



الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين

(I)  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$

(1) ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر  $a$  حيث  $1,59 < a < 1,60$

(3) عين، حسب قيم  $x$ ، إشارة  $g(x)$

(II)  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) بين أن  $(C_f)$  يقبل عند  $-\infty$  و  $+\infty$  مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب  $y = -1$  و  $y = 0$

(2) (أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$

(ب) استنتج إشارة  $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

(ج) احسب  $f(1)$ ، ثم استنتج، حسب قيم  $x$ ، إشارة  $f(x)$

(3) (أ) بين أن  $f(a) = -1 + \frac{1}{a-1}$ ، حيث  $a$  هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء I

(ب) استنتج حصر العدد  $f(a)$  (تدور النتائج إلى  $10^{-2}$ )

(ج) ارسم  $(C_f)$ .

(4) عين قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، حتى تقبل المعادلة  $(e^x - 2x)(m+1) = 2x - 2$  حلين مختلفين في الإشارة.

(5)  $h$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = [f(x)]^2$

(أ) احسب  $h'(x)$  بدلالة كل من  $f(x)$  و  $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة  $h'(x)$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة  $h$ .

## تصحيح الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

## حل التمرين

(I)  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$ (1) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  :الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل  $x \in \mathbb{R}$  :  $g'(x) = (-2)(e^x) + (e^x)(4 - 2x) = e^x(-2 + 4 - 2x) = e^x(2 - 2x)$ إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $(2 - 2x)$  لأن  $e^x > 0$ ومنه الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; 1]$ ومتناقصة تماما على المجال  $[1; +\infty[$ 

✓ تشكيل جدول تغيراتها:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 + (4 - 2x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 + 4e^x - 2xe^x = -4$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 2x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4 + (4 - 2x)e^x = -\infty$$

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$       | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $+$       | $0$       | $-$       |
| $g(x)$  | $-4$      | $-4 + 2e$ | $-\infty$ |

(2) تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  حيث  $1,59 < \alpha < 1,60$  :على المجال  $]-\infty; 1]$  الدالة  $g$  مستمرة ومتزايدة تماما و  $g(0) = 0$  ومنه المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حل معدوم.على المجال  $[1; +\infty[$  الدالة  $g$  مستمرة ومتناقصة تماما وبالأخص على المجال  $[1,59; 1,60]$  و  $g(1,59) \simeq 0,2$  و  $g(1,60) \simeq -0,03$ ومنه  $g(1,59) \times g(1,60) < 0$  إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة  $g(x) = 0$  حل وحيد  $\alpha$  حيث  $1,59 < \alpha < 1,60$ (3) تعين ، حسب قيم  $x$  ، إشارة  $g(x)$  : من جدول التغيرات

|        |           |     |          |           |
|--------|-----------|-----|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | $-$       | $0$ | $+$      | $-$       |

(II)  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) تبين أن  $(C_f)$  يقبل عند  $-\infty$  و  $+\infty$  مستقيمين مقارئين معادلتها على الترتيب  $y = -1$  و  $y = 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2} = -1$$

$(C_f)$  يقبل عند  $-\infty$  مستقيم مقارب معادلته  $y = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2} = 0$$

$(C_f)$  يقبل عند  $+\infty$  مستقيم مقارب معادلته  $y = 0$

(2) أ) برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$

الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{2(e^x-2x) - (e^x-2)(2x-2)}{(e^x-2x)^2} = \frac{2e^x-4x-2xe^x+2e^x+4x-4}{(e^x-2x)^2} = \frac{(4-2x)e^x-4}{(e^x-2x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$$

ب) استنتاج إشارة  $f'(x)$ :

|         |           |     |     |           |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $a$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$ | $+$ | $-$       |

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  لأن  $(e^x-2x)^2 > 0$  ومنه

✓ تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$ :

|         |           |      |        |           |
|---------|-----------|------|--------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$  | $a$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$    | $-$       |
| $f(x)$  | $-1$      | $-2$ | $f(a)$ | $0$       |

|        |           |     |           |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |

(3) حساب  $f(1)$ ، ثم استنتاج، حسب قيم  $x$ ، إشارة  $f(x)$ :  $f(1) = 0$

(4) أ) تبيين أن  $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$  حيث  $\alpha$  هو العدد المعروف في السؤال 2 من الجزء I :

$$\text{بتعويض (2) في (1) نجد} \quad \begin{cases} f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha} \dots\dots\dots (1) \\ e^\alpha = \frac{4}{4-2\alpha} \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha} \\ -4 + (4-2\alpha)e^\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha} \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{\frac{4}{4-2\alpha}-2\alpha} = \frac{2\alpha-2}{\frac{4\alpha^2-8\alpha+4}{4-2\alpha}} = (2\alpha-2) \left( \frac{4-2\alpha}{4\alpha^2-8\alpha+4} \right) = \frac{(2\alpha-2)(4-2\alpha)}{(2\alpha-2)^2} = \frac{(4-2\alpha)}{(2\alpha-2)} = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

ب) استنتاج حصر العدد  $f(\alpha)$  ( تدور النتائج إلى  $10^{-2}$  ) :

$$\text{لدينا } 1,59 < \alpha < 1,60 \text{ يكافئ } 0,59 < \alpha-1 < 0,60 \text{ يكافئ } \frac{1}{0,60} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,59} \text{ يكافئ } -1 + \frac{1}{0,60} < -1 + \frac{1}{\alpha-1} < -1 + \frac{1}{0,59}$$

$$\text{ومنه } 0,67 < f(\alpha) < 0,69$$

ج) ارسم  $(C_f)$  . في آخر الصفحة

(5) تعيين قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ، حتى تقبل المعادلة  $2x-2 = (e^x-2x)(m+1)$  حلين مختلفين في الإشارة :

$$2x-2 = (e^x-2x)(m+1) \text{ يكافئ } \frac{2x-2}{e^x-2x} = m+1 \text{ يكافئ } f(x) = m+1 \text{ ومنه عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط}$$

تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = m+1$

$$\text{لما } m+1 \in ]-2; -1[ \text{ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة في } \mathbb{R} \text{ أي من أجل } m \in ]-3; -2[$$

(6)  $h$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = [f(x)]^2$

أ) حساب  $h'(x)$  بدلالة كل من  $f(x)$  و  $f'(x)$  ، ثم استنتاج إشارة  $h'(x)$  :

الدالة  $h$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل  $x \in \mathbb{R}$   $h'(x) = 2f'(x)f(x)$

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----|----------|-----------|
| $f'(x)$ | $-$       | $0$ | $+$ | $0$      | $-$       |
| $f(x)$  | $-$       |     | $0$ | $+$      |           |
| $h'(x)$ | $+$       | $0$ | $-$ | $0$      | $+$       |

|         |                                                             |     |     |          |           |
|---------|-------------------------------------------------------------|-----|-----|----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                   | $0$ | $1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | $+$                                                         | $0$ | $-$ | $0$      | $+$       |
| $h(x)$  | $1 \nearrow 4 \searrow 0 \nearrow [f(\alpha)]^2 \searrow 0$ |     |     |          |           |

✓ تشكيل جدول تغيرات الدالة  $h$ :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]^2 = 1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^2 = 0$$

