سلسلة الخباش في الرياضيات

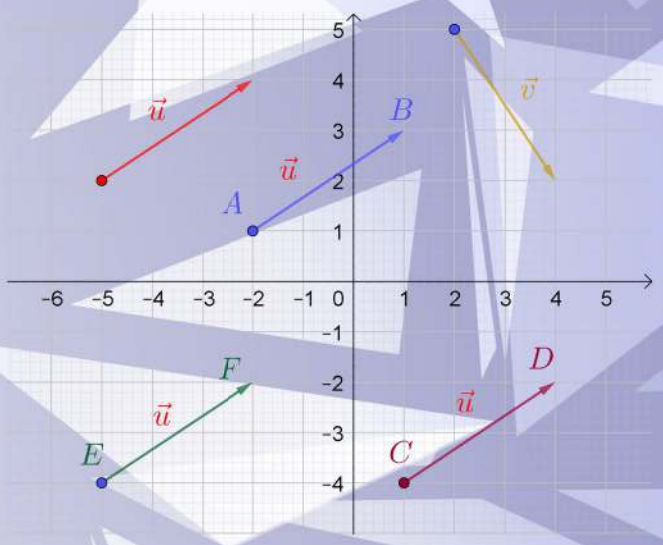
1 AS
ثانوي
جذع مشترك علوم

الحساب الشعاعي و معادلة مستقيم

BAC 2026

تتضمن هذه السلسلة ملخص الدرس
و سلسلة التمارين لكل من

- الحساب الشعاعي
- المعلم في المستوي
- معادلة مستقيم
- جملة معادلتين خطيتين



جمع و إعداد الأستاذ :
أمين كـروش

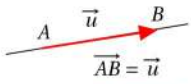
KERROUCHE MATHS
www.dzexams.com

ملخص الدرس

01 الحساب الشعاعي

01 مفهوم شعاع :

نقطتان من المستوي نقول أن الثنائية $(A;B)$ تعيّن شعاعا A ، B
نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{v}$.



له ثلاث عناصر أساسية و هي :

المنحى الطويلة الإتجاه

◄ إذا كانت A منطبقة على B فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يصبح معدوما و نكتب $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

ملاحظة هامة: ليس للشعاع المعدوم أي منحى.

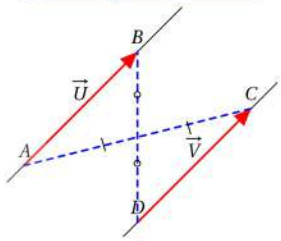
02 تساوي شعاعين :

◄ $\vec{u} = \vec{v}$ معناه أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس المنحى، نفس الإتجاه و نفس الطول

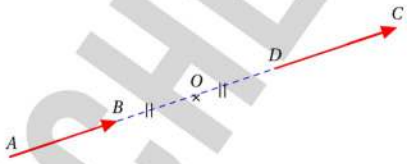
ملاحظة :

A، B، C و D أربع نقط من المستوي إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان (لهما نفس المنتصف) أي $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ و نميز حالتين :

A,B,C,D ليست في إستقامية



A,B,C,D في إستقامية



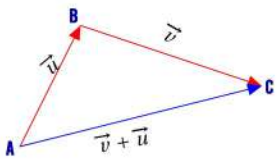
03 مجموع شعاعين :

مجموع شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الشعاع $\vec{u} + \vec{v}$ و المعرف كمايلي :

علاقة شال:

◄ إذا كانت نهاية $\vec{u}$ بداية $\vec{v}$ فإن :

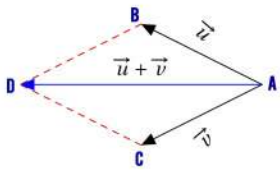
* من أجل كل ثلاث نقط A ، B ، C من المستوي فإن: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (تسمى علاقة شال).



علاقة متوازي الأضلاع:

◄ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس المبدء فإن :

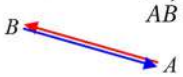
* إذا مثلنا شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من نفس المبدا A، مثلا $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ فإن مجموعهما $\vec{u} + \vec{v}$ يساوي $\overrightarrow{AD}$ حيث $ABDC$ متوازي أضلاع.



