاقبة لمتتالية هندسية فإن :
 $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$

الحل

نبين أنه إذا كانت الأعداد a ؛ b و c بهذا الترتيب
حدود متعاقبة لمتتالية هندسية فإن :
 $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$

لدينا :

$$\begin{aligned} (a+b+c)(a-b+c) &= [(a+b)+c][(a-b)+c] \\ &= (a+b)(a-b) + c(a+b+a-b) + c^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2ac + c^2 \end{aligned}$$

الأعداد a ؛ b و c بهذا الترتيب حدود متعاقبة من
متتالية هندسية يعني :

$$b^2 = ac \quad \text{ : } b \text{ وسط هندسي للعددين } a \text{ و } c$$

في هذه الحالة و بالتعويض نجد :

$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2 - b^2 + 2b^2 + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 \text{ وهو المطلوب}$$

ملاحظة :

وجود وسط هندسي b مرتبط بكون a و c من نفس الإشارة

أي $w_{n+1} - w_n = \frac{5}{3}u_n$ وعليه :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$

- د) المتتالية (u_n) لا تقبل نهاية ؟

• المتتالية (w_n) متتالية هندسية أسا $\left(-\frac{2}{3}\right)$

و $1 < -\frac{2}{3} < -1$ فهي إذا تتقارب نحو 0 .

• المتتالية (w_n) متتالية ثابتة فهي إذا

متقاربة وتتقارب نحو w_0 حيث :

$$w_0 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1$$

في هذه الحالة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5}(w_n - v_n) = \frac{3}{5}$$

المتتالية (w_n) متقاربة وتتقارب نحو $\frac{3}{5}$.

تمرين 17:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالحددين $u_0 = 3$:

$u_1 = 4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$.

1) جد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases} a+b=4 \\ a.b=1 \end{cases}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$v_n = u_{n+1} - au_n$$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها b .

3) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ نضع : $w_n = u_{n+1} - bu_n$.

برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

4) أكتب v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد

العام للمتتالية (u_n) .

الحل

1) إيجاد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases} a+b=4 \\ a.b=1 \end{cases}$

$$a+b=4 \text{ معناه } b=4-a$$

من العلاقة $ab=1$ وبتعويض b بقيمته

نحصل على المعادلة : $a^2 - 4a + 1 = 0$... (1)

ميز المعادلة (1) هو : $\Delta = 12$.

يوجد حلان متمايزان هما :

$$a_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} ; a_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

إذا : $(a;b) = (2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})$

أو $(a;b) = (2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$

2) نبرهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها b .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - a.u_{n+1} \\ &= (4u_{n+1} - u_n) - a.u_{n+1} \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = (4-a)u_{n+1} - 1 \times u_n$$

نعلم أن : $1 = ab$ و $4-a=b$. إذا :

$$v_{n+1} = bu_{n+1} - ab.u_n$$

$$v_{n+1} = b.v_n \text{ أي } v_{n+1} = b(u_{n+1} - a.u_n)$$

المتتالية (v_n) إذا متتالية هندسية أساسها b .

3) نبرهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+2} - b.u_{n+1} \\ &= (4u_{n+1} - u_n) - b.u_{n+1} \end{aligned}$$

$$(ab=1) \quad w_{n+1} = (4-b)u_{n+1} - ab.u_n$$

$$(4-b=a) \quad w_{n+1} = au_{n+1} - abu_n$$

$$= a(u_{n+1} - bu_n)$$

$$= a.w_n$$

وعليه : (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

4) كتابة v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد

العام للمتتالية (u_n) .

■ (v_n) متتالية هندسية أساسها b وحدها

الأول $v_0 = u_1 - au_0 = (4-3a)$. وعليه :

$$v_n = (4-3a).b^n ; n \in \mathbb{N}$$

■ (w_n) متتالية هندسية أساسها a وحدها

الأول $w_0 = u_1 - bu_0 = (4-3b)$. ومنه :

$$w_n = (4-3b).a^n ; n \in \mathbb{N}$$

■ لدينا : $v_n - w_n = u_{n+1} - au_n - u_{n+1} + bu_n$

$$= (b-a)u_n$$

وعليه : $u_n = \frac{v_n - w_n}{b-a}$. بالتعويض نجد :

$$u_n = \frac{(4-3a)b^n - (4-3b)a^n}{b-a}$$

تمرين 18:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

1 (باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ؛ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

2 (بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.

3 (نعتبر في $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) المعرفة بـ :

$$v_n = \ln(u_n - 1)$$

أ (تحقق أن المتتالية (v_n) معرفة تماما .

ب) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = -\ln 2$.

ج-) جد نهاية المتتالية (v_n) ثم استنتج نهاية

المتتالية (u_n) .

(عن بكالوريا تجريبية مغربية) .

الحل:

1 (باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ؛ ثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

نضع : $P(n) : 1 < u_n < 2 ; n \in \mathbb{N}$

أ (نتحقق من صحة $P(0)$

لدينا فرضا $u_0 = \frac{3}{2}$. إذا $1 < u_0 < 3$.

$P(0)$ صحيحة .

ب (نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي نفرض ما يلي :

$$1 < u_n < 2$$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين ما يلي : $1 < u_{n+1} < 3$

حسب فرضية التراجع لدينا :

$$1 < u_n < 3 \text{ وبالتالي } 0 < u_n - 1 < 2 \text{ (1)}$$

الدالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على المجال

$$[0; +\infty[: (1) : 0 < \sqrt{u_n - 1} < 1$$

$$\text{تكافئ } 1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 2$$

$$\text{أي } 1 < u_{n+1} < 2$$

$P(n+1)$ صحيحة.

من أ (و ب) وحسي مبدأ الاستدلال بالتراجع :

من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

2 (نبين أن (u_n) متزايدة .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n \\ &= (1 - u_n) + \sqrt{u_n - 1} \\ &= \frac{[(1 - u_n) + \sqrt{u_n - 1}][(1 - u_n) - \sqrt{u_n - 1}]}{[(1 - u_n) - \sqrt{u_n - 1}]} \\ &= \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{[(1 - u_n) - \sqrt{u_n - 1}]} \end{aligned}$$

حسب ما سبق : $1 < u_n$ وعليه :

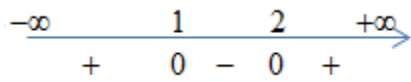
$$\begin{cases} (1 - u_n) < 0 \\ -\sqrt{u_n - 1} < 0 \end{cases} \text{ إذا } [(1 - u_n) - \sqrt{u_n - 1}] < 0$$

وعليه إشارة الغرق عكس إشارة $u_n^2 - 3u_n + 2$

بوضع $u_n = x$

ندرس في $\mathbb{R}$ إشارة كثير الحدود $x^2 - 3x + 2$.

