# مجلة Top Maths

# 1As

## تتمحور حول دروس

- ✓ الهندسة المستوية
- ✓ الهندسة في الفضاء
- ✓ الاحصاء

الاستاذ بوشناق يوسف

- ❖ الهندسة المستوية
- ❖ الهندسة في الفضاء
- ❖ الاحصاء

تتضمن

- ✓ دروس مفصلة
- ✓ امثلة
- ✓ تمارين مع الحلول
- ✓ تمارين نموذجية
- ✓ نموذج امتحان مع حل مقترح

Top Maths Tlemcen

افريل 2020

www.dzexams.com



السلام عليكم

اقدم لكم اخواني الاساتذة وابنائي الطلبة هذا العمل و المتمثل في تجميعية الفصل الثالث للسنة الاولى علمي الذي يتضمن دروس :

- ✓ الهندسة المستوية
- ✓ الهندسة في الفضاء
- ✓ الاحصاء
- ✓ نموذج امتحان مع حل مقترح

» رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِي مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِي مِنْ تَأْوِيلِ الأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضِ أَنْتَ وَلِيِّي فِي الدُّنْيَا وَالآخِرَةِ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِي بِالصَّالِحِينَ «

لا تنسونا بالدعاء محبكم في الله الاستاذ بوشناق يوسف

www.dzexams.com

# الهندسة المستوية



www.dzexams.com

# متوازي الأضلاع:

## نشاط :

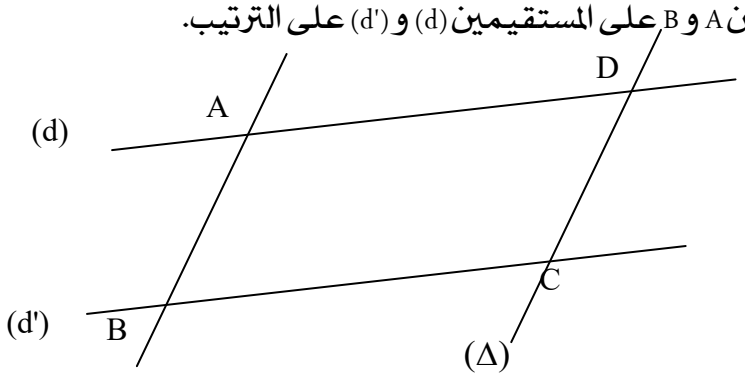
أرسم مستقيمين متوازيين تماما (d) و (d') ، علم النقطتين A و B على المستقيمين (d) و (d') على الترتيب.

أرسم مستقيم (Δ) يوازي تماما المستقيم (AB) .

المستقيم (Δ) يقطع (d) و (d') في النقطتين

D و C على الترتيب.

ما هي طبيعة الرباعي ABCD




## حل النشاط:

لدينا : (BC) // (AD) و (AB) // (CD)

إذن : الرباعي ABCD هو متوازي الأضلاع.

**التعريف :**

متوازي الأضلاع هو رباعي حاملا كلّ ضلعين متقابلين فيه ، متوازيين .

ABCD متوازي الأضلاع معناه [(CD) // (AB) و (BC) // (AD)]

## نشاط 2 :

أ) علم على ورقة غير مسطرة ثلاث نقط A ، B ، O ليست في استقامية.

ب) أنشئ النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج) ما هي طبيعة الرباعي ABCD ؟

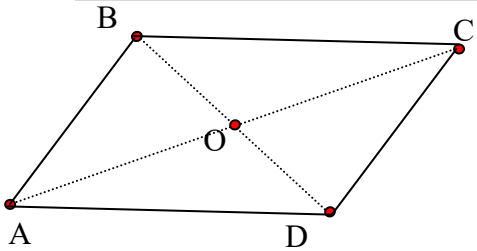
د) تحقق أن :

1. القطعتين [AC] و [BD] متناصفتين .
2. كل ضلعين متقابلين متقايسان .
3. كل زاويتين متقابلتين متقايستيان .

ه) علم النقط A' ، B' ، C' ، D' من [AB] و [BC] و [CD] و [DA] على الترتيب حيث النقط A' ، B' ، C' ، D' لا تنتمي إلى أضلاع الرباعي ABCD و BA' = CB' = DC' = AD'

و) ما نوع الرباعي A'B'C'D' ؟ (إرشاد : يمكن البدء بنوع كلّ من الرباعيين A'CC'A و D'BB'D ).

## حل النشاط 2 :




أ. تعليم النقط : A ، B ، O ليست في استقامية.

ب. إنشاء النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج. طبيعة الرباعي ABCD

لدينا المستقيمان (AB) و (DC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

وكذلك المستقيمان (AD) و (BC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان



www.dzexams.com

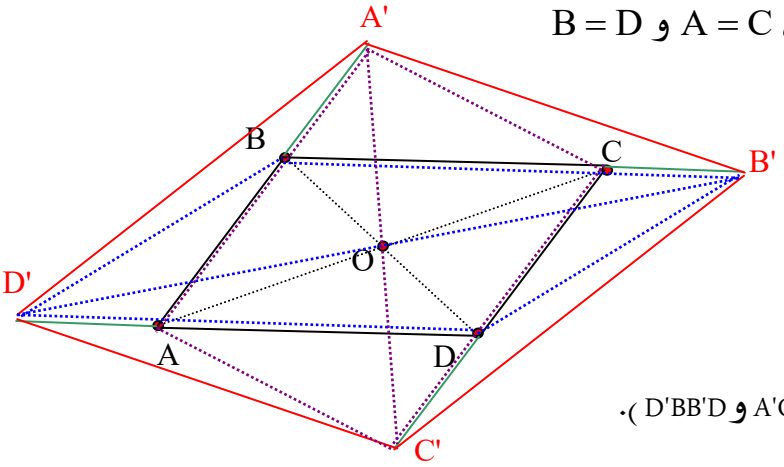
وبالتالي الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

د. التحقيق

1) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن قطراه [AC] و [BD] متناصفين

2) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن AB = CD و BC = AD

3) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$




ه. تعليم النقط A' ، B' ، C' ، D' من [AB] و [BC] و [CD] و [DA] على الترتيب حيث النقط A' ، B' ، C' ، D' لا تنتمي إلى أضلاع الرباعي ABCD

و BA' = CB' = DC' = AD' ؟

و) ما نوع الرباعي A'B'C'D' ؟

(إرشاد : يمكن البدء بنوع كلّ من الرباعيين A'CC'A و D'BB'D ).

لدينا : (AB) // (CD) ومنه (AA') // (CC')

ولدينا : AB = CD و BA' = DC' إذن AA' = CC' وبالتالي الرباعي A'CC'A متوازي أضلاع

إذن قطراه [A'C'] و [AC] لهما نفس المنتصف O .

لدينا : (AD) // (BC) ومنه (BB') // (D'D)

ولدينا : AD =BC و AD' = CB' إذن DD' = BB' وبالتالي الرباعي D'BB'D متوازي أضلاع

إذن قطراه [D'B'] و [BD] لهما نفس المنتصف O .

ولدينا : القطران [AC] و [BD] للمتوازي الأضلاع ABCD لهما نفس المنتصف O

إذن : القطعتان [A'C'] و [D'B'] لهما نفس المنتصف O وبالتالي الرباعي A'B'C'D' هو متوازي أضلاع.

خواص :

من أجل كل رباعي ABCD :

1) [AC] و [BD] متناصفان معناه ABCD متوازي الأضلاع .

2) [ AB =DC و AD = BC ] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

3) [ AB =DC و (AB)//(DC) ] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

4) [ $\hat{ABC} = \hat{ADC}$ و $\hat{BAD} = \hat{BCD}$ ] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

## نشاط 3 :

1) أنشئ باستعمال المدور والمسطرة فقط متوازي أضلاع قطراه متعامدان، تحقق أن أضلاعه متقايسة، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟

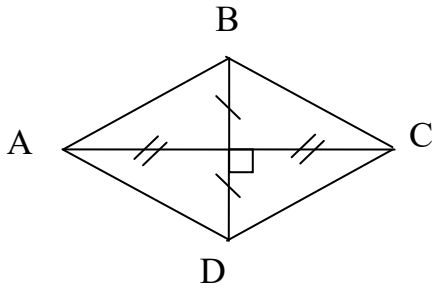
2) أنشئ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة ، بين أن كل زواياه قائمة ، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟ متى يكون مربعا ؟

## حل النشاط :



www.dzexams.com

1) إنشاء متوازي أضلاع قطراه متعامدان




ABCD متوازي أضلاع إذن [AC] و [BD] متناصفتان

ولدينا قطراه متعامدان إذن (BD) هو محور القطعة [AC]

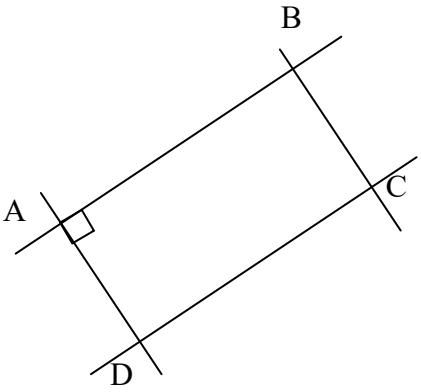
و(AC) هو محور القطعة [BD]

وبالتالي المثلث ABD متساوي الساقين AB = AD

بما أن ABCD متوازي أضلاع فإن : AB =BC = CD = DA

متوازي أضلاع ABCD يسمى معين .

2) إنشاء متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة




ABCD متوازي أضلاع إذن (DC) // (AB) و(AD) // (BC)

متوازي أضلاع ABCD إحدى زواياه قائمة إذن(AD) ⊥ (AB)

ومن التوازي نستنتج أن (BC) ⊥ (AB) و(BC) ⊥ (CD)

و(AD) ⊥ (CD)

في هذه الحالة متوازي أضلاع ABCD يسمى مستطيل.

وإذا كان ضلعان متتاليان منه متقايسان فإن ABCD يكون مربعا .

## متوازيات الأضلاع الخاصة :

**المعين :**

هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان .

- ✓ ABCD معين معناه [AC] ، [BD] متناصفان و (AC) ⊥ (BD)
- ✓ ABCD معين معناه [ AB = BC = CD = DA ]
- ✓ إذا كان ABCD معينا فإن (AC) ينصف كلا من الزاويتين $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ و (BD) ينصف كلا من الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ADC}$ [

**المستطيل :**

هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة .

- ✓ ABCD مستطيل معناه [ $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=\widehat{D}=90^\circ$ ]
- ✓ ABCD مستطيل معناه [AC] ، [BD] متناصفان و [ AC = BD ]

**المربع :**

هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة.

- ✓ ABCD مربع معناه [ $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=\widehat{D}=90^\circ$ و [ AB = BC = CD = DA ]
- ✓ ABCD مربع معناه [ AC = BD و (AC) ⊥ (BD) و [AC] ، [BD] متناصفان [

**التمرين الاول :**

ABCD متوازي أضلاع حيث AD ≠ AB .



www.dzexams.com

أ) النقطتان A' و C' هما المسقطان العموديان للنقطتين A و C على (BD) على الترتيب.

بين أن AA'CC' متوازي أضلاع.

ب) M نقطة من [BC'] و N نقطة من القطعة [A'D] حيث: BM = DN

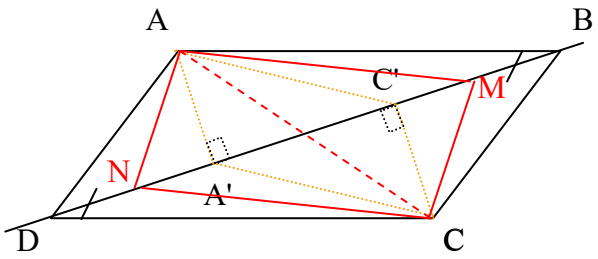
ما هي طبيعة الرباعي AMCN .

حل التمرين :

أ) نقارن بين المثلثين القائمين ADA' و BCC' نجد AA' = CC'

ولدينا (CC') // (AA') لأنهما عموديين على نفس المستقيم (BD)

وبالتالي : AA'CC' متوازي أضلاع.




ب) نسمي O منتصف كل من [AC] و [BD]

ولدينا : BM = DN إذن O منتصف كل من [AC] و [MN]

إذن الرباعي AMCN متوازي أضلاع .



www.dzexams.com

# المثلثات والمستقيمات الخاصة:

**نشاط :**

أرسم دائرة مركزها A ، علم على هذه الدائرة النقط B ، C ، D حيث

AB = BC و D نظيرة B بالنسبة إلى النقطة A .

ما هي طبيعة كل من المثلثات : ACD ، ABC ، BCD

عين القياسين التاليين : $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCD}$ .

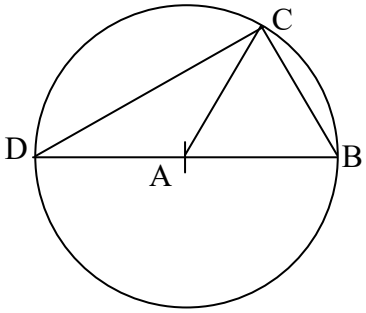
**حل النشاط :**

المثلث ACD متساوي الساقين ، AC = AD نصفي قطر الدائرة

المثلث ABC متقايس الأضلاع ، AC = AB = BC .

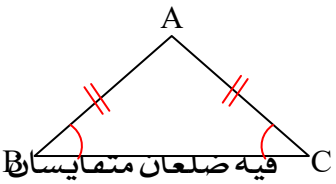
المثلث BCD قائم في C .