04 الشعاعان المتعاكسان:

من أجل كل نقطتين A ، B من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ أنهما متعاكسان معناه لهما نفس المنحى و نفس الطويلة لكن متعاكسان في الإتجاه و نكتب $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



كيف نبين مساواة شعاعية ؟ :

طريقة

لإثبات صحة مساواة شعاعية يمكن تفكيك أحد الطرفين والوصول إلى الطرف الأخر بإستعمال علاقة شال وعبارات شعاعية تترجم وضعيات معطاة مثل:

★ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BI}$ أو $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ أو $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$... للتعبير عن أن I منتصف $[BC]$

★ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$ للتعبير عن أن M، N منتصفي $[AB]$ ، $[AC]$ في المثلث ABC.

مثال: A، B و C ثلاث نقط. I منتصف $[AB]$.

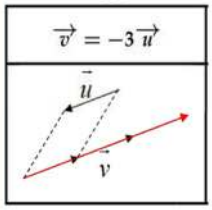
1. بين أنه من أجل كل نقطة M فإن: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$.
2. بين أن: $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

الحل:

1. حسب علاقة شال لدينا: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$
ومنه $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$.
2. لدينا حسب علاقة شال: $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}$.
بالجمع طرف لطرف نجد $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI})$
بما أن $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ لأن (I منتصف $[AB]$) فإن $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

05 جداء شعاع بعدد حقيقي

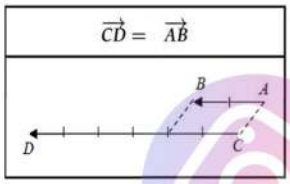
$\vec{u}$ شعاع من المستوي و k عدد حقيقي غير معدوم، جداء الشعاع $\vec{u}$ بعدد حقيقي هو الشعاع $k\vec{u}$ حيث :



★ $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه إذا كان $k > 0$

★ $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ متعاكسان في الاتجاه إذا كان $k < 0$

★ $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$



خواص

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان و k و k' عددان حقيقيان.

① $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ ② $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

③ $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$ ④ $1\vec{u} = \vec{u}$

⑤ $k\vec{u} = \vec{0}$ يكافئ [$\vec{u} = \vec{0}$ أو $k = 0$].

مثال:

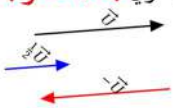
✔ $3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 3\overrightarrow{AC}$ (بتطبيق الخاصية ① ثم شال)

✔ $8\vec{u} - 10\vec{u} = (8 - 10)\vec{u} = -2\vec{u}$ (بتطبيق الخاصية ②).

✔ $\frac{3}{8} \times \left(\frac{8}{3}\vec{u}\right) = \left(\frac{3}{8} \times \frac{8}{3}\right)\vec{u} = 1\vec{u} = \vec{u}$ (بتطبيق الخاصية ③ ثم ④).

06 الإرتباط الخطي :

نقول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما مرتبطين خطيا إذا كان أحدهما يساوي جداء الآخر بعدد حقيقي. أي إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v} = k\vec{u}$.

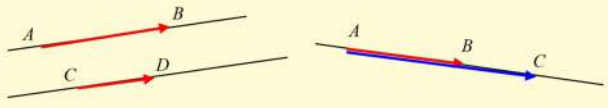


07 الإستقامية و التوازي:

مبرهنة

مبرهنة 1 : يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا.

مبرهنة 2 تكون النّقط A ، B و C في استقامية إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا.



KERROUCHE MATHS
www.dzexams.com

الأستاذ: أمين كروش

02. المعلم للمستوي

توجد أربعة أنواع من المعالم: معلم متعامد ومتجانس، معلم متعامد، معلم متجانس ومعلم كيفي.
في كل ما سيأتي نعتبر $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي.

01 مركبتي الشعاع

مبرهنة :

- من أجل كلّ شعاع $\vec{u}$ ، توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الحقيقيّة $(x;y)$ بحيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
- لتكن $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

مركبتا الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

02 تساوي شعاعين – مجموع شعاعين – جداء عدد حقيقي بشعاع:

نتائج

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ و k عدد حقيقي.

- تساوي شعاعين: $\vec{u}=\vec{v}$ يكافئ $[x=x' \text{ و } y=y']$.
- مجموع شعاعين: مركبتا المجموع $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ هما $\vec{u}+\vec{v}$
- جداء عدد بشعاع: مركبتا الشّعاع $k\vec{u}$ هما $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$

مثال :
ليكن الشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

◄ $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}4-3\\1+2\end{pmatrix}$ أي $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. ◄ $-2\vec{u}\begin{pmatrix}-2\times4\\-2\times1\end{pmatrix}$ أي $-2\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}$.

