



$$a = 1; a = 0 . f(x) = \frac{3}{x+1} . 2$$

$$a = 2 . f(x) = x^2 + 4x + 4 . 3$$

$$a = 0 . f(x) = 1 + \frac{5}{1-2x} . 4$$

التمرين الأول :

أحسب العدد المشتق $f'(a)$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$a = -1; a = 3 . f(x) = x^2 + 1 . 1$$

التمرين الثاني : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ينسب المستوي لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وليكن (C_f) المنحني الممثل للدالة f .

1. أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0 = 2$ واستنتج $f'(2)$.

2. عين معادلة المماس (Γ) للمنحني (C_f) عند النقطة A التي فصلتها 2.

✓ أدرس قابلية الاشتقاق لدالة f عند $x_0 = 1$ أعط تفسيراً بيانياً لهذه النتيجة .

التمرين الثالث : لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x+1} & ; x > 1 \\ \sqrt{x^2+3} & ; x \leq 1 \end{cases}$$

التمرين الرابع :

أحسب مشتق الدالة في كل حالة من

الحالات التالية و حدد D_f .

$$D_f = \mathbb{R} . f(x) = x^3 - 4x + 5 . 1$$

$$D_f = \mathbb{R} . f(x) = (x^2 - 1)^3 . 2$$

$$D_f = \mathbb{R} . f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 3x + 4} . 3$$

التمرين الخامس : لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + 2} : \text{بـ}$$

• عين العددين الحقيقيين $\beta; \alpha$ بحيث يقبل المنحني الممثل

للدالة f مماس معامل توجيهه $\frac{2}{3}$ عند النقطة $A(1; -3)$.

التمرين السادس : لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$$

• عين العددين الحقيقيين $a; b$ و c بحيث يشمل المنحني

الممثل للدالة f النقطة $(0; 3)$ و يقبل مماس عند $(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8})$

موازيًا لحامل محور الفواصل .

$$D_f = \mathbb{R} . f(x) = (3x - 6)^3 . 7$$

$$D_f = \mathbb{R} . f(x) = (x^2 + x)\sqrt{x^2 + 1} . 8$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} . f(x) = \frac{x^3 + 4x^2}{(x+1)^2} . 9$$

$$D_f = \mathbb{R} . f(x) = \sqrt{2 + \cos 2x} . 10$$

$$D_f = \mathbb{R} . f(x) = |x^2 + 4x - 5| . 11$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 5}{2x + 1} . 4$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} . f(x) = \frac{4}{(2x+3)^2} . 5$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3} . 6$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

التمرين السابع : لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x - 3} : \text{بـ}$$

في معلم متعامد ومتجانس.

1. بين أن f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

2. بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين ميل كل منهما -4 ثم عين

النقطتين الموافقتين لذلك و لتكن $B; A$.

3. أكتب عندئذ معادلة كل مماس عند كل نقطة .

4. عين نقطتين $D; C$ من (C_f) بحيث يقبل عندها (C_f) مماساً

يشمل النقطة $(-3; \frac{4}{25})$.

حلول سلسلة الشفافية وطيفها

التمرين الأول: حساب العدد المشتق $f'(a)$ للدالة f في كل حالة:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad a = 3 ; \quad a = -1 \quad 1$$

من أجل $a = 3$ ✓

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{x^2+1-10}{x-3} = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6 \text{ ومنه}$$

إذن قابلية للاشتقاق عند $a = 3$ وعددها المشتق: $f'(3) = 6$

من أجل $a = -1$ ✓

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{x^2+1-2}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2 \text{ ومنه}$$

إذن قابلية للاشتقاق عند $a = -1$ وعددها المشتق: $f'(-1) = -2$

$$f(x) = \frac{3}{x+1} \quad a = 1 ; \quad a = 0 \quad 2$$

من أجل $a = 0$ ✓

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{3}{x+1}-3}{x} = \frac{\frac{3-3(x+1)}{x+1}}{x} = \frac{\frac{-3x}{x+1}}{x} = \frac{-3}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{x+1} = -3 \text{ ومنه}$$