يوجد جذران هما 1 و 2 والاشارة كما يلي :



بما أن $u_n \in]1; 2[$ وحسب ما سبق :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n > 0$

المتتالية (u_n) متزايدة تماما

• استنتاج أن (u_n) متقاربة

لدينا ما يلي :

$$\left. \begin{aligned} &(u_n) \text{ محدودة من الأعلى بالعدد } 2 \\ &(u_n) \text{ متزايدة} \end{aligned} \right\}$$

حسب مبرهنة التقارب الرتيب فهي متقاربة .

3 (أ) نتحقق أن المتتالية (v_n) معرفة تماما .

المتتالية (v_n) معرفة معناه $\ln(u_n - 1)$ معرف

$$\text{معناه } (u_n - 1) > 0$$

حسب ما سبق : $u_n > 1$ أي $u_n - 1 > 0$.

وبالتالي المتتالية (v_n) معرفة تماما .

ب) نبرهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = -\ln 2$.

من أجل كل عدد n طبيعي لدينا :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$$

(1) باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ، نثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

نضع : $P(n) : 3 < u_n < 4, n \in \mathbb{N}$:
أ- نتحقق من صحة $P(0)$.

فرضا $u_0 = \frac{13}{4}$: $3 < u_0 < 4$.

$P(0)$ صحيحة.

ب- (نفرض صحة $P(n)$ أي أن : $3 < u_n < 4$ ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين ما يلي :

$$3 < u_{n+1} < 4$$

حسب فرضية التراجع :

$$0 < u_n - 3 < 1 \text{ ومنه } 3 < u_n < 4$$

$$\text{أي } 0 < \sqrt{u_n - 3} < 1$$

$$\text{أي } 3 < 3 + \sqrt{u_n - 3} < 4$$

وعليه : $p(n+1)$ صحيحة.

مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع : من أجل كلّ عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

(2 - أ) نبين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$$

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{u_n - 3} - u_n = \sqrt{u_n - 3} - (u_n - 3)$$

باستعمال مرافق العبارة $[\sqrt{u_n - 3} - (u_n - 3)]$ نجد :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{[\sqrt{u_n - 3} - (u_n - 3)][\sqrt{u_n - 3} + (u_n - 3)]}{\sqrt{u_n - 3} + (u_n - 3)} \\ &= \frac{(\sqrt{u_n - 3})^2 - (u_n - 3)^2}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} \\ &= \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} \end{aligned}$$

نبر أن (u_n) متقاربة

تقارب المتتالية (u_n) مرتبط برتابتها

• بما أن $u_n > 3$ فإنّ $\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3 > 0$

وعليه : إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ من إشارة

$$(-u_n^2 + 7u_n - 12)$$

بوضع : $u_n = x$ ؛ نحدد إشارة كثير الحدود

$$= \ln(1 + \sqrt{u_n - 1} - 1)$$

$$v_{n+1} = \ln(u_n - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \text{ أي } = \frac{1}{2} \ln(u_n - 1)$$

المتتالية (v_n) هي إذا متتالية هندسية أساسها

$$q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

ج- (جد نهاية المتتالية (v_n) ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

• الأساس q للمتتالية الهندسية (v_n) يحقق

$$-1 < q < 1 \text{ فهي إذا متقاربة وتتقارب نحو } 0 \text{ أي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

• لدينا : $v_n = \ln(u_n - 1)$ معناه $u_n - 1 = e^{v_n}$

$$\text{معناه } u_n = e^{v_n} + 1$$

$$\text{وعليه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{v_n} + 1)$$

$$= 2 \text{ لأن } e^{v_n} \rightarrow 0$$

تمرين 19: أنظر التمرين 18

(u_n) هي المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.

(1) باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

(2 - أ) بين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$$

ب) برر أنّ (u_n) متقاربة .

(3) (v_n) هي المتتالية المعرفة علي $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = \ln(u_n - 3)$$

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد

أساسها q وحدّها الأول v_0 .

ب) عبّر عن كلّ من (u_n) و (v_n) بدلالة n .

ج- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

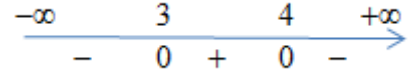
د- (نعرف من أجل كلّ عدد طبيعي n الجداء P_n

$$P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$$

عبر عن P_n بدلالة n ثمّ تحقّق أنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$

الحل :

المميز Δ يحقق $\Delta = 1$:
 يوجد جذران متممايان هما :
 $x_2 = 4$ و $x_1 = 3$
 والإشارة تكون كما يلي :



بما أن $3 < u_n < 4$ فإن $0 < (u_{n+1} - u_n)$

وعليه : المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

في هذه الحالة :

المتتالية (u_n) متقاربة لكونها متناقصة ومحدودة من

الأسفل بالعدد 3.

3- (أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q وحدّها الأول .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3)$$

$$= \ln(\sqrt{u_n - 3})$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u_n - 3)$$

$$= \frac{1}{2} v_n$$

وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$$\text{وحدها الأول } v_0 = \ln(u_0 - 3) = -\ln 4$$

(ب) عبّر عن كل من (u_n) و (v_n) بدلالة n .

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n)

$$\text{معطاة بالعلاقة : } v_n = v_0 \cdot q^n, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{بالتعويض نجد : } v_n = (-\ln 4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{من العلاقة } v_n = \ln(u_n - 3) \text{ نجد } u_n = 3 + e^{v_n}$$

$$= 3 + e^{-\ln 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + e^{v_n})$$

$$= 4 \text{ لأن } v_n \rightarrow 0$$

(ج) نعبر عن P_n بدلالة n ثم نتحقق أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$

$$P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$$

$$= e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n}$$

$$P_n = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

المجموع $(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$ هو مجموع حدا $n+1$
 حدا الأولى من المتتالية الهندسية (v_n) . إذا :

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = -\ln 4 \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right]$$

$$P_n = e^{\ln 16 \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right]} = 2 \ln 4 \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right] \text{ ومنه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e^{\ln 16 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1} \right] = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \rightarrow 0 \text{ لأن } e^{-\ln 16}$$

$$e^{-\ln 16} = e^{\ln \frac{1}{16}} \text{ لأن } = \frac{1}{16}$$

تمرين 20 :

نعتبر في $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \end{cases}$$

(1) بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

(2- أ) تحقق أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

(ب) استنتج أن (u_n) متتالية متناقصة في $\mathbb{N}$.

(ج) هل (u_n) متتالية متقاربة ؟ برر.

الحل :

(1) بالتراجع، نثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

$$\text{نضع : } P(n) : 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$$

(أ) نتحقق من صحة $P(0)$.

$$\text{لدينا فرضا } u_0 = \frac{3}{2} \text{ إذا}$$

وبالتالي $P(0)$ محققة أو صحيحة .