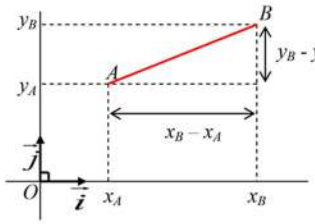
03 إحداثيتي منتصف قطعة مستقيم

$M(x;y)$ منتصف القطعة $[AB]$ فإحداثيتي النقطة M هي :

$$M\left(\frac{x_a+x_b}{2};\frac{y_a+y_b}{2}\right)$$

04 المسافة بين نقطتين

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي . و $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ نقطتان منه.



$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

01 الإرتباط الخطي لشعاعين

مبرهنة :

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
يكون الشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا كان $xy'-x'y=0$.

ملاحظة

❖ لإثبات أن شعاعين متوازيين يكفي إثبات أنهما مرتبطين خطيا أي $xy'-x'y=0$ ويمكن أن تكتب $xy'=x'y$.

مثال : ليكن الشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

✔ لدينا: $(-2)\times12-6\times(-4)=0$ ومنه الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

03. معادلة مستقيم

في كل ما سيأتي نعتبرالمستوي مزود بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$
و $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتان منه.

01 شعاع توجيه مستقيم

يسمى كل شعاع له نفس منحى مستقيم (D)، شعاع توجيه له

ملاحظات

❖ إذا كان $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه للمستقيم (D)، فكلّ شعاع غير معدوم ومرتبط خطيا بالشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (D).
❖ يعرف مستقيم بإعطاء نقطتين منه أو بإعطاء نقطة منه وأحد أشعة توجيهه.

02 معادلة مستقيم

خلاصة :

كل مستقيم من المستوي له معادلة من الشكل : $ax+by+c=0$ تسمى المعادلة الديكارتية لمستقيم حيث الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيهه.

◄ تسمى $y=\alpha x+\beta$ المعادلة المختصرة للمستقيم حيث α معامل توجيه المستقيم يحسب كالتالي : $\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

03 شرط توازي مستقيمين

◄ $(D):ax+by+c=0$ و $(D'):a'x+b'y+c'=0$ ،

$(D)\ /\!/\ (D')$ إذا و فقط إذا كان $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا.

$ab'-ba'=0$ معناه $(D)\parallel(D')$ $\quad ab'=a'b$

(يكون مستقيمان متوازيان إذا كان شعاعي توجيههما مرتبطان خطيا)

◄ $(D):y=\alpha x+\beta$ و $(D):y=\alpha' x+\beta'$

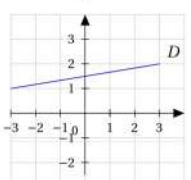
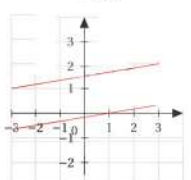
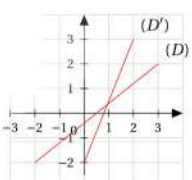
$\alpha=\alpha'$ معناه $(D)\parallel(D')$

(يكون مستقيمان متوازيان إذا كان لهما نفس معامل التوجيه)

04. جملة معادلتين خطيتين

لتكن جملة المعادلتين (S): $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$

- إذا كان $ab'-ba'\neq0$ فإنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا.
- إذا كان $ab'-ba'=0$ فالجملة (S) إمّا لا حل لها، وإمّا لانهاية لها من الحلول.

الجملة	$(S):\begin{cases}ax+by=c\cdots(1)\\a'x+b'y=c'\cdots(2)\end{cases}$		
المحدد	$ab'-ba'$		
الحلول	$ab'-ba'\neq0$	$ab'-ba'=0$	
	(S) تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^2$	(1) و (2) غير متكافئتان	(1) و (2) متكافئتان
		(S) لا تقبل حلول في $\mathbb{R}^2$	(S) تقبل مالا نهاية من الحلول في $\mathbb{R}^2$
التفسير البياني	المستقيمان (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة	المستقيمان (D) و (D') متوازيان	المستقيمان (D) و (D') منطبقان
			

www.dzexams.com

سلسلة التمارين

التمرين 01
الصعوبة: ★★★★½

A، B، C و D أربع نقط من المستوي. بين أن:

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.
2. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

التمرين 02
الصعوبة: ★★★★

A ، B و C ثلاث نقط ليست في إستقامية.