$\widehat{BAC} = 60^\circ$ و $\widehat{BCD} = 90^\circ$




## المثلثات الخاصة :

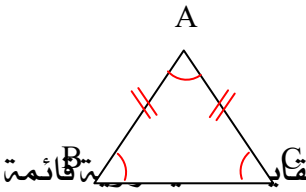
**المثلث متساوي الساقين**




فيه ضلعان متقايسان

$A\hat{B}C = A\hat{C}B$

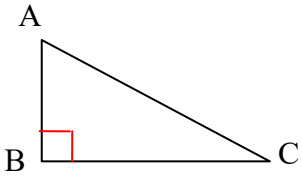
**المثلث متقايس الأضلاع**




أضلاعه متقايسة

$A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}C = 60^\circ$

**المثلث القائم**




قائمة

$A\hat{B}C = 90^\circ$

## المستقيمات الخاصة في مثلث :

**نشاط :**

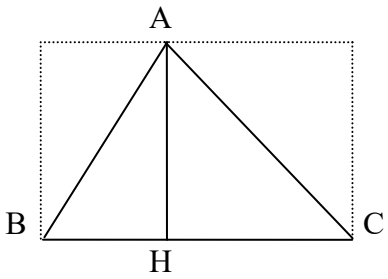
ABC مثلث كيفي و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

أحسب مساحة لكل من المثلثين ABH و ACH . ما هي مساحة المثلث ABC ؟



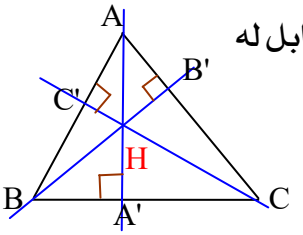
www.dzexams.com

## حل النشاط :




$s(ACH)=\frac{1}{2}AH.HC$ ، $s(ABH)=\frac{1}{2}AH.HB$

لدينا : BH + CH = BC ومنه : $s(ABC)=\frac{1}{2}AH.BC$




- ✓ الارتفاع في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد حامل الضلع المقابل له
- ✓ ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة

مساحة مثلث : $s(ABC)=\frac{1}{2}AA'.BC$ ، $s(ABC)=\frac{1}{2}BB'.AC$ ، $s(ABC)=\frac{1}{2}CC'.AB$

## نشاط:

أرسم مثلثا كيفيا ABC ، و $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ محورا الضلعين [BC] و [AB] على الترتيب يتقاطعان في النقطة M .

أ) بين أن محور الضلع [AC] يشمل النقطة M .

ب) عين مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C ، وارسمها.

ج) عين موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A .

د) أين تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية .

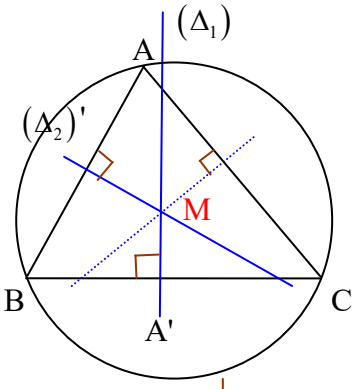
## حل النشاط :

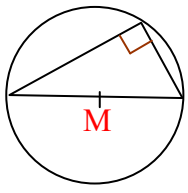
لدينا $(\Delta_1)$ محور [BC] إذن : MB = MC

لدينا $(\Delta_2)$ محور [AB] إذن : MA = MB

ومنه : MA = MC معناه أن M هي نقطة من محور القطعة [AC] .

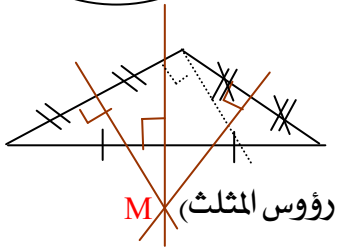
لدينا MA = MB = MC وبالتالي مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C هو النقطة M .




موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC **قائما** في A هو منتصف القطعة [BC]

تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية ، خارج المثلث .




- ✓ المحور هو محور أحد أضاعه.
- ✓ محاور مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
- ✓ نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة به (التي تشمل رؤوس المثلث)



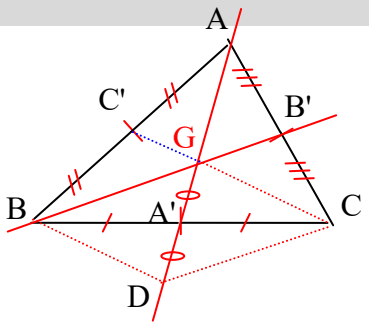
www.dzexams.com

## نشاط :

ABC مثلث كيفي ، A' ، B' ، C' منتصفات القطع [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

1. ماذا نسمي المستقيمين (AA') و (BB') في المثلث ABC ؟
2. المستقيمان (AA') و (BB') يتقاطعان في النقطة G ، أرسم النقطة D نظيرة النقطة G بالنسبة إلى A' .
3. ما هي طبيعة الرباعي BDCG ؟
4. استنتج DC = 2 GB' وأن النقطة G هي منتصف القطعة [AD] و (GC') // (BD) .
5. بين أن النقط C ، G ، C' في استقامية .
6. بين أن AG = 2 GA' و BG = 2 GB' و CG = 2 GC' .

## حل النشاط:




نسمي المستقيمين (AA') و (BB') المتوسطان في المثلث ABC .

القطعتان [BC] و [GD] متناصفتان إذن الرباعي BDCG متوازي أضلاع .

لدينا في المثلث ACD ، (GB') // (DC) ومنه حسب مبرهنة طاليس

$\frac{AB'}{AC}=\frac{AG}{AD}=\frac{GB'}{DC}$ ولدينا B' منتصف القطعة [AC] إذن : $\frac{AB'}{AC}=\frac{1}{2}$

إذن DC = 2 GB' و AD = 2 AG ومنه النقطة G هي منتصف القطعة [AD] .

في المثلث ABD ، النقطة G منتصف القطعة [AD] و C' منتصف القطعة [AB] إذن : (GC') // (BD) .

الرباعي BDCG متوازي أضلاع إذن (GC) // (BD) ولدينا (GC') // (BD) إذن (GC') // (GC)

وهذان المستقيمان لهما نقطة مشتركة G إذن النقط C ، G ، C' في استقامية .

لدينا : AG = GD و GD = 2 GA' إذن AG = 2 GA'

لدينا : BG = DC و DC = 2 GB' إذن BG = 2 GB'

في المثلث ABD ، (GC') // (BD) ومنه $\frac{AC'}{AB}=\frac{AG}{AD}=\frac{GC'}{BD}=\frac{1}{2}$ ، ومنه : BD = 2 GC'

بما أن BD = GC فإن : GC = 2 GC'

- ✓ المتوسط في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له.
- ✓ متوسطات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة هي مركز ثقله .
- ✓ (AA') و (BB') و (CC') متوسطات المثلث ABC و G مركز ثقله لدينا :
- ✓ AG = 2 GA' و BG = 2 GB' و CG = 2 GC' .

## نشاط

ABC مثلث كيفي ، المنصفان الداخليان لزاويتي الرأسين A و B يتقاطعان في النقطة S .

أ) النقط A' ، B' ، C' المساقط العمودية للنقطة S على المستقيمات (BC) ، (AC) ، (AB) على الترتيب .

بين SA' = SB' = SC'

ب) بين أن المنصف الداخلي لزاوية الرأس C يشمل النقطة S .

ج) عين مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث ABC من الداخل وارسمها .



www.dzexams.com

## حل النشاط :

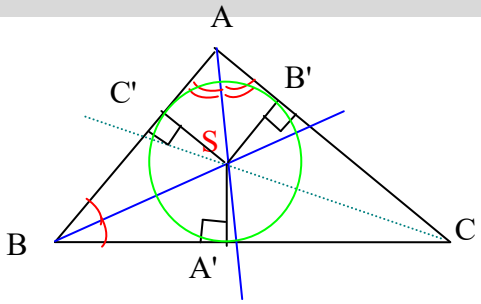
أ) نقارن بين المثلثين القائمين ASB' و ASC' لدينا

SA وتر مشترك ، $\widehat{SAB'} = \widehat{SAC'}$ إذن : SB' = SC' .

نقارن بين المثلثين القائمين BSA' و BSC' لدينا

SB وتر مشترك ، $\widehat{SBA'} = \widehat{SBC'}$ إذن : SA' = SC' .

وبالتالي : SA' = SB' = SC'




ب) نقارن بين المثلثين القائمين CSB' و A'SC لدينا SC وتر مشترك ، SA' = SB' إذن $\widehat{SCB'} = \widehat{SCA'}$

وبالتالي (SC) هو المنصف الداخلي للزاوية ذات الرأس C .

ج) لدينا : SA' = SB' = SC' إذن S هي مركز الدائرة التي تشمل النقط A' ، B' ، C' .

بما أن $(SA') \perp (BC)$ و $(SB') \perp (AC)$ و $(SC') \perp (BA)$

إذن (BC) و(AC) و(BA) هي مماسات لهذه الدائرة .

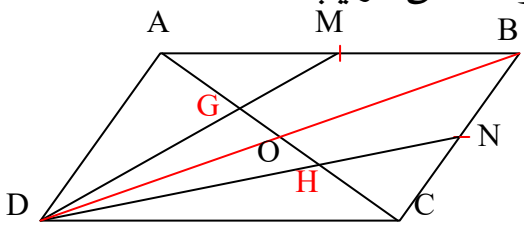
- ✓ المنصف في مثلث هو منصف إحدى زواياه .
- ✓ المنصفات الداخلية في مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
- ✓ نقطة تقاطع المنصفات هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (أي التي تمس أضلاع المثلث من الداخل) .

## التمرين الثاني :

ABCD متوازي الأضلاع ، النقطتان M و N منتصفا القطعتين [AB] و [BC] على الترتيب.

[DM] و [DN] يقطعان [AC] في النقطتين G و H على الترتيب.

بين أن : AG = GH = HC .




## حل التمرين :

القطران [AC] و [BD] متناصفان في النقطة O .

في المثلث ABD لدينا (AO) و (DM) متوسطان يتقاطعان في النقطة G ومنه AG = 2 GO .

في المثلث CBD لدينا (CO) و (DN) متوسطان يتقاطعان في النقطة H ومنه HC = 2HO .

ومنه : OC = 3 HO و OA = 3 OG إذن $OG = OH = \frac{1}{2}GH$ ومنه : AG =GH = HC

## التمرين الثالث :

$(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ ، $(\Delta_3)$ ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة G .

أ) أنشئ مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله .

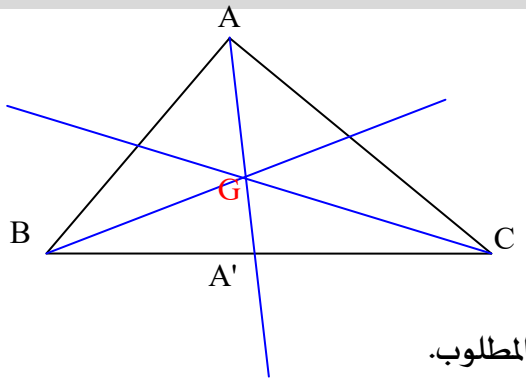
ب) هل يوجد مثلثا واحدا يحقق المطلوب ؟



www.dzexams.com

## حل التمرين :

### مرحلة التحليل :



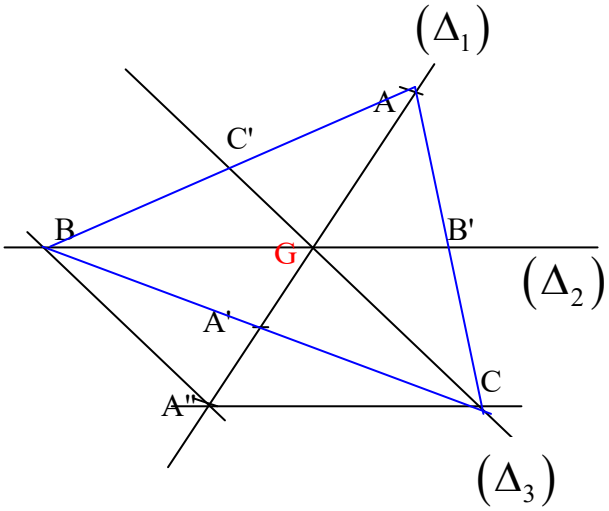

نفرض أن للمسألة حل أي يوجد على الأقل مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله . ونرسم شكلا مناسبا له.

لدينا القواعد التالية : $A'C = A'B$ و $AG = 2\,A'G$

### مرحلة التركيب والإنشاء :

انطلاقا من القواعد السابقة ننشئ الشكل ونتأكد أنه يحقق المطلوب.

نرسم ثلاث مستقيمات $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ ، $(\Delta_3)$ متقاطعة في نقطة G .




A نقطة من المستقيم $(\Delta_1)$ و A" نظيرتها بالنسبة للنقطة G

A' منتصف القطعة [A"G]

الموازي من A" للمستقيم $(\Delta_3)$ يقطع المستقيم $(\Delta_2)$ في B

والموازي من A" للمستقيم $(\Delta_2)$ يقطع المستقيم $(\Delta_3)$ في C

إذن الرابعي BGCA" متوازي أضلاع

ومنه A' هي منتصف [BC] إذن (AA') هو متوسط في المثلث ABC .

(AB) يقطع $(\Delta_3)$ في النقطة C' . في المثلث ABA"

لدينا (BA") // (GC") و G منتصف [AA"]

إذن C" منتصف [AB] وبالتالي (CC') هو متوسط في المثلث ABC .

بما أن المتوسطات تتلاقى في نقطة واحدة إذن كذلك (BB') هو متوسط في المثلث ABC .

ومنه النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

توجد ما لا نهاية من الحلول للمسألة وهذا حسب اختيار النقطة A على المستقيم $(\Delta_1)$ .