(ب) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $1 \leq u_n \leq 2$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

$$\text{لاحظ ما يلي : } u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

حسب فرضية التراجع : $1 \leq u_n \leq 2$

تمرين 21 :

نعتبر في $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \end{cases}$$

I - (1) جد علي شكل كسر غير قابل للاختزال الحدود: u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 و u_4 .

(2) ما هو تخمينك حول رتبة وتقارب (u_n)

II (v_n) هي المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = u_n - 3$$

1 (برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$)

2) بالتراجع أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq v_n \leq 0$

3 - (أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$$

ب (استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

4 - (أ) تحقق أن المتتالية (v_n) متقاربة .

ب - (أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

5 (تأكد من صحة تخمينك.

الحل :

I - (1) إيجاد علي شكل كسر غير قابل للاختزال الحدود: u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 و u_4 .

لدينا ما يلي :

$$u_1 = \frac{5}{2} ; \text{ بالتعويض : } u_1 = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2}$$

$$u_2 = \frac{23}{8} ; \text{ بالتعويض : } u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2}$$

$$u_3 = \frac{383}{128} ; \text{ بالتعويض : } u_3 = -\frac{1}{2}u_2^2 + 3u_2 - \frac{3}{2}$$

(2) التخمين حول رتبة وتقارب (u_n) .

من خلال حسابنا لبعض الحدود الأولى للمتتالية نلاحظ ما يلي :

$$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$$

• كل الحدود تقترب من القيمة 3 .

• (u_n) متقاربة وتتقارب نحو العدد 3 .

II - (1) برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$$

$$0 \leq u_n - 1 \leq 2 \text{ ومنه}$$

$$0 \leq (u_n - 1)^2 \leq 1 \text{ وبالتالي}$$

$$1 \leq (u_n - 1)^2 + 1 \leq 2 \text{ يأتي}$$

إذا $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ وهذا معناه $P(n+1)$ صحيحة.

مما سبق نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 2$

2 - (أ) نتحقق أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

لدينا من جهة :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 2u_n + 2) - u_n$$

$$= u_n^2 - 3u_n + 2$$

من جهة أخرى :

$$(u_n - 2)(u_n - 1) = u_n^2 - 3u_n + 2$$

$$\text{وعليه : } u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

- ب (استنتاج أن (u_n) متتالية متناقصة في $\mathbb{N}$.

$$\text{لدينا : } \begin{cases} u_n \leq 2 \\ u_n \geq 1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} u_n - 2 \leq 0 \\ u_n - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{إذا } (u_n - 2)(u_n - 1) \leq 0 \text{ أي } u_{n+1} - u_n \leq 0$$

المتتالية (u_n) متناقصة

ج (ننظر إن كانت (u_n) متتالية متقاربة.

$\left. \begin{matrix} (u_n) \text{ متتالية متناقصة} \\ (u_n) \text{ متتالية محدودة} \end{matrix} \right\}$

حسب مبرهنة التقارب الرتيب : (u_n) متقاربة

ملاحظة

في هذه الحالة كيف نحسب نهاية المتتالية (u_n) ؟

المتتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

وهي متقاربة نحو عدد حقيقي l .

l هو حل للمعادلة $f(l) = l$ مع مراعاة شروط حول

المتتالية (u_n) .

$$f(l) = l \text{ معناه } l^2 - 3l + 2 = 0$$

يوجد حلان للمعادلة هما $l_1 = 1$ و $l_2 = 2$

بما أن (u_n) متناقصة و $1 \leq u_n \leq 2$ نأخذ $l = 1$

$$\text{أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

4- أ) نتحقق أنّ المتتالية (v_n) متقاربة .

وجدنا ما يلي :

$$\left. \begin{array}{l} (v_n) \text{ محدودة من الأعلى بالعدد } 0 \\ (v_n) \text{ متزايدة .} \end{array} \right\}$$

وعليه : المتتالية (v_n) متقاربة .

- ب) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

ليكن العدد l هو نهاية المتتالية (v_n) .

$$\text{لدينا : } v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$$

نعلم أنّ النهاية إن وجدت فهي وحيدة وعليه :

$$l = -\frac{1}{2}l^2 \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n^2)$$

$$\text{أي } l \left(l + \frac{1}{2} \right) = 0$$

نجد : $l = 0$ أو $l = -\frac{1}{2}$.

بما أنّ (v_n) متزايدة ؛ نأخذ $l = 0$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

5. نتأكد من صحة تخميننا.

المتتالية (u_n) معرفة أيضا ب : $u_n = v_n + 3$.

وبالتالي يكون :

(u_n) متزايدة لكونها مجموع متالتين الأولي

متزايدة : $v_n \mapsto n$ والثانية ثابتة : $3 \mapsto n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n + 3) = 3 \text{ لأن } v_n \rightarrow 0$$

تمرين 22:

(u_n) هي المتتالية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$.

1 أ) بالتراجع ، برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

ب) باستعمال النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ حدد اتجاه تغير

المتتالية (u_n) ثم استنتج أنّها متقاربة .

2 أ) نعرف في $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) ب : $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$.

أ) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_{n+1} = v_n^2$.

ب) استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$$

ج) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ وعبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

د) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ نضع : $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$.

أحسب P_n بدلالة n .

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - 3 - \frac{3}{2} \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2 \text{ أي } = -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2$$

2) بالتراجع أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $-1 \leq v_n \leq 0$

نضع : $P(n) : -1 \leq v_n \leq 0$

أ) نتحقق من صحة $P(0)$

لدينا فرضا : $v_0 = u_0 - 3 = -1$: $-1 \leq v_0 \leq 0$.

$P(0)$ صحيحة .

ب) نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة أي : $-1 \leq v_n \leq 0$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين صحة ما يلي :

$$-1 \leq v_{n+1} \leq 0$$

حسب فرضية التراجع : $-1 \leq v_n \leq 0$

الدالة مربع متناقصة تماما على المجال $] -\infty; 0]$

فهي إذا تعكس الترتيب . وعليه :

$$0 \leq v_n^2 \leq 1 \text{ أي } (-1)^2 \geq v_n^2 \geq 0$$

$$\text{ومنه } -\frac{1}{2} \times 0 \geq -\frac{1}{2}v_n^2 \geq -\frac{1}{2} \times 1$$

$$\text{أي } -1 \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq 0$$

$$\text{أي } -1 \leq v_{n+1} \leq 0$$

$P(n+1)$ صحيحة.

من أ) و ب) وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $-1 \leq v_n \leq 0$

3- أ) نبرهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$$

لدينا وبما أنّ $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$: إذا $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n$

$$= -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$$

ب) نستنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

$$\begin{cases} 0 \leq -v_n \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1 \end{cases} \text{ بما أنّ } -1 \leq v_n \leq 0 \text{ فإن :}$$

وعليه $0 \leq -\frac{1}{2}v_n(v_n + 1) \leq 1$ أي $v_{n+1} - v_n \geq 0$

المتتالية (v_n) متزايدة .