إذن قابلية للاشتقاق عند $a = 0$ وعددها المشتق: $f'(0) = -3$

من أجل $a = 1$ ✓

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{3}{x+1}-\frac{3}{2}}{x-1} = \frac{\frac{6-3(x+1)}{2(x+1)}}{x-1} = \frac{\frac{-3x+3}{2(x+1)}}{x-1} = \frac{-3}{2(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3}{2(x+1)} = -\frac{3}{4} \text{ ومنه}$$

إذن قابلية للاشتقاق عند $a = 1$ وعددها المشتق: $f'(1) = -\frac{3}{4}$

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 \quad a = 2 \quad 3$$

من أجل $a = 2$ ✓

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^2+4x+4-16}{x-2} = \frac{x^2+4x-12}{x-2} = \frac{(x+6)(x-2)}{x-2} = x+6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+6) = 8 \text{ ومنه}$$

إذن قابلية للاشتقاق عند $a = 2$ وعددها المشتق: $f'(2) = 8$

$$f(x) = 1 + \frac{5}{1-2x} \quad a = 0 \quad 4$$

من أجل $a = 0$ ✓

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1+\frac{5}{1-2x}-6}{x} = \frac{\frac{5-5(1-2x)}{1-2x}}{x} = \frac{\frac{10x}{1-2x}}{x} = \frac{10}{1-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10}{1-2x} = 10 \text{ ومنه}$$

إذن قابلية للاشتقاق عند $a = 0$ وعددها المشتق: $f'(0) = 10$

حلول سلسلة الاشتقاقية وتطبيقاتها

التمرين الثاني:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad D_f = \mathbb{R} \text{ لدينا}$$

أثبت أن الدالة قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0 = 2$ واستنتاج $f'(2)$

من أجل $a = 2$: ☒

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^2-2x+1-1}{x-2} = \frac{x^2-2x}{x-2} = \frac{x(x-2)}{x-2} = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x) = 2 \text{ ومنه}$$

إذن قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$ وعددها المشتق: $f'(2) = 2$

تعيين معادلة المماس (Γ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 2

نعلم أن معادلة المماس من الشكل: $(\Gamma): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$\text{ومنه } (\Gamma): y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$\text{ومنه } (\Gamma): y = 2(x - 2) + 1$$

$$\text{إذن } (\Gamma): y = 2x - 3$$

التمرين الثالث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x+1} & ; x > 1 \\ \sqrt{x^2+3} & ; x \leq 1 \end{cases} \text{ لدينا}$$

دراسة قابلية الاشتقاق لدالة عند $x_0 = 1$ إعطاء تفسير بياني لنتيجة: ☒

من أجل $x > 1$: ☒

$$\text{من أجل } x > 1 : \frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \frac{\frac{x^2+3}{x+1}-2}{x-1} = \frac{\frac{x^2+3-2(x+1)}{x+1}}{x-1} = \frac{\frac{x^2-2x+1}{x+1}}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x+1} = 0 \text{ ومنه}$$

من أجل $x < 1$: ☒

$$\text{من أجل } x < 1 : \frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{2} \text{ ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \text{ بما أن}$$

إذن غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

التفسير البياني:

منحنى الدالة يقبل نصف مماسين عند النقطة ذات الفاصلة معامل كل منهما 0 و1

حلول سلسلة الاشتقاقية وتطبيقاتها

التمرين الرابع: حساب الدالة المشتقة في كل حالة:

1. لدينا $f(x) = x^3 - 4x + 1$ $D_f = \mathbb{R}$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

2. لدينا $f(x) = (x^2 - 1)^3$ $D_f = \mathbb{R}$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = 3(2x)(x^2 - 1)^2 = 6x(x^2 - 1)^2$$

3. لدينا $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4}$ $D_f = \mathbb{R}$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4} = \frac{(2x+3)(x^2+3x+4) - (2x+3)(x^2+3x-4)}{(x^2+3x+4)^2} = \frac{8(2x+3)}{(x^2+3x+4)^2}$$

4. لدينا $f(x) = \frac{3x^2+4x-5}{2x+1}$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

قابلة للاشتقاق على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\cup]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{3x^2+4x-5}{2x+1} = \frac{(6x+4)(2x+1) - 2(3x^2+4x-5)}{(2x+1)^2} = \frac{6x^2+6x+14}{(x^2+3x+4)^2}$$