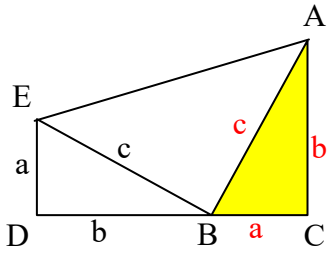


www.dzexams.com

# مبرهنة فيثاغورس

## نشاط

الشكل المقابل يمثل مثلثا ABC قائما في C أطوال أضلاعه a ، b ، c ، و BDE مثلث يقايس المثلث ABC حيث C ، B ، D في استقامية و AC = BD.




أ) بين أن الزاوية ABE قائمة .

ب) ما نوع الرابعي ACDE ؟

ج) أحسب مساحة الرابعي ACDE بطريقتين مختلفتين .

د) استنتج علاقة بين $c^2$ و $a^2$ ، $b^2$ .

## حل النشاط:

أ) لدينا في المثلث ABC ، $\widehat{ABD} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$ (زاوية خارجية) ولدينا $\widehat{ABD} = \widehat{EBD} + \widehat{ABE}$

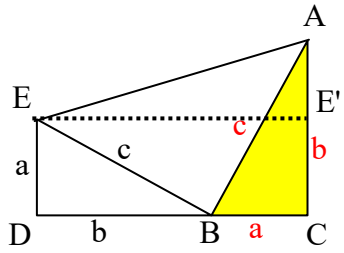
ومنه : $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} = \widehat{EBD} + \widehat{ABE}$

بما أن المثلث BDE يقايس المثلث ABC إذن : $\widehat{EBD} = \widehat{BAC}$ وبالتالي : $\widehat{ACB} = \widehat{ABE} = 90°$

ب) نوع الرابعي ACDE :

الربلعي ACDE شبه منحرف قائم .

ج) حساب مساحة الرابعي ACDE بطريقتين مختلفتين :




**الطريقة الأولى** : s(ACDE) = 2 s(ABC) + s(ABE)

ومنه : s(ACDE) = ab + (c ² / 2)

**الطريقة الثانية** : s(ACDE) = s(CDEE') + s(AEE')

ومنه : $s(ACDE) = a(b+a) + \frac{1}{2}(b+a)(b-a)$

أي : $s(ACDE) = ab + a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$ وبالتالي : $s(ACDE) = ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$

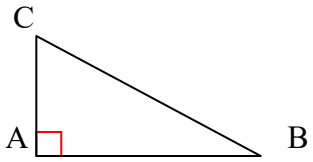
د) استنتج علاقة بين $c^2$ و $a^2$ ، $b^2$ :

من السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ومنه : $c^2 = a^2 + b^2$



www.dzexams.com

## مبرهنة فيثاغورس وعكسها :



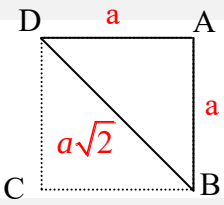

✓ **مبرهنة1 : (مبرهنة فيثاغورس)**

إذا كان ABC مثلثا قائما في A فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

✓ **مبرهنة2 : (عكس مبرهنة فيثاغورس)**

إذا كان في مثلث ABC ، $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن : المثلث ABC قائم في A .

**مثال1:**




ABCD مربع طول ضلعه يساوي a أحسب طول قطره .

$BD^2 = AB^2 + AD^2$ ومنه : $BD^2 = a^2 + a^2$

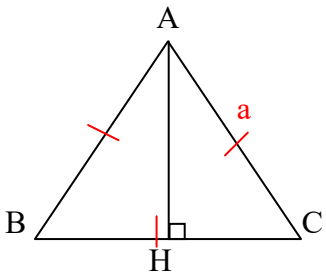
ومنه : $BD^2 = 2a^2$ إذن : $BD = a\sqrt{2}$

**مثال2:**

ABC مثلث متقايس الأضلاع ، طول ضلعه يساوي a ،

(AH) الارتفاع المتعلق بالضلع [BC] .

أحسب الطول AH .



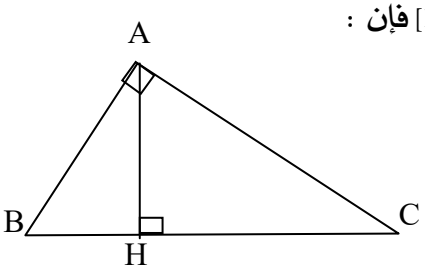

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AC^2 - HC^2 = AH^2$ إذن : $AH^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$

أي : $AH^2 = \frac{3}{4}a^2$ وبالتالي : $AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

**نتائج :**

إذا كان ABC مثلثا قائما في A و (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع [BC] فإن :




أ) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$ (من المساحة)

ب) $AH^2 = HC \cdot HB$ (استعمال مبرهنة فيثاغورس)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ و $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$

إذن : $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$ . ومنه : $(BH + HC)^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$ .

إذن : $BH^2 + HC^2 + 2BH \times HC = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$ . وبالتالي : $AH^2 = BH \times HC$

ج) $AB^2 = BH \cdot BC$ (مبرهنة فيثاغورس و النتيجة ب)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ ومنه $AB^2 = BH \times HC + BH^2$ إذن : $AB^2 = BH \times (HC + BH)$

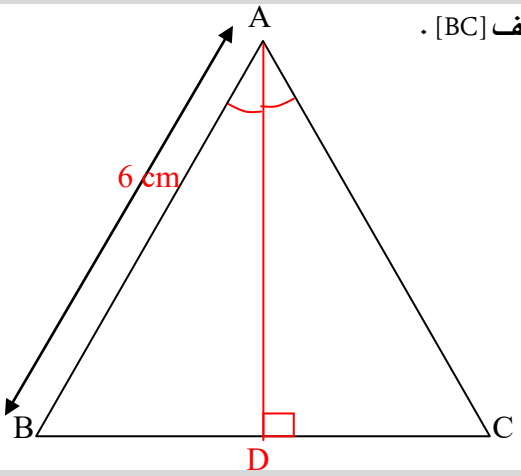
وبالتالي : $AB^2 = BH \cdot BC$

د) $AC^2 = CH \cdot CB$ (بنفس الطريقة للنتيجة السابقة)



www.dzexams.com

## نشاط




ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 6 cm ، النقطة D منتصف [BC] .

بين أن (AD) منصف زاوية الرأس A .

أحسب الطول AD ، واستنتج كلا من $\sin 30°$ ، $\cos 30°$ ، $\tan 30°$ .

## حل النشاط :

المستقيم (AD) هو متوسط في المثلث المتقايس الأضلاع ABC

إذن هو محور وبالتالي منصف زاوية الرأس A .

من مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AD^2 = 36 - 9 = 27$

ومنه : $AD = 3\sqrt{3}$

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ، \quad cos30° = \frac{AD}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad \tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

النسب المثلثية في مثلث قائم :

تعريف :

ABC مثلث قائم في C حيث : $\widehat{BAC} = \alpha$

جيب الزاوية $\alpha$ : $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$

جيب تمام الزاوية $\alpha$ : $cos\alpha = \frac{AC}{AB}$

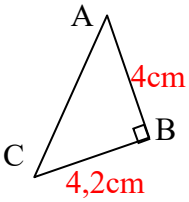
ظل الزاوية $\alpha$ : $\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$

نتائج : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{cos\alpha}$ $\qquad (\sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$

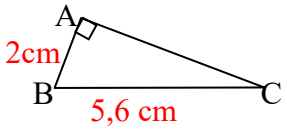
## التمرين الرابع

أحسب كلا من AC و $\widehat{ABC}$ في كل من الحالتين الآتيتين : (تعطى النتائج مدورة إلى الوحدة)

الحالة 1




الحالة 2






www.dzexams.com

## حل التمرين :

**الحالة 1 :**

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ومنه : $AC^2 =( 4^2 + 4{,}2^2)\ cm^2$

أي : $AC^2 = 33{,}64\ cm^2$ ومنه : $AC = 5{,}8\ cm$ . وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$ .

$\widehat{ABC} = 90°$

**الحالة 2 :**

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه : $AC^2 = BC^2 - AB^2$

ومنه : $AC^2 =( 5{,}6^2 - 2^2)\ cm^2$ أي : $AC^2 = 35{,}36\ cm^2$ ومنه $AC = 5{,}946427499...$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$ .

$cos\widehat{ABC} = \frac{2}{5{,}6} = 0{,}347142857...$ ومنه : $\widehat{ABC} = 69{,}07516758...°$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $\widehat{ABC} = 69°$

## التمرين الخامس

ABC مثلث قائم في A حيث $BC = 10\ cm$ و $\widehat{ABC} = 37°$

أحسب بالتدوير إلى الوحدة مساحة ومحيط هذا المثلث .

## حل التمرين :

$AC = BC \sin 37°$ ومنه : $AC = 6{,}01815023...$ .

$AB = BC \cos 37°$ ومنه : $AB = 7{,}9863551...$ .

نضع p محيط المثلث ABC : $P = AB + AC + BC$ ومنه : $P = 24{,}00450533...cm$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $p = 24\ cm$

نضع s مساحة المثلث ABC : $s = (AB \times AC)/2$ ومنه : $s = 24{,}0315424...cm^2$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $s = 24\ cm^2$ .

## التمرين السادس

أنشئ مثلثا ABC أطوال أضلاعه 5 cm ، 12 cm ، 13 cm ، وحدد طبيعته .

عين مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ونصف قطرها .

## حل التمرين :

نفترض $AB = 5cm$ و $AC = 12\ cm$ و $BC = 13\ cm$

لدينا : $AB^2 + AC^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

وحسب عكس مبرهنة فيثاغورس أن المثلث ABC قائم في A

مركز الدائرة المحيطة به هو منتصف القطعة [BC] ونصف قطرها يساوي 6,5 cm .



www.dzexams.com

# مبرهنة طاليس

## مبرهنة1 : مبرهنة طاليس

إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A
يقطعهما مستقيمان متوازيان $(\Delta)$ و $(\Delta')$
في النقط B ، C ، D ، E حسب أحد الشكلين
فإن أطوال أضلاع المثلث ABC تكون متناسبة
مع أطوال أضلاع المثلث ADE .

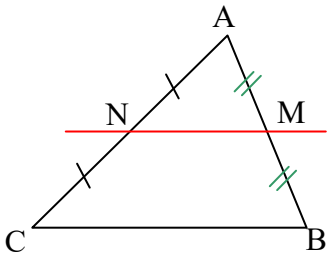
أي : $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$

## مبرهنة2 : عكس مبرهنة طاليس

إذا كانت كل من النقط A ، B ، D ، والنقط A ، C ، E
على استقامة واحدة وبنفس الترتيب حسب أحد الشكلين ،
وإذا كان $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ فإن المستقيمين (BC) و (DE)
يكونا متوازيين

**حالة خاصة :** مستقيم المنتصفين في مثلث

ABC مثلث كيفي.
إذا كانت النقطتان M و N منتصفا القطعتين [AB] و [AC]
على الترتيب فإن (MN) // (BC) و BC = 2 MN
إذا كانت النقطة M منتصف القطعة [AB] وكان (MN) // (BC)
حيث N نقطة من [AC] فإن N هي منتصف القطعة [AC]




## التمرين السابع

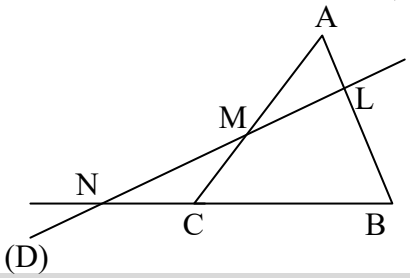
ABC مثلث كيفي ، (D) مستقيم يقطع (AB) ، (AC) ، (BC) في النقط L ، M ، N على الترتيب.

نريد البرهان أن : $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

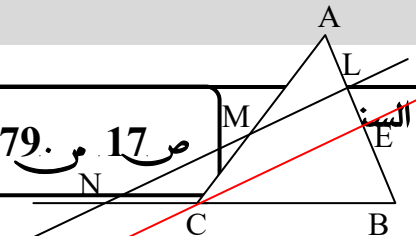
أ) أرسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، وسم E تقاطعه مع (AB).

ب) بين أن : $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$ و $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$

ج) استنتج العلاقة $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$




## حل التمرين :





www.dzexams.com

أ) رسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، يقطع (AB) في E.

ب) تبيان أن $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$

في المثلث BLN لدينا : (CE) // (NL) إذن حسب مبرهنة طاليس

لدينا : $\frac{BE}{BL}=\frac{BC}{BN}$ معناه $\frac{BN}{BL}=\frac{BC}{BE}$ ومنه : $\frac{NB}{LB}=\frac{BC}{BE}=\frac{NB-BC}{LB-BE}=\frac{NC}{LE}$

إذن : $\frac{NB}{LB}=\frac{NC}{LE}$ معناه $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$

تبيان أن $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$

في المثلث ACE لدينا : (CE) // (ML) إذن حسب مبرهنة طاليس

$\frac{AM}{AC}=\frac{AL}{AE}$ معناه $\frac{AM}{AL}=\frac{AC}{AE}$ ومنه : $\frac{AM}{AL}=\frac{AC}{AE}=\frac{AC-AM}{AE-AL}=\frac{MC}{LE}$

$\frac{MA}{LA}=\frac{MC}{LE}$ معناه $\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}$

ج) استنتاج العلاقة $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

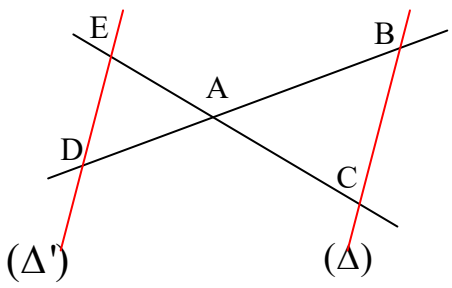
$\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$ معناه $LE=\frac{LB\times NC}{NB}$ و $\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}$ معناه $LE=\frac{MC\times LA}{MA}$

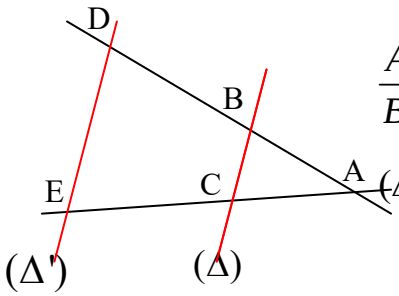
ومنه : $\frac{LB\times NC}{NB}=\frac{MC\times LA}{MA}$ معناه LB×NC×MA = MC×LA×NB معناه $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

**نتائج :**

إذا كان $(\Delta')//(\Delta)$ فإن $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$

إذا كان $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

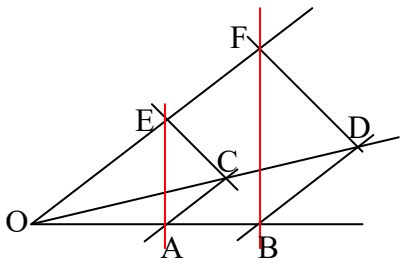



## التمرين الثامن

إذا علمت أن في الشكل المرفق (AC) // (BD)

و(DF) // (CE) فبين أن (BF) // (AE) .






www.dzexams.com

## حل التمرين

في المثلث ODB لدينا : (AC) // (BD) ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$

في المثلث ODF لدينا : (CE) // (DF) ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OC}{OD}=\frac{OE}{OF}$

إذن : $\frac{OA}{OB}=\frac{OE}{OF}$ وحسب عكس مبرهنة طاليس المطبقة في المثلث OBF لدينا : (AE) // (BF) .