2.أ) نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n $v_{n+1} = v_n^2$ لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{1 - \frac{2u_n}{1+u_n^2}}{1 + \frac{2u_n}{1+u_n^2}} \quad \text{أي} \quad v_{n+1} = \frac{1 - u_{n+1}}{1 + u_{n+1}}$$

$$= \frac{1 + u_n^2 - 2u_n}{1 + u_n^2 + 2u_n}$$

$$= \frac{(1 - u_n)^2}{(1 + u_n)^2}$$

وهو المطلوب. $v_{n+1} = v_n^2$ أي $v_{n+1} = \left(\frac{1 - u_n}{1 + u_n}\right)^2$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n $v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$

الحد الأول للمتتالية (v_n) معرف بـ :

$v_0 = \frac{1}{3}$ بتعويض u_0 بقيمته نجد : $v_0 = \frac{1 - u_0}{1 + u_0}$

بما أن $v_{n+1} = v_n^2$ ينتج :

$v_2 = v_1^2 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3^{2^2}}$ ؛ $v_1 = v_0^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^{2^1}}$

$v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$... ؛ $v_3 = v_2^2 = \left(\frac{1}{3^4}\right)^2 = \frac{1}{3^8} = \frac{1}{3^{2^3}}$

ج) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ وعبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

$u_n \cdot v_n + v_n = 1 - u_n$ يكافئ $v_n = \frac{1 - u_n}{1 + u_n}$

يكافئ $u_n = \frac{1 - v_n}{1 + v_n}$

بتعويض v_n نجد : $u_n = \frac{1 - \frac{1}{3^{2^n}}}{1 + \frac{1}{3^{2^n}}}$ أي $u_n = \frac{3^{2^n} - 1}{3^{2^n} + 1}$

د) أحسب P_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{P_n}{v_{n+1}}\right)$

لدينا $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3^2} \times \dots \times \frac{1}{3^{2^n}}$

$= \frac{1}{3^{1+2+4+\dots+2^n}}$

نلاحظ أن المجموع $(1+2+4+\dots+2^n)$ هو مجموع

$(n+1)$ حدا متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها

الحل :

1. أ) بالتراجع ، نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n $0 < u_n < 1$.

نضع : $P(n) : 0 < u_n < 1, n \in \mathbb{N}$.

• نتحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$: $0 < u_n < 1$.

• نفرض صحة $P(n)$ أي أن $0 < u_n < 1$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين أن $0 < u_{n+1} < 1$.

حسب فرضية التراجع لدينا :

$0 < u_n < 1$ وبالتالي :

$2u_n > 0$ و $1 + u_n^2 > 0$.

إذا : $\frac{2u_n}{1 + u_n^2} > 0$ (1) .

ثم : $2u_n - u_n^2 - 1 = -(u_n - 1)^2 < 0$

لكون $(u_n - 1)^2 > 0$.

إذا : $2u_n < 1 + u_n^2$ وبالتالي : $\frac{2u_n}{1 + u_n^2} < 1$... (2) .

من (1) و (2) ينتج : $0 < \frac{2u_n}{1 + u_n^2} < 1$

أي $0 < u_{n+1} < 1$. إذا $P(n+1)$ صحيحة .

• مما سبق نستنتج ما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

ملاحظة :

المتتالية (u_n) متتالية محدودة (لكونها محدودة من الأسفل ومن الأعلى)
المتتالية (u_n) متتالية موجبة تماما

ب) باستعمال النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ نحدد اتجاه تغير

المتتالية (u_n) ثم نستنتج أنها متقاربة .

لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + u_n^2}{2u_n}$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{1 + u_n^2}$.

لدينا : $0 < u_n < 1$ إذا $1 < 1 + u_n^2 < 2$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$: ينتج : $\frac{2}{1 + u_n^2} < 1$ أي :

المتتالية (u_n) هي إذا متتالية متناقصة تماما .

(u_n) متناقصة

(u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0

إذا (u_n) متقاربة .

2 وحدها الأول 1 وعليه :

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 1 \times \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right) = (2^{n+1} - 1)$$

$$P_n = \frac{1}{3^{2^{n+1}-1}} \quad \text{في هذه الحالة :}$$

حسب فرضية التراجع : $u_n \geq 1$ ينتج $u_n - 1 \geq 0$

في هذه الحالة : $\frac{\alpha(u_n - 1)}{u_n} \geq 0$ أي $u_{n+1} \geq 1$

وبالتالي : $P(n+1)$ صحيحة.

مما سبق نستنتج ما يلي :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 1$

- (ب) أثبت أن (u_n) متتالية متناقصة .

لهذا نبين أن $u_{n+1} - u_n \leq 0$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} - u_n \\ &= \frac{-u_n^2 + (1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} \end{aligned}$$

واضح أن إشارة هذا الفرق من إشارة البسط.

بوضع $x = u_n$ حيث $x \geq 1$ ؛ ندرس في $\mathbb{R}$ إشارة

كثير الحدود $-x^2 + (1+\alpha)x + \alpha$

مميزه $\Delta = (1+\alpha)^2 - 4\alpha$

$$= \alpha^2 - 2\alpha + 1$$

$$= (\alpha - 1)^2$$

ملاحظة :

$(\alpha - 1)^2 > 0$ لكون $\alpha \neq 1$: $0 < \alpha < 1$

لكن $\sqrt{\Delta} = |\alpha - 1|$

بما أن $\alpha - 1 < 0$ فإن : $\sqrt{\Delta} = 1 - \alpha$.

لكثير الحدود جذران متمايزان هما :

$$x_2 = \frac{-1 - \alpha - 1 + \alpha}{-2} ; \quad x_1 = \frac{-1 - \alpha + 1 - \alpha}{-2}$$

$$= 1 \quad = \alpha$$

إشارة كثير الحدود كما يلي :

$$\begin{array}{ccccccc} -\infty & & \alpha & & 1 & & +\infty \\ & & - & & + & & - \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \rightarrow$$

بما أن $u_n \geq 1$ فإن $u_{n+1} - u_n \leq 0$

المتتالية (u_n) متناقصة .

- (ج) استنتاج بعد هذا أن (u_n) متتالية متقاربة .

ما هي نهايتها؟

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد

المتتالية (u_n) متناقصة

وعليه متتالية متقاربة نحو عدد l حيث $l \geq 1$.

العدد l هو حل للمعادلة : $l = \frac{(1+\alpha)l - \alpha}{l}$ وهي

مكافئة للمعادلة : $-l^2 + (1+\alpha)l - \alpha = 0$

تمرين 23:

α عدد حقيقي حيث : $0 < \alpha < 1$.

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} \end{cases} \quad (u_n) \text{ المعرفة كما يلي :}$$

1- (أ) بالتراجع أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 1$

- (ب) أثبت أن (u_n) متتالية متناقصة .