5. لدينا $f(x) = \frac{4}{(2x+3)^2}$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

قابلة للاشتقاق على $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[\cup]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{0-4(2)(2)(2x+3)}{((2x+3)^2)^2} = \frac{-8(2x+3)}{(2x+3)^4}$$

6. لدينا $f(x) = \frac{x^2-8x+16}{x-3}$ $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{(2x-8)(x-3) - 1(x^2-8x+16)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

7. لدينا $f(x) = (3x - 6)^3$ $D_f = \mathbb{R}$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = 3(3)(3x - 6)^2 = 9(3x - 6)^2$$

8. لدينا $f(x) = (x^2 + x)\sqrt{x^2 + 1}$ $D_f = \mathbb{R}$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = (2x + 1)\sqrt{x^2 + 1} + (x^2 + x) \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

9. لدينا $f(x) = \frac{x^3+4x^2}{(x+1)^2}$ $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{(3x^2+8x)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+4x^2)}{((x+1)^2)^2} = \frac{x(x+1)(x^2+3x+8)}{(x+1)^4}$$

10. لدينا $f(x) = \sqrt{2 + \cos(2x)}$ $D_f = \mathbb{R}$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{2+2(-\sin(2x))}{2\sqrt{2+\cos(2x)}} = \frac{1-\sin(2x)}{2\sqrt{2+\cos(2x)}}$$

حلول سلسلة الاشتقاقية وتطبيقاتها

$$f(x) = |x^2 + 4x - 5| \quad \text{لدينا } D_f = \mathbb{R}$$

كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 5 & ; x \in]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[\\ -(x^2 + 4x - 5) & ; x \in [-5; 1] \end{cases}$$

قابلية للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & ; x \in]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[\\ -(2x + 4) & ; x \in [-5; 1] \end{cases}$$

التمرين الخامس:

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x+2} \quad \text{لدينا } D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

✓ **تعيين العددين الحقيقيين α و β :**

نعلم أن f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; -2[$ و $] -2; +\infty[$ ودلتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{(2x+\alpha)(x+2) - (x^2 + \alpha x + \beta)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 2\alpha - \beta}{(x+2)^2}$$

المنحنى الممثل للدالة f يقبل مماس معامل توجيهه $\frac{2}{3}$ عند النقطة $A(1; -3)$

$$\begin{cases} f(1) = \frac{1+\alpha+\beta}{3} \\ f'(1) = \frac{5+2\alpha-\beta}{9} \end{cases} \text{ أي أن } \begin{cases} f(1) = -3 \\ f'(1) = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ هذا يعني أن}$$

$$\begin{cases} 1 + \alpha + \beta = -9 \\ 5 + 2\alpha - \beta = 6 \end{cases} \text{ وبالتالي } \begin{cases} \frac{1+\alpha+\beta}{3} = -3 \\ \frac{5+2\alpha-\beta}{9} = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$\begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -7 \end{cases} \text{ أي أن } \begin{cases} \alpha + \beta = -10 \\ 2\alpha - \beta = 1 \end{cases} \text{ بعد الحساب}$$

التمرين السادس:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{لدينا } D_f = \mathbb{R}$$

✓ **تعيين العددين a و b و c :**

نعلم أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة: $f'(x) = 2ax + b$

منحنى الدالة يشمل النقطة $A(0; 3)$ ويقبل مماس عند $B\left(\frac{5}{4}; \frac{-1}{8}\right)$ موازيا لحوال محور الفواصل

$$f(0) = c \quad f(0) = 3$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = a\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{4}b + c \quad \text{أي أن } f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{-1}{8} \text{ هذا يعني أن}$$

$$f'\left(\frac{5}{4}\right) = 2a\frac{5}{4} + b = \frac{5}{2}a + b \quad f'\left(\frac{5}{4}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{25}{16}a + \frac{5}{4}b + 3 = \frac{-1}{8} \\ \frac{5}{2}a + b = 0 \end{cases} \text{ وبالتالي } \begin{cases} c = 3 \\ \frac{25}{16}a + \frac{5}{4}b + c = \frac{-1}{8} \\ \frac{5}{2}a + b = 0 \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases} \text{ بعد الحساب}$$