## التمرين التاسع

أنشئ العدد $\frac{6}{7}$

## حل التمرين

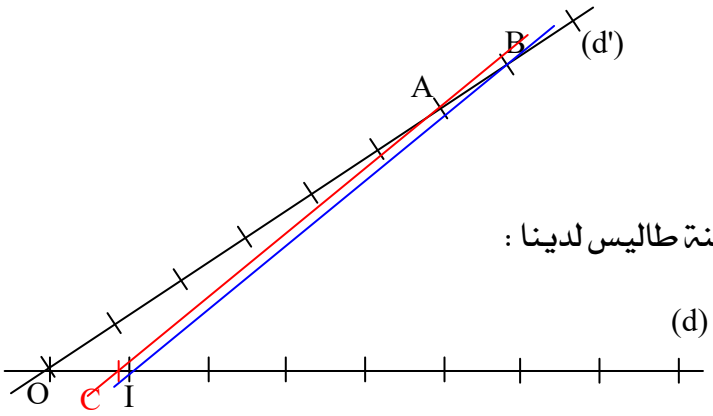
ليكن (O,I) معلما للمستقيم (d) ،

المستقيم (d') يقطع (d) في النقطة O .

نعين النقطتين A و B على المستقيم (d') حيث

OA = 6 و OB = 7 ،

نرسم من A المستقيم الموازي للمستقيم (BI) حسب مبرهنة طاليس لدينا :




$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OI}=\frac{6}{7}$ إذن : $OC=\frac{6}{7}$

## التمرين العاشر

ABC مثلث ، النقطة D منتصف [BC] والنقطة E منتصف [AD] و F نقطة من [AC] حيث $AF=\frac{1}{3}AC$

أ) بين أن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) بين أن BF = 4 EF .

## حل التمرين

أ) تبيان أن النقط B ، E ، F في استقامية.

نرسم من D الموازي للمستقيم (EF) يقطع (AC) في G

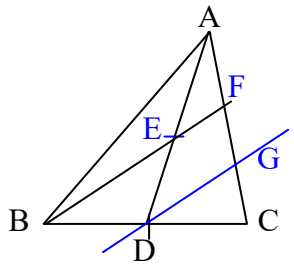
في المثلث ADG لدينا (EF) //(DG) و E منتصف [AD]

إذن F هي منتصف [AG] و DG = 2EF ومنه : AF = FG = GC

وبالتالي G منتصف [FC] ، وفي المثلث BCF لدينا كذلك D منتصف [BC]

إذن : (DG) // (BF) و BF = 2DG

ومنه : (EF) // (BF) بما أن للمستقيمين نقطة مشتركة فإن النقط B ، E ، F في استقامية.




ب) تبيان أن BF = 4 EF .

لدينا : BF = 2DG و DG = 2EF إذن : BF = 4 EF .



www.dzexams.com

# الزوايا والدائرة

## نشاط :

أرسم دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها 5 cm ، و [AB] قطر فيها ،

و M نقطة من الدائرة حيث AM = 4 cm .

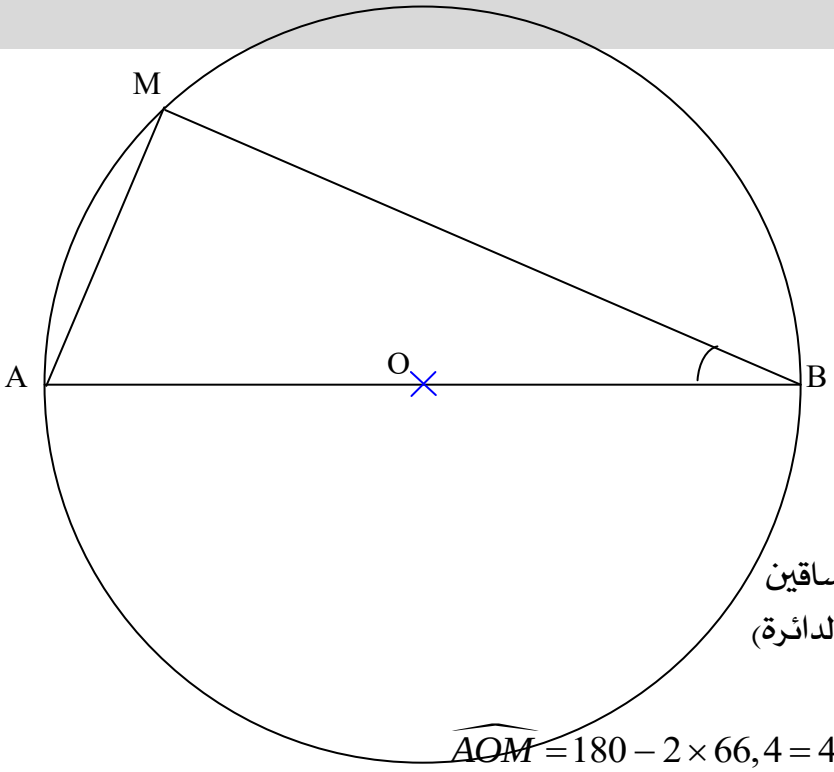
أ) باستعمال ال

ب) آلة الحاسبة والتدوير إلى 0,1 أحسب قيس الزاوية ABM ، استنتج قيس الزاوية MAB .

ج) ما نوع المثلث AOM ؟ واحسب أقياس زواياه.

د) استنتج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

## حل النشاط :




أ) حساب قيس الزاوية ABM :

المثلث ABM قائم في M

لأن ضلعه [AB] هو قطر للدائرة (C) .

ومنه : $\sin \widehat{ABM} = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0,4$

إذن بالحاسبة وبالتدوير إلى 0,1 نجد :

$\widehat{ABM} = 23,6°$

استنتاج قيس الزاوية MAB

$\widehat{MAB} = 90 - 23,6 = 66,4°$

ب) نوع المثلث AOM : هو متساوي الساقين

رأسه O لأن : OM = OA (نصفي قطر الدائرة)

حساب أقياس زوايا المثلث AOM :

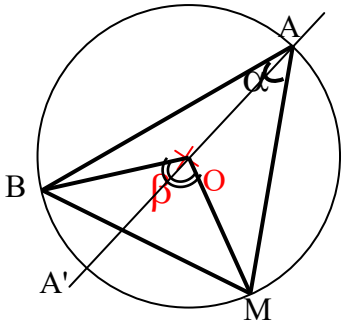
$\widehat{MAO} = \widehat{AMO} = 66,4°$ و $\widehat{AOM} = 180 - 2 \times 66,4 = 47,2°$

ج) استنتاج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

لدينا : 2×23,6 = 47,2 ومنه $\widehat{AOM} = 2\widehat{ABM}$

## نشاط إضافي :

A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة (c) مركزها O ، المستقيم (AO) يقطع الدائرة (c) في النقطة A'.




نضع $\widehat{MAB} = \alpha$ و $\widehat{MOB} = \beta$ .

أ) بين أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

ثم عبر عن قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$ ،

وعن قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$ .

ب) استنتج العلاقة بين α و β.

ج) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α ،

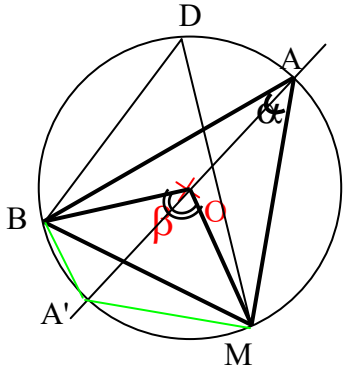


www.dzexams.com

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$ .

د) D نقطة من القوس الكبرى $\widehat{BM}$ استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$ .

**حل النشاط :**




أ) تبيان أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

لدينا OA = OM = OB (أنصاف أقطار الدائرة)

إذن المثلثان AOM و BOM كل منهما متساوي الساقين .

- قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$ :

لدينا $\widehat{MOA'}$ زاوية خارجية في المثلث AOM

ومنه: $\widehat{MOA'}=\widehat{MAO}+\widehat{OMA}$ وبما أن $\widehat{MAO}=\widehat{OMA}=\widehat{MAA'}$

فإن : $\widehat{MOA'}=2\widehat{MAA'}$

- قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$ :

لدينا $\widehat{BOA'}$ زاوية خارجية في المثلث BOA ومنه

$\widehat{BOA'}=\widehat{BAO}+\widehat{OBA}$ وبما أن $\widehat{BAO}=\widehat{OBA}=\widehat{BAA'}$ فإن : $\widehat{BOA'}=2\widehat{BAA'}$ .

ب) استنتاج العلاقة بين $\alpha$ و $\beta$.

$\widehat{BOM}=\widehat{BOA'}+\widehat{A'OM}$ ومنه : $\widehat{BOM}=2\widehat{BAA'}+2\widehat{A'AM}$ إذن : $\widehat{BOM}=2\widehat{BAM}$

وبالتالي : $\beta=2\alpha$

ج) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة $\beta$ ، ثم بدلالة $\alpha$ ،

باستعمال نفس الطريقة السابقة نجد : $\widehat{BA'M}=180°-\frac{1}{2}\beta$ و $\widehat{BA'M}=180°-\alpha$

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$ .

$\widehat{BA'M}+\alpha=180°$ أي : $\widehat{BA'M}+\widehat{BAM}=180°$ ومنه : $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$ زاويتان متكاملتان .

د) D نقطة من القوس الكبرى $\widehat{BM}$ استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$ .

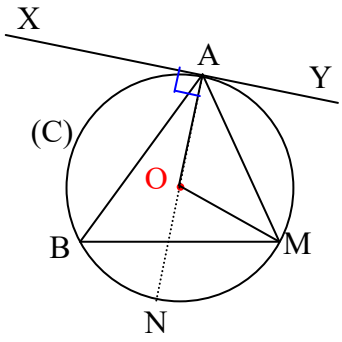
مما سبق نستنتج أن : $\widehat{BDM}=\frac{\beta}{2}=\alpha$ ومنه : $\widehat{BDM}=\widehat{BAM}$



www.dzexams.com

## مفردات ومصطلحات :

(C) دائرة مركزها O ، و A ، B ، M ، N نقط من الدائرة (C) حيث O تنتمي إلى [AN].

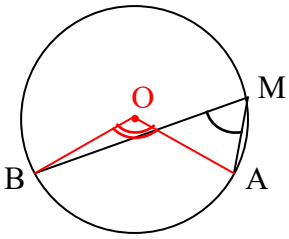


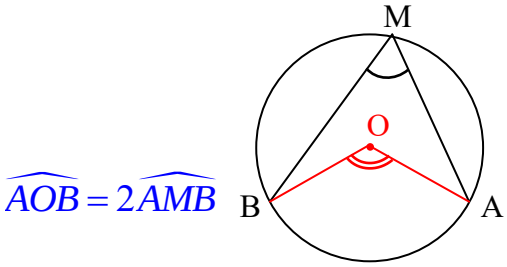

- القطعة [AN] تسمى قطرا ، وكل من القطع [AB] ، [AM] ، [BM] تسمى وترا في الدائرة (C).
- النقطتان المتمايزتان A و B تعينان على الدائرة (C) قوسين كل منها نرمز لها بالرمز $\overset{\frown}{AB}$ .
- (XY) مستقيم يشترك مع الدائرة (C) في نقطة وحيدة A ، يسمى مماسا للدائرة (C) عند النقطة A ويكون عموديا على (AO).
- الزاوية $\widehat{AOM}$ رأسها مركز الدائرة تسمى زاوية مركزية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AM}$ .
- الزاوية $\widehat{ABM}$ رأسها نقطة من الدائرة تسمى زاوية محيطية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AM}$ .
- الزاوية $\widehat{XAB}$ تسمى زاوية محيطية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$ .

مبرهنة : في كل دائرة ، الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس.

**مثال :**

A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مركزها O.