- (ج) استنتج بعد هذا أن (u_n) متتالية متقاربة .

ما هي نهايتها ؟

2 (نعرّف في $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$

- (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \alpha v_n$$

ماذا تستنتج ؟

- (ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n و

α ثم استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

الحل:

1- (أ) بالتراجع نثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geq 1$$

نضع : $P(n) : u_n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

نحقق من صحة $P(0)$.

لدينا فرضا $u_0 = 2$: $u_0 \geq 1$.

إذا $P(0)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي أن $u_n \geq 1$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين أن : $u_{n+1} \geq 1$.

لهذا نقارن مثلا بين u_{n+1} و 1 أي ندرس إشارة

الفرق $u_{n+1} - 1$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha - u_n}{u_n}$$

$$u_{n+1} = \frac{\alpha(u_n - 1)}{\alpha} \quad \text{أي} \quad = \frac{\alpha u_n - \alpha}{u_n}$$

لدينا فرضا $0 < \alpha < 1$: ينتج $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha^{n+1} + \alpha - 2}{\alpha^n + \alpha - 2} \right) = \frac{\alpha - 2}{\alpha - 2} = 1$$

تمرين 24:***

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$;

$$u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n, \text{ و } u_1 = 2$$

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1 -) أحسب v_0 و v_1 .

2 -) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3 -) أ -) أحسب بدلالة n المجموع :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

ب -) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$$

ج -) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(عن بكالوريا 2009 ع-ت) .

الحل:

1 -) حساب v_0 و v_1 .

لدينا :

$$v_0 = u_1 - u_0 = 1$$

$$v_1 = u_2 - u_1$$

$$u_2 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{7}{3} \text{ ومنه } v_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$$

2 -) تبرهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$ أي :

$$v_{n+1} = \left(\frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \right) - u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n)$$

$$= \frac{1}{3}v_n$$

وعليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

3 -) أ -) أحسب بدلالة n المجموع :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

S_n هو مجموع n حدا الأولى من المتتالية

الهندسية (v_n) . ومنه :

نجد $l = \alpha$ أو $l = 1$. نأخذ : $l = 1$.
(2 -) أ -) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \alpha \cdot v_n$$

لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - \alpha}$$

$$= \frac{(1 + \alpha)u_n - \alpha}{u_n} - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{\alpha u_n - \alpha}{u_n - \alpha} \text{ أي } = \frac{u_n}{(1 + \alpha)u_n - \alpha} - \alpha$$

$$= \frac{\alpha(u_n - 1)}{u_n - \alpha}$$

$$\text{أي : } v_{n+1} = \alpha \left(\frac{u_n - 1}{u_n - \alpha} \right) = \alpha v_n$$

• نستنتج أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية

أساسها α فهي إذا متقاربة وتتقارب نحو 0 لكون

$$0 < \alpha < 1 \text{ وحدها الأول } v_0 = \frac{1}{2 - \alpha} .$$

ب-) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n و α

ثم نستنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

• عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n)

$$\text{معطاة بالعلاقة : } v_n = v_0 \cdot q^n, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{بالتعويض نجد : } v_n = \left(\frac{1}{2 - \alpha} \right) \cdot \alpha^n$$

• من العلاقة : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$ ينتج ما يلي :

$$u_n v_n - u_n = \alpha v_n - 1 \text{ يكافئ } (u_n - \alpha) \cdot v_n = u_n - 1$$

$$u_n = \frac{\alpha v_n - 1}{v_n - 1} \text{ يكافئ}$$

بتعويض (v_n) بقيمته نجد :

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} + \alpha - 2}{\alpha^n + \alpha - 2} \text{ أي } u_n = \frac{\frac{\alpha \times \alpha^n - 1}{2 - \alpha}}{\frac{\alpha^n}{2 - \alpha}}$$

ملاحظة :

يمكن مثلا حساب الحد الأول u_0 من عبارة الحد

$$\text{العام للمتتالية } (u_n) \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

للتأكد من صحة النتائج المحصل عليها .

$$u_0 = \frac{2\alpha - 2}{\alpha - 2} = 2$$

نضع : $p(n): u_n > 0, n \in \mathbb{N}$

• نتحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 = 2$ أي $u_0 > 0$.

إذا : $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ أي أن $u_n > 0$ ونبين صحة

$P(n+1)$ أي نبين أن : $u_{n+1} > 0$

لدينا وحسب فرضية التراجع : $u_n > 0$ وعله

$3u_n + 1 > 1 > 0$. إذا : $\frac{u_n}{3u_n + 1} > 0$ أي $u_{n+1} > 0$.

وبالتالي : $P(n+1)$ صحيحة .

مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$.

المتتالية (v_n) معرفة بـ : $v_n = \frac{1}{u_n}$

بما أن $u_n > 0$ فإن $(u_n \neq 0)$ فإن $v_n = \frac{1}{u_n}$ معرف تماما

(2) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية .

لدينا ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{3u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{3u_n}{u_n} \end{aligned}$$

أي : $v_{n+1} - v_n = 3$

المتتالية (v_n) هي إذا متتالية حسابية أساسها

$r=3$ وحدها الأول وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$

(3) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

حسب ما سبق :

عبار الحد العام للمتتالية الحسابية (v_n) هي :

$$v_n = 3n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$$

وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3n + \frac{1}{2}\right) = +\infty$

لكن : $v_n = \frac{1}{u_n}$ يكافئ $u_n = \frac{1}{v_n}$ وعليه :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{أي} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_n}\right)$$

$$S_n = v_0 \left[\frac{1-q^n}{1-q} \right] \quad \text{نعوض :} \quad S_n = 1 \times \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right]$$

$$S_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

- ب) نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1$$

من العلاقة : $v_n = u_{n+1} - u_n$ نلاحظ ما يلي :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$$

$$\begin{aligned} &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1}) \\ &= -u_0 + u_n \end{aligned}$$

$$S_n = -u_0 + u_n \quad \text{معناه} \quad u_n = S_n + u_0$$

بتعويض كل من S_n و u_0 بقيمة نجد :

$$u_n = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] + 1$$

- ج) يبين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

لدينا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1 \right] ; \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$$

$$= \frac{5}{2}$$

وعليه (u_n) متقاربة وتتقارب نحو $\frac{5}{2}$

تمرين 25

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي :

$$(v_n): v_n = \frac{1}{u_n} ; (u_n): \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases}$$

(1) باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$.

استنتج أن المتتالية (v_n) معرفة تماما .

(2) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية .

(3) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

الحل :

(1) باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ، نثبت أنه

من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$.

تمرين 26: ***

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 5$ ومن

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 : n \text{ عدد طبيعي}$$

1 - (أ) أرسم في معلم متعامد ومتجانس
($O; \vec{i}, \vec{j}$) المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

والمنحني (d)

الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

2 - (ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل علي
حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود :

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4$$

3 - (ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

وتقاربها .