1. أنشئ النقطتين M و N المعرفتين بالعلاقة الترتيب: $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}$.
2. بين أن النقطة C منتصف $[MN]$.

التمرين 03
الصعوبة: ★★★½

1. ارسم مثلثا كيفي ABC، وعلم عليه النقطتين M و N بحيث: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$.
2. بين أن المستقيمين (CM) و (BN) متوازيان.

التمرين 04
الصعوبة: ★★★★

ABC مثلث كيفي ، أنشئ النقط D ، E ، F المعرفة كما يأتي :

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AC}$

2. بين أن الرباعي AEBD متوازي أضلاع .
3. بين أن النقط E ، A ، F في استقامية .

التمرين 05
الصعوبة: ★★★★

لتكن A ، B و C ثلاث نقط من المستوي مختلفة مثنى مثنى.

1. علم النقطة D بحيث: $\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$.
2. علم النقطة E بحيث: $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$.
3. برهن أن $AEDB$ متوازي أضلاع.
4. برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا: $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MD}$.
5. لتكن النقطة O مركز متوازي الأضلاع $AEDB$، برهن أن: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AO}$.

التمرين 06
الصعوبة: ★★★

المستوي المنسوب إلى المعلم م م $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. علم النقط $A(0;4)$ ، $B(5;3)$ ، $C(4;-2)$ و $D(-1;-1)$.
2. تحقق أن الرباعي $ABCD$ مربع.

التمرين 06
الصعوبة: ★★★

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي، و α عدد حقيقي. لتكن النقط $A(1;3)$ ، $B(-2;-3)$ ، $C(1;-1)$ و $D(3;\alpha)$.

1. احسب مركبتي كل من الأشعة التالية: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.
2. احسب مركبتي الشعاع $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$.
3. عين العدد الحقيقي α حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

التمرين 06
الصعوبة: ★★★★

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط التالية : $A(2;1), B(3;-1), C(1;-4)$.

1. أ-عين مركبتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
   ب-هل النقط A, B, C في استقامية ؟.
2. عين احداثيا منتصف $[AC]$.
3. أ-عين معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل C و $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيهه.
   ب-هل النقطة $D(0;1)$ تنتمي الى المستقيم (Δ) ؟.
4. عين معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل A و يوازي محور التراتيب.
5. عين معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يشمل A و يوازي محور الفواصل.
6. عين معامل توجيه المستقيم الذي معادلته: $5x-3y-2=0$.
7. نعتبر النقطة $E(2x;x)$ عين قيمة x التي من أجلها:
   أ-تكون النقط E, B, A على استقامة واحدة.
   ب-يكون المثلث EBA متساوي الساقين $[EA]$ و $[EB]$.
8. عين احداثيتي النقطة M بحيث: $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$
9. عين احداثيتي النقطة F بحيث يكون $ABCF$ متوازي أضلاع.
10. هل المثلث ABC قائم؟علل.

التمرين 06
الصعوبة: ★★½★★

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي .

نعتبر النقط : $A(2;1)$ ، $B(3;2)$ ، $C(0;3)$

1. علم النقط A ، B و C .
2. أحسب أطوال أضلاع المثلث ABC ثم حدد طبيعته
3. أحسب معامل توجيه المستقيم (AB) ثم أكتب معادلة له .
4. نعتبر النقطة $F(-1;\alpha)$.
   حدد قيمة α حتى تكون النقط A ، B ، F في إستقامية
5. أرسم المستقيم (T) الذي معادلته : $y=5x+3$.
6. حدد نقطة تقاطع المستقيمين (T) و (AB) بيانيا .

II- نعتبر جملة المعادلتين (S) التالية :

$$(S)\begin{cases}x-y=1\\5x-y=-3\end{cases}$$

1. تحقق أن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا .
2. حل الجملة (S) ثم فسر النتيجة هندسيا .

التمرين 06
الصعوبة: ★★★★

نريد حل جملة المعادلتين (S) التالية :

$$(S)\begin{cases}2z^2-t^2=-1\\3z^2+t^2=21\end{cases}$$

1. بوضع $z^2=x$ و $t^2=y$ أكتب جملة معادلتين (S') تكافئ الجملة (S) .
   ب- حل جملة المعادلتين (S') .
2. إستنتج حلول الجملة (S) .

www.dzexams.com