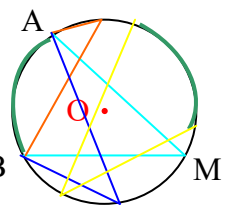


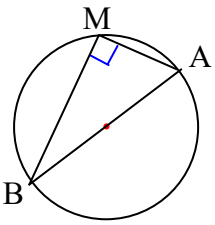

$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

## نتائج :

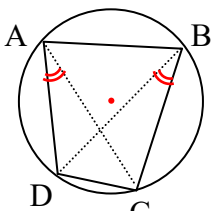
1) الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو أقواسا متقايسة تكون متقايسة. (شكل1)
2) إذا كانت القطعة [AB] قطرا لدائرة فإنه من أجل كل نقطة M من هذه الدائرة وتختلف عن A وB ، يكون المثلث ABM قائما في M. (شكل 2)
3) تكون رؤوس الرباعي المحدب ABCD من نفس الدائرة إذا كانت : $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ . (شكل 3)
4) يكون الرباعي المحدب ABCD دائريا إذا كانت زاويتان متقابلتان متكاملتين. (شكل4)



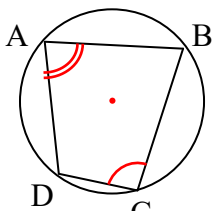

الشكل (1)




الشكل ( 2)




الشكل ( 3)




الشكل (4)

## التمرين الحادي عشر :

(C) و (C') دائرتان مركزهما O و O' متقاطعتان في نقطتين A وB ،

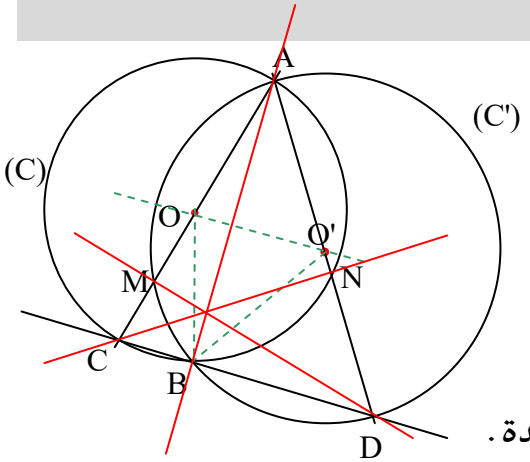


www.dzexams.com

[AC] قطر في (C) و يقطع (C') في النقطة M ، و [AD] قطر في (C') و يقطع (C) في النقطة N .

1. أرسم شكلا مناسبا .
2. بين أن النقط C ، B ، D في استقامية .
3. بين أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

## حل التمرين :




2) تبيان أن النقط C ، B ، D في استقامية .

$\widehat{ABC} = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C)

$\widehat{ABD} = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C')

ومنه : $\widehat{CBD} = 180°$

وبالتالي : (CB) // (CD) ومنه : النقط C ، B ، D في استقامية.

3) تبيان أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

لدينا المثلث ANC قائم في N لأن الزاوية $\widehat{ANC}$ تحصر نصف الدائرة (C) ومنه : $(CN) \perp (AD)$

ولدينا المثلث ABD قائم في B لأن الزاوية $\widehat{ABD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(AB) \perp (CD)$

ولدينا المثلث AMD قائم في M لأن الزاوية $\widehat{AMD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(DM) \perp (AC)$

إذن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) هي ارتفاعات في المثلث ACD وبالتالي تتقاطع في نقطة واحدة .



www.dzexams.com

# المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة :

**تعريف :**

نقول عن مثلثين أنهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.

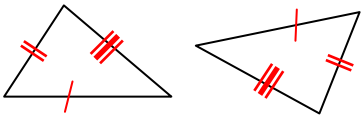
**ملاحظة :**

إذا كان تطابق مثلثين بالسحب أو التدوير فإن تقايسهما مباشر وإذا كان بقلب أحدها فإنه غير مباشر.

**نتيجة :**

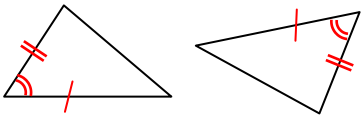
المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى و زواياهما متساوية مثنى ، مثنى.

**خواص : (حالات تقايس مثلثين)**



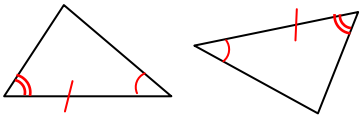
خاصية 1 :

يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى.



خاصية 2 :

يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلثين مع زاوية الضلعين اللذين يحصرانها من المثلث الآخر.

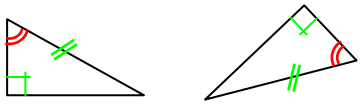


خاصية 3 :

يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزاويتان المجاورتان له من أحد المثلثين مع ضلع والزاويتين المجاورتين له من المثلث الآخر.

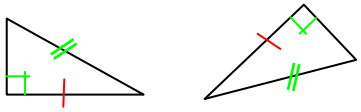
**حالات خاصة : (تقايس مثلثين قائمين)**

مثلثان قائمان وتراهما BC و B'C' متقايسان



خاصية 1 :

يتقايس المثلثان ABC و A'B'C' إذا تقايست زاوية غير القائمة من الأول مع زاوية غير القائمة من الثاني.



خاصية 2 :

يتقايس المثلثان ABC و A'B'C' إذا تقايس ضلع للزاوية القائمة من الأول مع ضلع للزاوية القائمة من الثاني.

## التمرين الثاني عشر

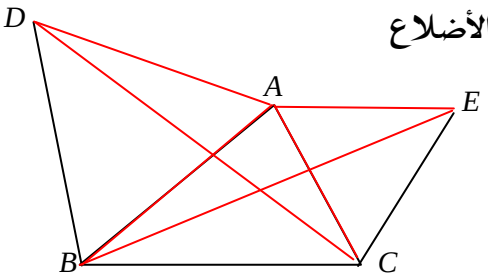
ABC مثلث ، أنشئ على ضلعيه [AB] و [AC] مثلثين ABD و ACE على الترتيب ، حيث كل منهما متقايس الأضلاع.

بين أن المثلثين ACD و ABE متقايسان واستنتج أن : BE = CD .



www.dzexams.com

حل :



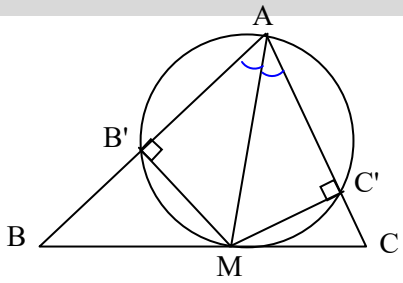

لدينا : $\widehat{CAE} = \widehat{BAD} = 60°$ لأن كل من المثلثين ABD و ACE متقايس الأضلاع

ومنه : $\widehat{CAE} + \widehat{CAB} = \widehat{BAD} + \widehat{CAB}$ إذن : $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$

ولدينا كذلك : AB = AD و AE = AC

إذن المثلثان ACD و ABE متقايسان . ومنه نستنتج : BE = CD .

## التمرين الثالث عشر




ABC مثلث ، M نقطة تقاطع منصف زاوية الرأس A و [BC] ، C' ، B' المسقطان العموديان للنقطة M على [AB] و [AC] على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين AB'M ، AC'M متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، B' ، M ، C' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

ج) ما نوع الرباعي AB'MC' عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

**حل :**

أ) بين أن المثلثين AB'M ، AC'M متقايسان.

لدينا : المثلثان AB'M ، AC'M قائمان ولهما وتر مشترك [AM] و $\widehat{B'AM} = \widehat{C'AM}$ إذن هما متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، B' ، M ، C' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

لدينا $\widehat{AB'M}$ و $\widehat{AC'M}$ متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي AB'MC' إذن هو دائري في الدائرة ذات القطر [AM] ومركزها منتصف [AM].

ج) ما نوع الرباعي AB'MC' عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

إذا كان المثلث ABC قائما في A فإن للرباعي AB'MC' ثلاث زوايا قائمة وبالتالي هو مستطيل

وبما أن القطر [AM] هو منصف الزاوية ذات الرأس A فإن الرباعي AB'MC' هو مربع.

## نشاط :

ADE و A'B'C' مثلثان حيث : AD = A'B' و AE = A'C' و $\widehat{A} = \widehat{A'}$

نعين نقطة B من (AD) و نقطة C من (AE) حيث (DE) // (BC) .

1) تحقق من تقايس المثلثين ADE و A'B'C' .واستنتج الزوايا المتقايسة والضلعين المتقايسين.

2) بين أن زوايا المثلثين A'B'C' و ABC متقايسة مثنى ، مثنى.

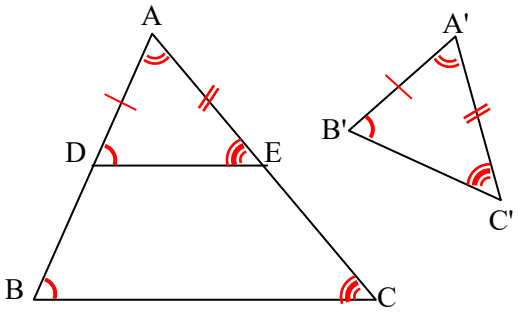
3) هل المثلثين ADE و ABC متقايسان ؟ ماذا تلاحظ عنهما ؟

4) برهن أن : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ .



www.dzexams.com

## حل النشاط :




1) لدينا : AD = A'B' و AE = A'C' و $\widehat{A}=\widehat{A'}$

إذن المثلثان ADE و A'B'C' هما متقايسان

وبالتالي : $\widehat{D}=\widehat{B'}$ ، $\widehat{E}=\widehat{C'}$ و DE = B'C'

2) لدينا : (DE) // (BC) إذن : $\widehat{D}=\widehat{B}$ ، $\widehat{E}=\widehat{C}$ بالتماثل.

ومنه : $\widehat{B}=\widehat{B'}$ ، $\widehat{C}=\widehat{C'}$ ولدينا $\widehat{A}=\widehat{A'}$ من المعطيات

3) إذا كانت النقطتين B و D مختلفتين فإن المثلثين ADE و ABC غير متقايسين.

نلاحظ أن المثلث A'B'C' هو تصغير (أو تكبير) للمثلث ABC . نقول عنهما أنهما متشابهان.

4) تبيان أن $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$

لدينا : (ED) // (BC) وبتطبيق مبرهنة طاليس نجد $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

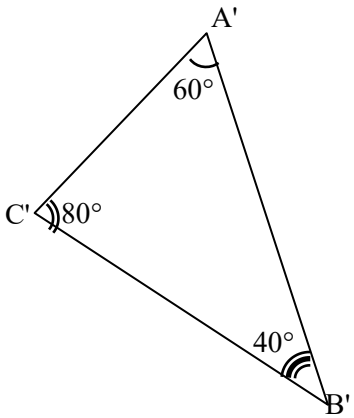
وبما أن : AD = A'B' و AE = A'C' و DE = B'C' فإن $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$ .

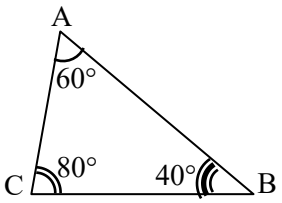
## تشابه مثلثين :

### تعريف :

نقول عن مثلثين أنهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زاويا الآخر.

### مثال :




المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان.

الرؤوس المتماثلة : A B C

الأضلاع المتماثلة : A' B' C'

[AB] و [A'B'] ؛ [AC] و [A'C'] ؛ [BC] و [B'C'].

### ملاحظات :

1 - يكفي تساوي زاويتين من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر للقول إن المثلثين متشابهان ، ذلك لأن مجموع زوايا المثلث يساوي 180° .

2 - إذا كان أحد مثلثين تصغير (أو تكبير) للآخر فإن هذين المثلثين متشابهين.

3 - المثلثان المتقايسان هما مثلثان متشابهان والعكس ليس صحيحا.

### مبرهنة :

المثلثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.



www.dzexams.com

## نسبة تشابه مثلثين :

### تعريف :

ليكن ABC و A'B'C' مثلثين متشابهين ، نسمي نسبة التشابه هذين المثلثين العدد الحقيقي الموجب غير المعدوم k حيث : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

### ملاحظات :

لتكن k نسبة تشابه المثلثين ABC و A'B'C' حيث $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

1 - $\frac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه المثلثين ABC و A'B'C' .

2 - إذا كان $0 < k < 1$ فإن المثلث A'B'C' هو تصغير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التصغير .

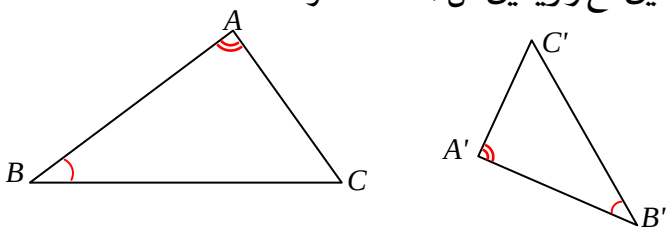
3 - إذا كان $k > 1$ فإن المثلث A'B'C' هو تكبير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التكبير .

4 - إذا كان $k = 1$ فإن المثلث A'B'C' يقايس المثلث ABC .

## خواص : (حالات تشابه مثلثين)

### خاصية 1:

يتشابه مثلثان إذا تقايست زاويتان من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر.




مثال : بما أن : $\widehat{A}=\widehat{A'}$ و $\widehat{B}=\widehat{B'}$

فإن المثلثان ABC و A'B'C' متشابهين .

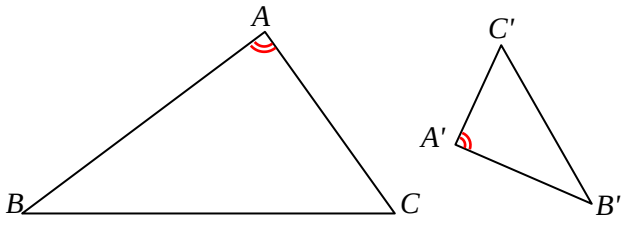
### ملاحظة :

المثلث A'B'C' هو تصغير للمثلث ABC

### خاصية 2 :

يتشابه مثلثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلثين مع زاوية من المثلث الآخر وكان طولا الضلعين الذين يحصران إحدى الزاويتين متناسبين مع طولي الضلعين الذين يحصران الزاوية الأخرى.