4 - (أ - ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد
طبيعي $n : u_n \leq 6$.

5 - (ب) تحقق أن (u_n) متزايدة .

6 - (ج) هل (u_n) متقاربة ؟ برر جوابك .

7 - (أ - ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = u_n - 6$.

8 - (أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية .

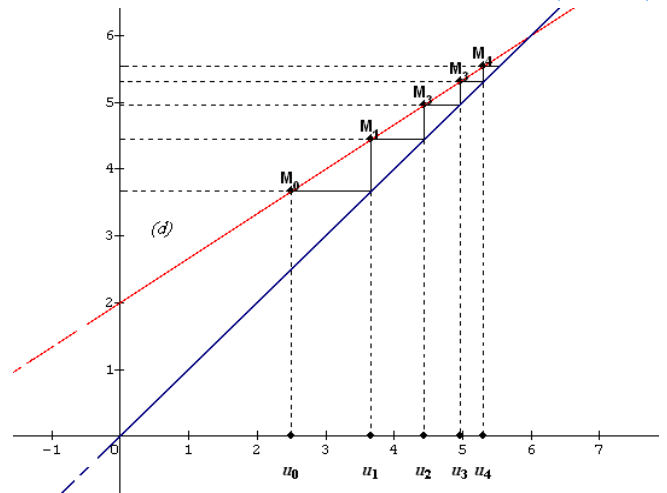
9 - (ب) أكتب عبارة (u_n) بدلالة n ثم استنتج

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

عن بكالوريا 2008

الحل:

1 - (أ - ب) نرسم في معلم متعامد ومتجانس
($O; \vec{i}, \vec{j}$) المستقيم (Δ) والمنحني (d) .



2 - (ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل علي
محور الفواصل وبدون

حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 .

(أنظر الشكل أعلاه) .

3 - (ج) وضع تخمين حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية
(u_n)

بيانيا نلاحظ ما يلي :

$$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$$

ومنهك إذا كانت المتتالية (u_n) رتيبة ، فهي حتما

متزايدة .

• النقط ($M_n(u_n; f(u_n))$) تقترب من نقطة

تقاطع (d) و (Δ) .

هذا يعني أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4 - (أ - ب) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$
 $u_n \leq 6$:

لتكن $P(n)$ الخاصية :

$$P(n) : u_n \leq 6 ; n \in \mathbb{N}$$

• نتحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n = 0$ يكون $u_0 = \frac{5}{2}$ أي $u_0 \leq 6$.

$P(0)$ هي إذا صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ عند رتبة معينة n أي

نفرض أن $u_n \leq 6$ ونبين أن $P(n+1)$

صحيحة أي نبين أن $u_{n+1} \leq 6$.

لدينا وحسب فرضية التراجع : $u_n \leq 6$ ومنه

$$\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6 \text{ اي } \frac{2}{3}u_n \leq 4$$

وبالتالي : $u_{n+1} \leq 6$

$P(n+1)$ صحيحة.

• ممّا سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع
ينتج :

من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq 6$.

5 - (ب) نتحقق أن متتالية (u_n) متزايدة .

لهذا نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

لدينا ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{7}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n + 6 \right]; \left(\frac{2}{3} \right)^n \rightarrow 0$$

$$. = 6$$

ملاحظة :

يمكن إتباع الطّريقة الآتية : المتتالية (u_n) هي مجموع المتتاليتين المتقاربتين $n \mapsto v_n$ (هندسية تتقارب نحو 0) و $n \mapsto 6$ (ثابتة : تتقارب نحو 6) إذا المتتالية (u_n) متقاربة وتتقارب نحو 6 .

تمرين 27 : ***

1 -) نعتبر الدّالة f المعرّفة علي المجال $I = [1; 2]$

$$. \text{ بالعارة } f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$$

أ -) بيّن أنّ الدّالة f متزايدة تماما علي I .
ب -) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلي المجال I .

2 -) (u_n) هي المتتالية المعرّفة علي $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1} = f(u_n)$$

أ -) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ u_n ينتمي إلي I .

ب -) أدرس إتّجاه المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

3 -) أ -) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2} \right)^n + 1}$$

ب -) عيّن نهاية المتتالية (u_n) .

عن بكالوريا 2008

الحل :

1 -) أ -) بيّن أنّ f متزايدة تماما علي I

لهذا يكفي أن نتحقّق أنّه من أجل كلّ x من I ؛
 $f'(x) > 0$

من أجل كلّ x من المجال $[1; 2]$:

$$f'(x) = \frac{(-x+4) - (-1)(x+2)}{(-x+4)^2}$$

$$= \frac{2}{(-x+4)^2}$$

نلاحظ أنّه من أجل كلّ x من I ؛ $f'(x) > 0$.

$$\text{أي } u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 2$$

$$= \frac{1}{3}(6 - u_n)$$

بما أنّ $6 - u_n \geq 0$ فإنّ $\frac{1}{3}(6 - u_n) \geq 0$. إذا :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
المتتالية (u_n) متتالية متزايدة.

- ج -) ننظر إن كانت المتتالية (u_n) متقاربة مع التّبرير.

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 .

حسب مبرهنة التقارب الرّتيب (u_n) متتالية متقاربة

3 -) أ -) إثبات أنّ (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل v_0 .

من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 \text{ أي } v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 4$$

$$= \frac{2}{3}(u_n - 6)$$

أي من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

المتتالية (v_n) هي إذا متتالية هندسية أساسها

$$q = \frac{2}{3} \text{ وحدّها الأوّل } v_0 \text{ حيث } v_0 = u_0 - 6 \text{ أي } v_0 = -\frac{7}{2}$$

ب -) *) كتابة عبارة u_n بدلالة n .

لدينا : $v_n = u_n - 6$ يكافئ $u_n = v_n + 6$.

بما أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها q

وحدها الأوّل v_0 فإنّ عبارة حدّها العامّ معطاة

بالعلاقة : $v_n = v_0 \times q^n$.

في هذه الحالة :

$$u_n = \left(-\frac{7}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right)^n + 6 : n \text{ عدد طبيعي}$$

*) استنتاج نهاية المتتالية (u_n) .

في هذه الحالة : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

المتتالية (u_n) متتالية متناقصة علي $\mathbb{N}$.

* استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل

بالعدد 1 فهي إذا متتالية متقاربة (حسب مبرهنة

التقارب الرتيب) .

3 - أ) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد

طبيعي n :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

$$\text{نضع : } n \in \mathbb{N} ; u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} ; P'(n)$$

• نتحقق من صحة $P'(0)$.

$$1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 1} = \frac{3}{2}$$

إذا $P'(0)$ صحيحة .

• نفرض أن $P'(n)$ صحيحة عند رتبة معينة n

ونبين أن $P'(n+1)$

$$\text{صحيحة ؛ أي نبين ما يلي : } u_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$

$$\text{لدينا وحسب تعريف المتتالية } (u_n) : u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4}$$

حسب فرضية التراجع وبتعويض u_n بقيمته نجد :

$$u_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} + 2}{-1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}} \quad \text{أي} \quad u_{n+1} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}$$

$$= \frac{\left[3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2\right] + 2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}$$

$$= 1 + \frac{2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}$$

f دالة متزايدة تماما علي المجال I .

- ب) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I ؛

$$f(x) \in I$$

بما أن الدالة f متزايدة تماما علي I فهي تحفظ

الترتيب وهذا معناه :

$$\text{إذا كان } 1 \leq x \leq 2 \text{ فإن } f(1) \leq f(x) \leq f(2)$$

$$\text{لدينا : } f(1) = 1 , f(2) = 2 \text{ . وعليه :}$$

$$\text{إذا كان } 1 \leq x \leq 2 \text{ فإن } 1 \leq f(x) \leq 2$$

2 - أ) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$$1 \leq u_n \leq 2$$

نضع : $1 \leq u_n \leq 2 ; P(n)$

• نتحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$. إذا $P(0)$ صحيحة .

• نفرض أنه عند رتبة معينة n ؛ $P(n)$

صحيحة أي نفرض أن

$$1 \leq u_n \leq 2 \text{ ونبين صحة } P(n+1) \text{ أي نبين أن}$$

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

حسب فرضية التراجع لدينا : $1 \leq u_n \leq 2$

الدالة f متزايدة تماما علي المجال $[1;2]$ وبالتالي

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \text{ أي : } 1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

إذا $P(n+1)$ صحيحة .

• ممّا سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

ينتج :

من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

- ب) * دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

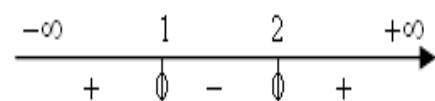
لهذا ندرس في $\mathbb{N}$ إشارة الفرق $(u_{n+1} - u_n)$.

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 3n + 2}{-u_n + 4} \end{aligned}$$

* لكثير الحدود $x^2 - 3x + 2$ جذران متمايزان هما 1 و 2

وإشارته كما يلي :



إذا بوضع $u_n = x$ ينتج : من أجل كل u_n من $[1,2]$:

$$u_n^2 - 3n + 2 \leq 0$$

ثم : بما أن $1 \leq u_n \leq 2$ فإن $-4 + u_n > 0$.

تمرين 29 :

a عدد حقيقي .

(u_n) هي المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} \end{cases}$$

I () نفرض أن $a = 1$.

بالتراجع ؛ أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة.

II () في كل مما يلي نأخذ $a = \frac{3}{2}$.

1 () بالتراجع ؛ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
 $1 < u_n < 2$

2 () ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

حدد نهاية المتتالية (u_n)

3 () لتكن (v_n) المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}.$$

أ () بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد

أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب () عبر عن u_n بدلالة n .

ج () أحسب من جديد نهاية المتتالية (u_n) .

4 () بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_n).$$

ب () استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n.$$

ج () تحقق من نهاية المتتالية (u_n)

الحل :

I () بالتراجع ؛ نثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة.

(u_n) ثابتة في $\mathbb{N}$ معناه $(u_n = a = 1)$

لهذا نضع : $n \in \mathbb{N}, u_n = 1, P(n)$

• لدينا فرضا $u_0 = 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

• نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $u_n = 1$

ونبين أن $P(n+1)$ صحيحة أي : نبين أن

$$u_{n+1} = 1.$$

لدينا ما يلي :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} \text{ حسب فرضية التراجع : } u_n = 1 \\ &= \frac{5(1) - 2}{1 + 2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذا $P(n+1)$ صحيحة

مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :

المتتالية (u_n) متتالية ثابتة من أجل $a = 1$.

II (1-) بالتراجع ؛ نثبت أنه من أجل كل عدد

طبيعي n : $1 < u_n < 2$.

بوضع : $1 < u_n < 2, P(n)$

أ () نتحقق من صحة $P(0)$.

لدينا فرضا $u_0 = \frac{3}{2}$. إذا $1 < u_0 < 2$

وعليه : $P(0)$ صحيحة .

ب () نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي نفرض صحة ما يلي

$$1 < u_n < 2.$$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين ما يلي :

$$1 < u_{n+1} < 2$$

نقارن بين u_{n+1} وكل من 1 و 2 .

لدينا :

$$u_{n+1} = \frac{4(u_n - 1)}{u_n + 2} \text{ أي } u_{n+1} - 1 = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 1$$

حسب فرضية التراجع : $1 < u_n < 2$ وعليه :

$$\begin{cases} (u_n - 1) > 0 \\ (u_n + 2) > 0 \end{cases} \text{ ينتج } u_{n+1} - 1 > 0 \text{ وهذا معناه}$$

$$u_{n+1} > 1 \dots (1)$$

$$u_{n+1} = \frac{3(u_n - 2)}{u_n + 2} \text{ أي } u_{n+1} - 2 = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 2$$

$$\begin{cases} (u_n - 2) < 0 \\ (u_n + 2) > 0 \end{cases} \text{ ينتج } u_{n+1} - 2 < 0 \text{ وهذا معناه :}$$

$$u_{n+1} < 2 \dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $P(n+1)$ صحيحة.

- مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :

من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$

2 () ندرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم نستنتج أنها

متقاربة.

لهذا ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ مع $1 < u_n < 2$

$$v_{n+1} = \frac{4}{3} \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 2} \right) \text{ أي } \\ = \frac{4}{3} v_n$$

وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{4}{3}$

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 - 2} = -1 \text{ وحدها الأول}$$

(ب) نعبر عن u_n بدلالة n .

$$\text{من العلاقة } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2} \text{ نجد: } v_n(u_n - 2) = u_n - 1$$

$$\text{معناه } u_n(v_n - 1) = 2v_n - 1$$

$$\text{معناه } u_n = \frac{2v_n - 1}{v_n - 1} \dots (2)$$

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n) هي :

$$v_n = (-1) \left(\frac{4}{3} \right)^n, n \in \mathbb{N}$$

بتعويض v_n بقيمته في (2) نجد :

$$u_n = \frac{2 \left(\frac{4}{3} \right)^n + 1}{\left(\frac{4}{3} \right)^n + 1} \text{ أي } u_n = \frac{-2 \left(\frac{4}{3} \right)^n - 1}{-\left(\frac{4}{3} \right)^n - 1}$$

(ج) نحسب من جديد نهاية المتتالية (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = ? , \left(\frac{4}{3} \right)^n \rightarrow +\infty .$$

لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{4}{3} \right)^n \left[2 + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right]}{\left(\frac{4}{3} \right)^n \left[1 + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \left(\frac{3}{4} \right)^n}{1 + \left(\frac{3}{4} \right)^n}$$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$ لأن $1 < \frac{3}{4} < 1$ فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - u_n$$

$$= \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 2}$$

إشارة الفرق من إشارة $(-u_n^2 + 3u_n - 2)$

ملاحظة :

يمكن دراسة-في $\mathbb{R}$ - إشارة كثير الحدود $(-x^2 + 3x - 2)$ ثم استنتاج إشارة المقدار $(-u_n^2 + 3u_n - 2)$

$$(-u_n^2 + 3u_n - 2) \text{ ينعدم عند كل من } 1 \text{ و } 2 .$$

$$\text{ومنه : } (-u_n^2 + 3u_n - 2) = -(u_n - 1)(u_n - 2)$$

حسب ما سبق :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n - 1 \geq 0 \\ u_n - 2 \leq 0 \end{array} \right. \text{ إذا : } [-(u_n - 1)(u_n - 2) \geq 0]$$

المتتالية (u_n) متتالية متزايدة .