### مثال :




$\widehat{A}=\widehat{A'}$ و A'C' = 1,5 cm و A'B' = 2 cm

و AB = 4 cm و AC = 3 cm

لدينا : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{4}{2}=2$ و $\frac{AC}{A'C'}=\frac{3}{1,5}=2$

إذن : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=2$ ومنه المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان .

### ملاحظة :

المثلث ABC هو تكبير للمثلث A'B'C' ونسبة التكبير هي 2 .

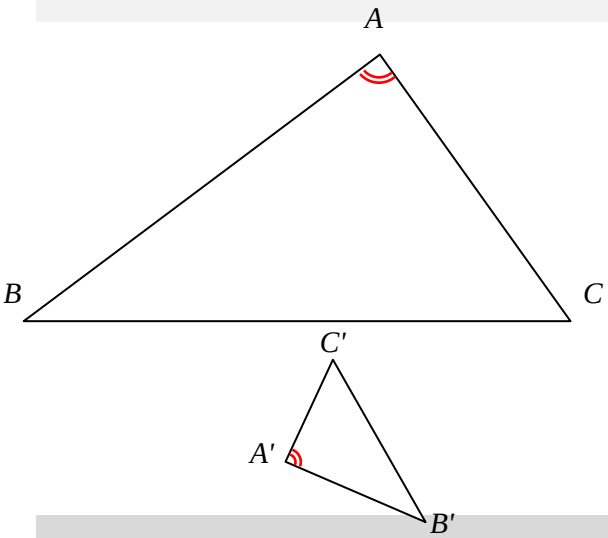


www.dzexams.com

**خاصية 3:**

يتشابه مثلثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.

**مثال :**




A'C' = 1,5 cm و A'B' = 2 cm و B'C' = 2,4 cm

و AC = 4,5 cm و AB = 6 cm و BC = 7,2 cm

لدينا : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{6}{2}=3$ و $\frac{AC}{A'C'}=\frac{4,5}{1,5}=3$

و $\frac{BC}{B'C'}=\frac{7,2}{2,4}=3$ ومنه : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=3$

إذن : المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان .

**ملاحظة :**

المثلث ABC هو تكبير للمثلث A'B'C' ونسبة التكبير هي 3 .

**التمرين الرابع عشر:**

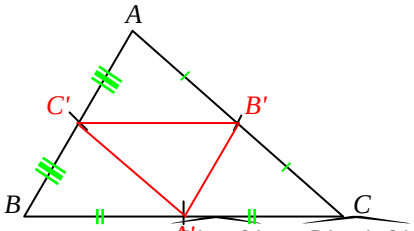
ABC مثلث ، A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين ABC و A'B'C' متشابهان ، وعين نسبة التشابه.

ب) أحسب النسبة $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}$ .

**حل :**

أ) تبيان أن المثلثين ABC و A'B'C' متشابهان ، وتعيين نسبة التشابه.




لدينا : A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس فإن : (A'B') // (AB) و A'B' = AC' = BC'

ومنه : الرباعي AB'A'C' و BA'B'C' متوازيا أضلاع

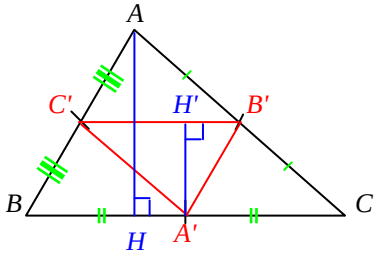
إذن كل زاويتان متقابلتان هما متقايستان أي : $\widehat{C'AB'}=\widehat{C'A'B'}$ و $\widehat{C'BA'}=\widehat{C'B'A'}$

ومنه : $\widehat{CAB}=\widehat{C'A'B'}$ و $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ إذن المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان.

النقط المتماثلة : A ، B ، C

A' ، B' ، C' $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=2$ ومنه نسبة التشابه (التكبير) هي 2 .

ب) حساب النسبة $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}$ .




H و H' هما المسقطان العموديان لـ A و A' على (BC) و(B'C') على الترتيب

المثلثان القائمان AHB و A'H'B' متشابهان لأن لهما زاويتان قائمتان

و $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ أي : $\widehat{HBA}=\widehat{H'B'A'}$ ومنه $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{BH}{B'H'}=2$ ومنه : AH = 2 A'H'

مساحة(ABC) = 2 AH × BC = 2 (2A'H')(2B'C') = 4(2A'H'×B'C') = 4×(A'B'C')مساحة.



www.dzexams.com

إذن : $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = 4$ .



www.dzexams.com

# التحويلات النقطية:

## نشاط

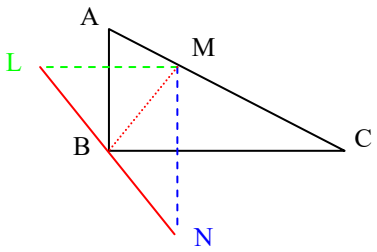
ABC مثلث قائم في B ، M نقطة من وتره [AC] . النقطتان L و N نظيرتا النقطة M بالنسبة إلى (AB) و (BC) على الترتيب.

ماذا تمثل النقطة B بالنسبة إلى [LN]. ما القول عن النقطتين L و N بالنسبة إلى B.

نرسم النقطة D بحيث يكون الرباعي ABDC متوازي الأضلاع. قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ ، ماذا تمثل النقطة D بالنسبة إلى النقطة B.

## حل النشاط :

L نظيرة M بالنسبة إلى (AB) إذن المستقيم (AB) هو محور القطعة [LM]




ومنه : المثلث BLM متساوي الساقين رأسه B إذن BL = BM

و (AB) يكون منصف الزاوية $\hat{LBM}$ أي : $\hat{LBM} = 2 \times \hat{ABM}$

N نظيرة M بالنسبة إلى (BC) إذن المستقيم (BC) هو محور القطعة [MN]

ومنه : المثلث BNM متساوي الساقين رأسه B إذن BN = BM

و (BC) يكون منصف الزاوية $\hat{MBN}$ أي : $\hat{MBN} = 2 \times \hat{MBC}$

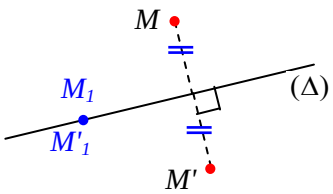
وبالتالي : BN = BL

ولدينا : $\hat{LBN} = \hat{LBM} + \hat{MBN} = 2 \times \hat{ABM} + 2 \times \hat{MBC} = 2(\hat{ABM} + \hat{MBC}) = 2\hat{ABC} = 180°$

ومنه L ، B ، N على استقامة واحدة. وبالتالي : النقطة B هي منتصف القطعة [LN].

## تعاريف :

### تعريف التناظر المحوري:

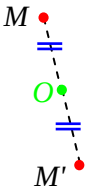



(Δ) مستقيم ثابت ، التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :

إذا كان M تنتمي إلى (Δ) فإن M' تكون منطبقة على M ،

وإذا كانت M لا تنتمي إلى (Δ) فإن : (Δ) يكون محور القطعة [MM'].

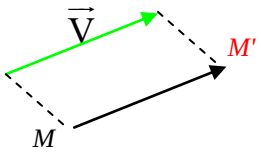
### تعريف التناظر المركزي :




O نقطة ثابتة من المستوي ، التناظر المركزي بالنسبة إلى النقطة O هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :

تكون النقطة O منتصف القطعة [MM'].

### تعريف الانسحاب :




$\vec{V}$ شعاع ثابت من المستوي ، الانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$

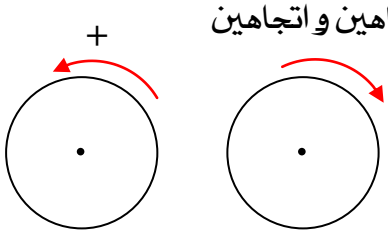


www.dzexams.com

ملاحظة : إذا كان $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ فإن الرباعي ABMM' هو متوازي أضلاع.

**توجيه المستوي :**

لتكن (C) دائرة من المستوي ، يمكن أن نحدد على هذه الدائرة اتجاهين و اتجاهين فقط ، أحدهما عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه المباشر (أو الاتجاه الموجب) ، والآخر مثل اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه غير المباشر (أو الاتجاه السالب).



**تعريف :**

توجيه المستوي هو اختيار اتجاه واحد على كل دوائر هذا المستوي.

**ملاحظة :**

لتوجيه مستو عادة ما نختار الاتجاه المباشر (عكس اتجاه حركة عقارب الساعة).

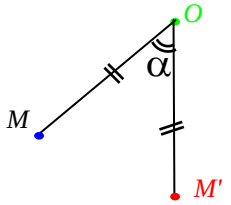
**تعريف الدوران :**

O نقطة ثابتة من مستو موجه ، و $\alpha$ زاوية معلومة ، الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\alpha$ في الاتجاه المباشر هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :

إذا كانت M منطبقة على O فإن النقطة M' تكون منطبقة على O.

وإذا كانت M تختلف عن النقطة O فإن : OM' = OM و $\widehat{MOM'} = \alpha$

والثلاثية (O , M , M') مباشرة.




**ملاحظة :**

في كل حالة النقطة M' تسمى صورة النقطة M بالتحويل النقطي .

**خواص :**

**النقط الصامدة :**

**تعريف :**

نقول عن نقطة أنها صامدة بتحويل نقطي إذا كانت منطبقة على صورتها بواسطة هذا التحويل.

**أمثلة :**

- ✓ التناظر المحوري الذي محوره المستقيم $(\Delta)$ : كل نقط المستقيم $(\Delta)$ هي نقط صامدة بهذا التحويل.
- ✓ التناظر المركزي الذي مركزه النقطة A : يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز A.
- ✓ الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل نقط صامدة.
- ✓ الدوران الذي مركزه O وزاويته $\alpha$ حيث : $\alpha \neq k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز O.

**ملاحظة :**

إذا كانت $\alpha = 2k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، في هذه الحالة التحويل النقطي يسمى التحويل المطابق في المستوي وكل نقط المستوي هي صامدة بهذا التحويل.

حفظ المسافات (التقايس)

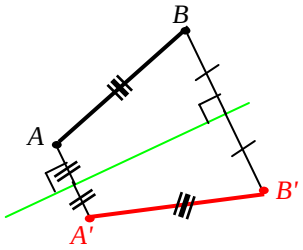
تعريف :

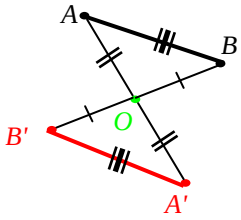
التقايس هو كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل ثنائية نقطية (A , B) الثنائية النقطية (A' , B') حيث :

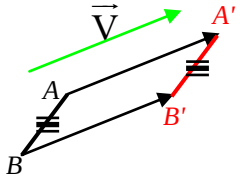


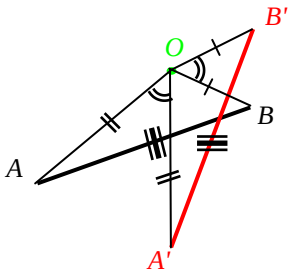
www.dzexams.com

$A'B' = AB$. نقول عنه أنه يحافظ على المسافات.




**أمثلة :**

- ✓ $A'$ و $B'$ صورتا $A$ و $B$ على الترتيب بالتناظر المحوري الذي محوره المستقيم $(\Delta)$ : لدينا : $A'B' = AB$
- ✓ $A'$ و $B'$ صورتا $A$ و $B$ على الترتيب بالتناظر المركزي الذي مركزه النقطة $O$ : لدينا $A'B' = AB$
- ✓ $A'$ و $B'$ صورتا $A$ و $B$ على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه غير معدوم $\vec{V}$ : لدينا $A'B' = AB$
- ✓ $A'$ و $B'$ صورتا $A$ و $B$ على الترتيب الدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $\alpha$ : لدينا $A'B' = AB$

**مبرهنة :**

كل من التناظر المحوري، التناظر المركزي، الانسحاب، الدوران، هو تقايس ( يحافظ على المسافات).

**نتيجة :**

يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلث الآخر بانسحاب ، أو تناظر محوري ، أو تناظر مركزي ، أو دوران.

**ملاحظة :**

إذا كان مثلثان يتطابق بالسحب أو التدوير فنقول عن تقايسهما أنه مباشر ، وإن كان لا يتطابق إلا بعد قلب أحدهما فنقول عن تقايسهما أنه غير مباشر.

- حفظ أقياس الزوايا :

**مبرهنة :**

صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها.

- حفظ الاستقامية :

**مبرهنة :**

إذا كانت $A$ ، $B$ ، $C$ في استقامية فإن صورها $A'$ ، $B'$ ، $C'$ ، بتقايس ، تكون في استقامية.

**نتائج :**

- صورة مستقيم بتقايس (تناظر محوري ، تناظر مركزي ، انسحاب ، دوران) هو مستقيم.
- صورة مستقيم بتناظر مركزي أو انسحاب هي مستقيم موازيا له
- صورة مستقيم $(D)$ بتناظر محوري بالنسبة إلى $(\Delta)$ هي المستقيم $(D')$ حيث :

إذا كان $(D)$ و $(\Delta)$ متوازيين فإن $(D)$ يوازي $(D')$ وإذا كان $(D)$ و $(\Delta)$ متقاطعان فإن $(D)$ يقطع $(D')$ في نفس النقطة.