• المتتالية (u_n) متزايدة

المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1

إذا : (u_n) متتالية متقاربة .

• نحدد نهاية المتتالية (u_n) .

$$\text{نفرض أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$l \text{ حل للمعادلة } \dots l = \frac{5l - 2}{l + 2} \text{ و } 1 < l < 2$$

$$(1) \text{ تكافئ } l^2 - 3l + 2 = 0$$

يوجد حلان للمعادلة هما $l_1 = 1$ ؛ $l_2 = 2$.

بما أن (u_n) متزايدة نأخذ $l = 2$

$$\text{أي : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

3- أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد

أساسها q وحدها الأول v_0 .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 1}{\frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 2} \text{ أي } = \frac{\frac{5u_n - 2 - u_n - 2}{u_n + 2}}{\frac{5u_n - 2 - 2u_n - 4}{u_n + 2}} \\ = \frac{4u_n - 4}{3u_n - 6}$$

4- (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_n).$$

يكفي أن نبين أن : $2 - u_{n+1} - \frac{6}{7}(2 - u_n) \leq 0$.

لدينا :

$$2 - u_{n+1} = 2 - \frac{5u_n - 2}{u_n + 2}$$

$$2 - u_{n+1} = \frac{-3(u_n - 2)}{u_n + 2} \quad \text{أي} \quad = \frac{-3u_n + 6}{u_n + 2}$$

ومنه :

$$\begin{aligned} 2 - u_{n+1} - \frac{6}{7}(2 - u_n) &= \frac{-3(u_n - 2)}{u_n + 2} + \frac{6}{7}(u_n - 2) \\ &= (u_n - 2) \left[\frac{-3}{u_n + 2} + \frac{6}{7} \right] \\ &= (u_n - 2) \left(\frac{6u_n - 9}{7(u_n + 2)} \right). \end{aligned}$$

لدينا : المتتالية (u_n) متزايدة وهذا معناه :

من أجل كل عدد طبيعي n $u_n \geq \frac{3}{2}$ أي $u_n \geq u_0$.

وعليه :

$$\frac{6u_n - 9}{7(u_n + 2)} \geq 0 \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 6u_n - 9 \geq 6\left(\frac{3}{2}\right) - 9 = 0 \\ 7(u_n + 2) > 0 \end{cases}$$

ثم : $u_n < 2$ إذا $(u_n - 2) < 0$

وعليه :

$$(u_n - 2) \left(\frac{6u_n - 9}{7(u_n + 2)} \right) \geq 0$$

إذا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_n).$$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n$$

وجدنا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_n).$$

وعليه يمكننا أن نكتب :

$$2 - u_1 \leq \frac{6}{7}(2 - u_0)$$

$$2 - u_2 \leq \frac{6}{7}(2 - u_1)$$

$$2 - u_3 \leq \frac{6}{7}(2 - u_1)$$

...

...

$$2 - u_{n-1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_{n-2})$$

$$(2 - u_n) \leq \frac{6}{7}(2 - u_{n-1}).$$

لدينا n متباينة ذات أطراف موجبة وبالتالي وبالضرب طرفا لطرف يأتي :

$$(2 - u_1)(2 - u_2)(2 - u_3) \times \dots \times (2 - u_{n-1})(2 - u_n) \leq$$

$$\frac{6}{7}(2 - u_0) \frac{6}{7}(2 - u_1) \frac{6}{7}(2 - u_2) \times \dots \times \frac{6}{7}(2 - u_{n-1})$$

$$2 - u_n \leq \frac{6}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{6}{7}(2 - u_0)$$

عاملا n

$$2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n$$

بتعويض u_0 بقيمته نجد :

ج) نتحقق من نهاية المتتالية (u_n)

حسب ما سبق يمكن أن نكتب :

$$0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{6}{7} \right)^n$$

تمرين 30:

نعرّف في $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) بـ : $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

1- (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

$$\text{معدوم } n : 0 < \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} < 1.$$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

$$\text{معدوم } n : u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right).$$

استنتج رتبة المتتالية (u_n) .

2) نضع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

أ) أثبت أن $S_n = \ln(n+1)$.

ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

3) نعرّف المجموع w_n بـ : $w_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$.

$$\text{أ) بين أن } w_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right).$$

ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

$$= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{\cancel{2}}{1} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{\cancel{n}}{n-1} \times \frac{n+1}{\cancel{n}}\right)$$

$$= \ln(n+1)$$

- ب) نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

3- أ) نبين أن $w_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$.

لدينا $w_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n-1} + u_{2n}$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)$$

$$w_n = \ln\left(\frac{\cancel{n+1}}{n} \times \frac{n+2}{\cancel{n+1}} \times \dots \times \frac{\cancel{2n}}{2n-1} \times \frac{2n+1}{\cancel{2n}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{n} \times \frac{2n+1}{1}\right)$$

إذًا $w_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

- ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \ln 2 ; \left(\frac{2n+1}{n}\right) \rightarrow 2$$

الحل: 1- أ) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم n : $0 < \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$.

نلاحظ أن : $\frac{n^2+2n}{n^2+n+1} = \frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $(n+1)^2 > 1$ وعليه :

$$\frac{1}{(1+n)^2} < 1.$$

في هذه الحالة ينتج : $\begin{cases} 1 - \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \\ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1 \end{cases}$ ومنه :

$$0 < \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$$

- ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير

معدوم n : $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)$.

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right]$$

$$= \ln\left(\frac{n+2}{n+1} \times \frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)$$

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $0 < x < 1$: $\ln x < 0$

حسب ما سبق : $0 < \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$ ومنه :

$$u_{n+1} - u_n < 0 : \text{أي } \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) < 0$$

المتتالية (u_n) هي إذا متتالية متناقصة .

أ - أثبت أن $S_n = \ln(n+1)$

لدينا :

S_n هو مجموع n حدا الأولي من (u_n) .

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

Abd-chih