- صورة مستقيم $(D)$ بدوران هي مستقيم $(D')$ حيث إحدى الزوايا المحصورة بين $(D)$ و $(D')$ تقايس زاوية الدوران.



www.dzexams.com

## التمرين الخامس عشر:

ABCD متوازي أضلاع. E ، F ، G ، H نقط من [AB] ، [BC] ، [CD] ، [AD] على الترتيب حيث :

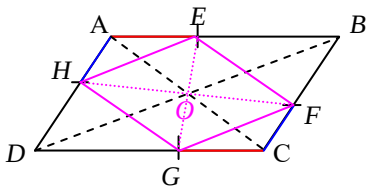
AE = CG و AH = CF.

أ) ما هو التحويل النقطي الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D ؟

ب) ما هي طبيعة الرباعي EFGH ؟

## حل :

أ) تعيين التحويل النقطي الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D :




ABCD متوازي أضلاع إذن قطراه [AC] ، [BD] متناصفان في النقطة O.

إذن C هي صورة A و D هي صورة B بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

ب) طبيعة الرباعي EFGH :

**الطريقة 1 :**

(AE) // (GC) و AE = GC إذن الرباعي AECG متوازي أضلاع ومنه قطراه [AC] ، [EG] متناصفان في النقطة O.

وبالتالي : G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

(AH) // (FC) و AH = FC إذن الرباعي AFCH متوازي أضلاع ومنه قطراه [AC] ، [HF] متناصفان في النقطة O.

وبالتالي : H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

لدينا G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O و H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O

إذن [HG] هي صورة [EF] بالتناظر المركزي الذي مركزه O ومنه : (HG) // (EF)

والتناظر المركزي يحافظ على المسافات أي : HG = EF وبالتالي الرباعي EFGH هو متوازي أضلاع.

**الطريقة 2 :**

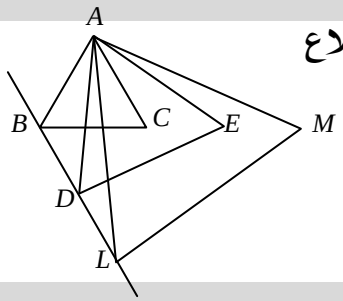
نقارن بين المثلثين AEH و CFG ثم بين BEF و DGH.

و نحصل على النتيجتين : EH = FG و HG = EF.

## التمرين السادس عشر

يمثل الشكل المقابل ثلاثة مثلثات ABC ، ADE ، ALM كل منها متقايسة الأضلاع

حيث النقط B ، D ، L في استقامية. بين أن النقط C ، E ، M في استقامية.




## حل :

بما أن المثلثات متقايسة الأضلاع فإن : AC = AB ، AE = AD ، AM = AL

و $B\hat{A}C = D\hat{A}E = L\hat{A}M = 60°$

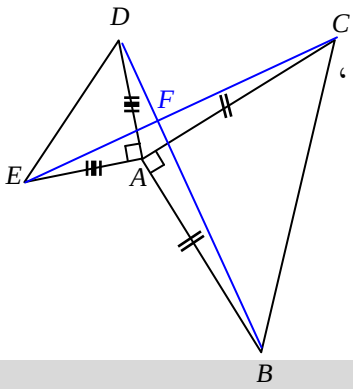
ومنه : C ، E ، M هي صور B ، D ، L بالدوران الذي مركزه A وزاويته 60°.

وبما أن الدوران يحافظ على الاستقامية و النقط B ، D ، L في استقامية فإن النقط C ، E ، M في استقامية كذلك.



www.dzexams.com

## التمرين السابع عشر :




ABC و ADE مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبين في الشكل ،
[CE] و [BD] متقاطعان في النقطة F.
بين باستعمال الدوران أن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

## حل :

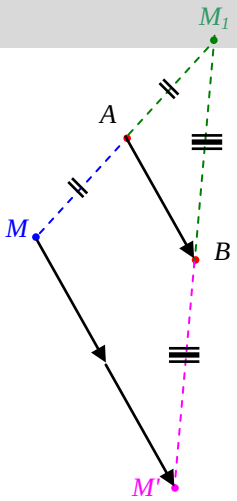
نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ، ونعتبر الدوران الذي مركزه A وزاويته 90°.
إذن صورة B هي C و صورة D هي E بهذا الدوران
ومنه صورة المستقيم (BD) هي المستقيم (CE) بنفس الدوران إذن إحدى زوايا المحصورة بين المستقيمين (BD) و(CE) تقايس زاوية الدوران التي هي 90° ومنه : المستقيمان (BD) و (CE) متعامدان.

## التمرين الثامن عشر (تركيب تناظرين بالنسبة إلى نقطتين متمايزتين)

A ، B نقطتان ثابتتان ومتمايزتين ، علم نقطة M ، ثم أنشئ $M_1$ نظيرتها بالنسبة إلى A ، و M' نظيرة $M_1$ بالنسبة إلى B.
نقول أن النقطة M' هي صورة M بمركب التناظر بالنسبة إلى A و التناظر بالنسبة إلى B.

أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ .
ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

## حل :




أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ .
لدينا A منتصف $[MM_1]$ و B منتصف $[M_1M']$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس
نجد : (AB) // (MM') و MM' = 2 AB
بما أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{AB}$
ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.
لدينا : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{AB}$ ومنه M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{AB}$
وبالتالي : مركب التناظر المركزي بالنسبة إلى A و التناظر المركزي بالنسبة إلى B بهذا الترتيب هو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{AB}$ .

## التمرين التاسع عشر (تركيب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين)

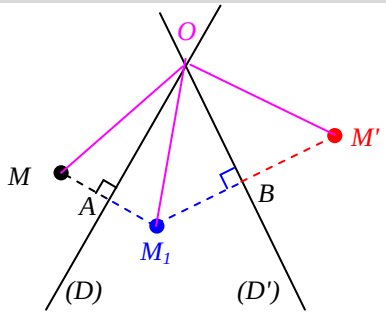
(D) و (D') مستقيمان متقاطعان في نقطة O ، علم النقطة M ، ثم أنشئ $M_1$ نظيرتها بالنسبة إلى (D) ، و M' نظيرة $M_1$ بالنسبة إلى (D').

أ) بين أن : OM = OM' و ، أن الزاوية $\widehat{MOM'}$ ثابتة.
ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.



www.dzexams.com

**حل :**




أ) بين أن : $OM = OM'$ و ، أن الزاوية $\hat{MOM'}$ ثابتة.

لدينا : (D) محور القطعة $[MM_1]$ ويتقاطعان في A .

إذن : $OM = OM_1$ و $\hat{MOA} = \hat{AOM_1}$

ولدينا : (D') محور القطعة $[M_1M']$ ويتقاطعان في B .

إذن : $OM_1 = OM'$ و $\hat{M_1OB} = \hat{BOM'}$ ومنه : $OM = OM'$

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ونضع $\alpha$ قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين (D) و (D')

أي $\hat{AOB} = \alpha$ .

$$\hat{MOM'} = \hat{MOM_1} + \hat{M_1OM'} = 2\hat{AOM_1} + 2\hat{M_1OB} = 2\hat{AOB} = 2\alpha$$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

لدينا : $OM = OM'$ و $\hat{MOM'} = 2\alpha$ إذن M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $2\alpha$

وبالتالي مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين هو الدوران الذي مركزه نقطة تقاطع هذين المستقيمين وزاويته ضعف الزاوية المحصورة بينهما.



www.dzexams.com

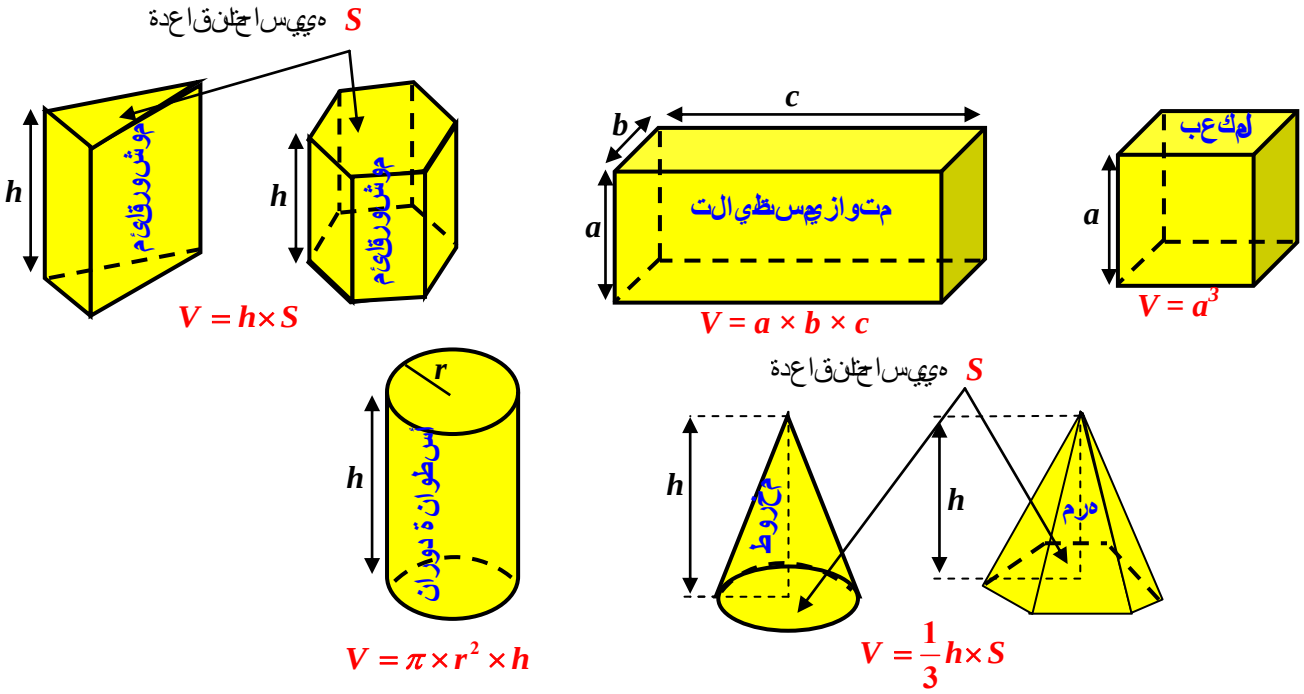
# الهندسة في الفضاء



www.dzexams.com

# I) الهندسة في الفضاء :

## 1) الحجوم لمجسمات مألوفة :

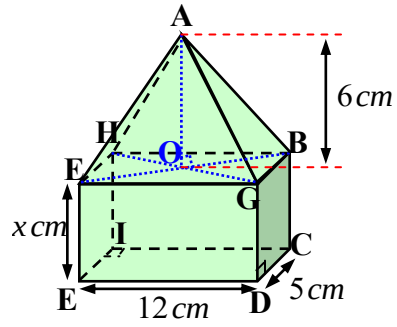



**نشاط :**

الشكل المقابل يمثل مخططا مكون من متوازي مستطيلات أبعاده $5\,cm$ ، $12\,cm$ و $x\,cm$ ؛ وهرم ارتفاعه $AO = 6\,cm$ حيث $O$ تقاطع $[FB]$ و $[HG]$ .

من أجل أي قيمة للمجهول $x$ يكون حجم هذا المجسم يساوي $660\,cm^3$ ؟

بين أن أحرف الهرم $AF$ ، $AG$ ، $AB$ ، $AH$ متساوية واحسب قياسها بتقريب $0,1$ .




**حل النشاط :**

نضع $v_1$ حجم متوازي المستطيلات $BHFGCIED$ و $v_2$ حجم الهرم $ABGFH$ .

$v_1 = 12 \times 5 \times x\,cm^3$ أي : $v_1 = 60x\,cm^3$ و $v_2 = \frac{1}{3} 12 \times 5 \times 6\,cm^3$ أي : $v_2 = 120\,cm^3$

حجم المجسم هو $v = v_1 + v_2$ أي : $v = (60x + 120)\,cm^3$ هذا من جهة .

ومن جهة أخرى لدينا : $v = 660\,cm^3$ إذن : $60x + 120 = 660$ معناه : $60x = 540$ ومعناه أن $x = 9$ .

لدينا $O$ منتصف $[HG]$ و $(AO) \perp (HG)$ إذن $(AO)$ هو محور القطعة $[HG]$ وبالتالي : $AG = AH$

بنفس الطريقة لدينا $O$ منتصف $[FB]$ و $(AO) \perp (FB)$ إذن $(AO)$ هو محور القطعة $[FB]$ وبالتالي : $AB = AF$



www.dzexams.com

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس في كل من المثلثين القائمين $AOB$ و $AOG$ نجد : $AB=\sqrt{AO^2+OB^2}$ و $AG=\sqrt{AO^2+OG^2}$ لدينا $BGFH$ مستطيل وبالتالي قطريه متقايسين ومتناصفين إذن $OB=OG$ ، وبالتالي :

$AG=AB=\sqrt{AO^2+OB^2}$ .

خلاصة : $AG=AH=AB=AF$ .

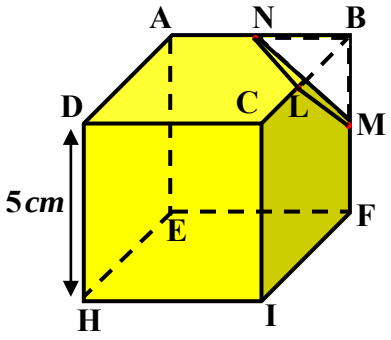
وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم $FBG$ نجد $FB=\sqrt{FG^2+GB^2}$ أي : $2\times OB=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$

وبالتالي : $OB=6,5cm$ ، ومنه : $AB=\sqrt{36+42.25}=\sqrt{78.25}$ إذن $AB\simeq 8,8cm$ .

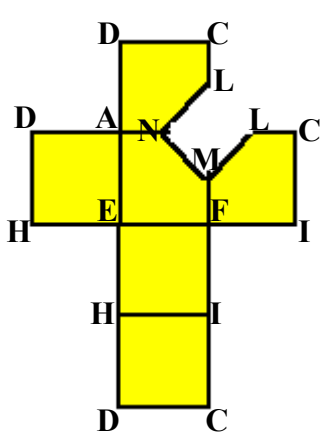
**نشاط :**

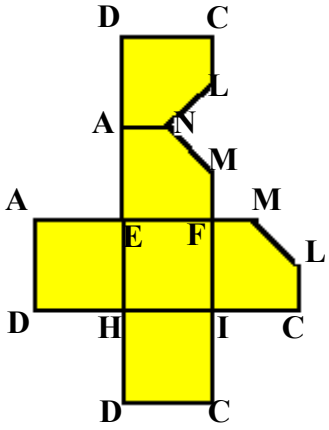
مجسم على شكل مكعب طول حرفه $5cm$ ينقصه هرم $BMLN$ حيث $L$ ، $M$ و $N$ منتصفات $[BC]$ ، $[BF]$ و $[AB]$ على الترتيب كما هو في الشكل .

أنجز تصميما لهذا المجسم .



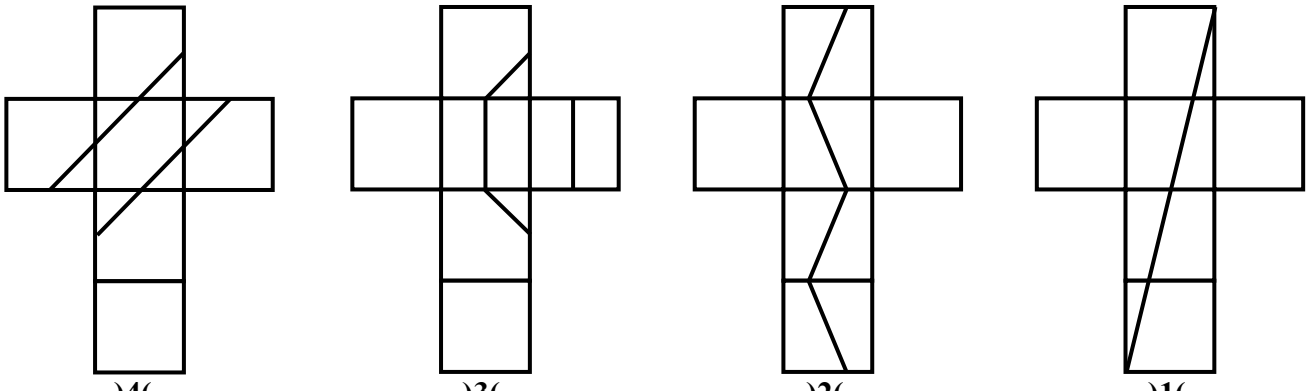

**حل النشاط :**




**نشاط :**

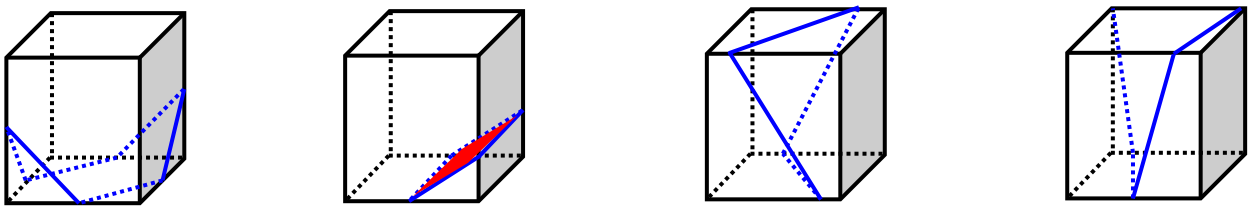
أي التصاميم الآتية هو تصميم لمكعب مرسوم عليه أثر تقاطع مستو مع هذا المكعب .





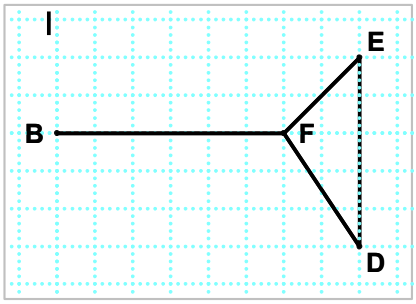

www.dzexams.com

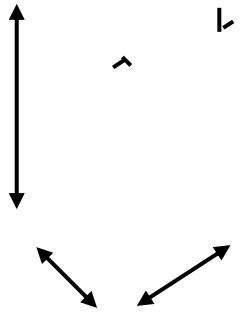
**الحل :**



الأثرات مرسومة باللون الأزرق والشكل الثالث هو الذي علية أثر تقاطع مستو.

**نشاط :**



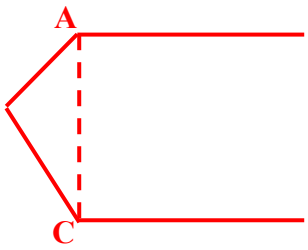




الشكل الثاني هو بداية لتمثيل بالمنظور متساوي القياس للموشور القائم الممثل بالشكل الأول .

أ) أكمل الشكل الثاني للحصول على تمثيل بالمنظور متساوي القياس لنفس الموشور .

ب) أحسب مساحته الكلية وحجمه .

**الحل :**




نسمي $S_1$ مساحة الوجه $(ABC)$ لدينا : $S_1 = \frac{1}{2} AB \times AC$ .

ومنه : $S_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24\,cm^2$ . مع الملاحظة أن الوجهين $(ABC)$ و $(DEF)$ لهما نفس المساحة .

نسمي $S_2$ ، $S_3$ و $S_4$ مساحات الأوجه $(ABFE)$ ، $(BCDF)$ و $(ACDE)$ على الترتيب مع الملاحظة أن الأوجه الثلاث هي على شكل مستطيلات .

$S_2 = 6 \times 12 = 72\,cm^2$ $\quad$ $S_3 = 8 \times 12 = 96\,cm^2$

لحساب $S_4$ نحسب أولا $AC$ وهذا باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم $ABC$ ، $AC = \sqrt{36+64} = 10\,cm$ .

إذن : $S_4 = 10 \times 12 = 120\,cm^2$ .

وبالتالي : المساحة الكلية للمجسم هي $S$ حيث : $S = 2S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ أي : $S = 336\,cm^2$

حجم المجسم هو $V$ حيث $V = AE \times S_1$ أي : $V = 12 \times 24 = 288\,cm^3$



www.dzexams.com

## 2) التمثيل بالمنظور متساوي القياس :

لتمثيل الأشكال في الفضاء يمكن استعمال عدة تقنيات من بينها التمثيل بالمنظور متساوي القياس والقواعد الخاص بهذه التقنية تتضمن ما يلي :

- المحافظة على توازي المستقيمات ، على استقامية النقط ، وعلى منتصفات القطع .
- تمثل الخطوط المرئية (التي نراها في الحقيقة) بخطوط مستمرة ؛ والخطوط المخفية (التي لا نراها عند تصور رؤية المجسم) بخطوط متقطعة .
- على مستوي الواجهة عناصر الرسم تمثل بمقادير حقيقية (مقادير الزوايا والمسافات) .

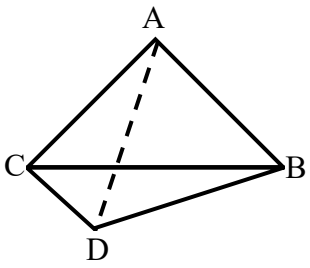
**ملاحظات :**

- المستوي يمثل بمتوازي أضلاع .
- نمثل مستقيمين متقاطعين كما هما وفي بعض الأحيان بمستقيمين متطابقين .
- نمثل النقط في استقامية كما هي وفي بعض الأحيان بنقطة واحة .

**تمرين:**

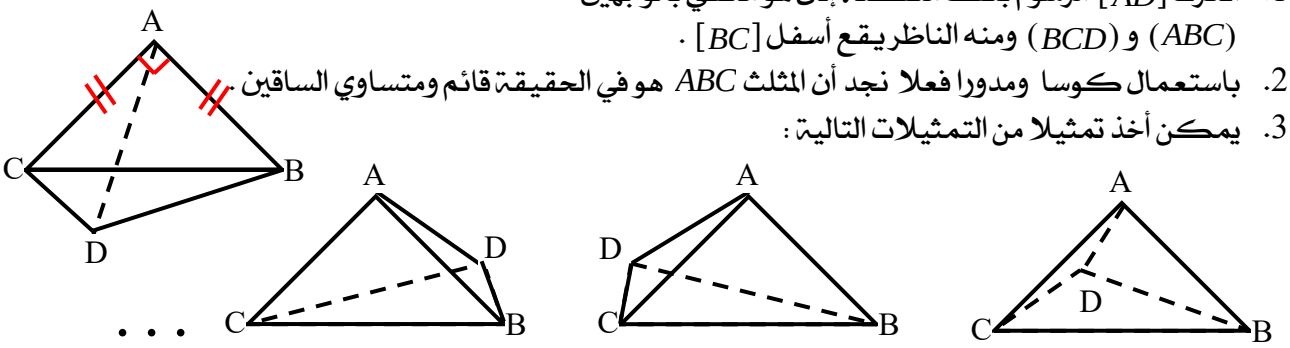
$ABCD$ رباعي وجوه حيث الوجه $(ABC)$ يقع في مستوي الواجهة (أنظر الشكل)

1. بين أن الناظر يقع تحت $[BC]$ والنقطة $A$ تقع فوق $[BC]$ .
2. باستعمال أدوات هندسية تحقق في الشكل أن المثلث $ABC$ هو في الحقيقة قائم ومتساوي الساقين .
3. أرسم تمثيلا لنفس المجسم باعتبار أن النقطة $A$ والناظر يقعان فوق $[BC]$ .



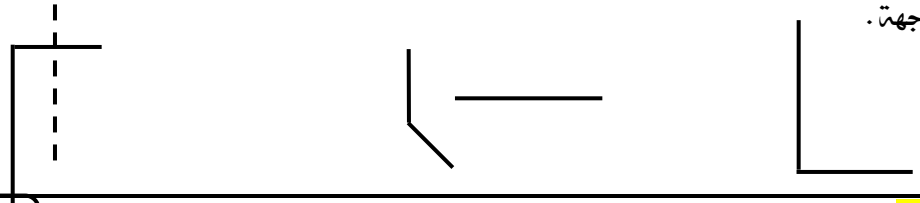

**الحل :**

1. الحرف $[AD]$ مرسوم بنقط متقطعة إذن هو مخفي بالوجهين $(ABC)$ و $(BCD)$ ومنه الناظر يقع أسفل $[BC]$ .
2. باستعمال كوسا ومدورا فعلا نجد أن المثلث $ABC$ هو في الحقيقة قائم ومتساوي الساقين .
3. يمكن أخذ تمثيلا من التمثيلات التالية :




**تمرين**

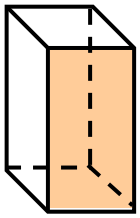
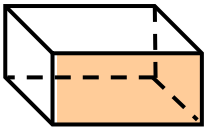
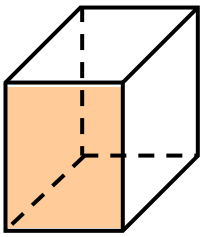
الأشكال الثلاثة الآتية هي بداية لتمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي المستطيلات أكمل كل منها ولون الوجه الموجود في مستوي الواجهة .



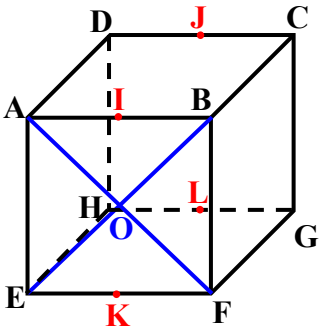


www.dzexams.com

الحل :

## أعمال موجهة




$ABCDEFGH$ مكعب، $I$ منتصف الحرف $[AB]$ ، $J$ منتصف الحرف $[DC]$ ، $K$ منتصف الحرف $[EF]$ ، $L$ منتصف الحرف $[GH]$ .
$O$ نقطة تقاطع المستقيمين $(AF)$ و $(BE)$ .

1) النقط والمستويات :

أ. النقطتان $I$ و $H$ تنتميان إلى المستوي الذي يشمل النقط $A$ ، $B$ و $E$ ؟

ب. النقطتان $O$ و $D$ تنتميان إلى المستوي الذي يشمل النقط $F$ ، $G$ و $A$ ؟

2) تقاطع مستويين :

أ) $(P)$ هو المستوي الذي يشمل النقط $A$ ، $B$ ، $F$ ، $E$ ؛ و$(\Pi)$ المستوي الذي يشمل النقط $F$ ، $G$ و $A$ .
هل المستويين $(P)$ و$(\Pi)$ يتقاطعان ؟

ب) هل المستوي $(P)$ يقطع المستوي الذي يشمل النقط $C$ ، $D$ ، $G$ ، $H$ ؟

ج) أرسم على المكعب السابق تقاطع المستوي $(P')$ الذي يشمل النقط $A$ ، $C$ ، $F$ مع المستوي $(P)$ ؛ ثم مع المستوي الذي يشمل النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ ؛ ثم مع المستوي الذي يشمل $B$ ، $F$ ، $G$ ، $C$ .

د) هل المستوي $(P')$ يقطع المستوي الذي يشمل النقط $A$ ، $E$ ، $H$ ، $D$ ؟

3) تقاطع مستقيم ومستو

أ) هل المستقيمين $(IJ)$ و $(CG)$ يقطعان المستوي $(P)$ ؟

ب) المستقيم $(JO)$ يقطع المستوي الذي يشمل النقط $E$ ، $F$ ، $G$ ، $H$ ؟

4) تقاطع مستقيمين :

أ) هل المستقيمين $(AF)$ و $(JO)$ متقاطعان ؟

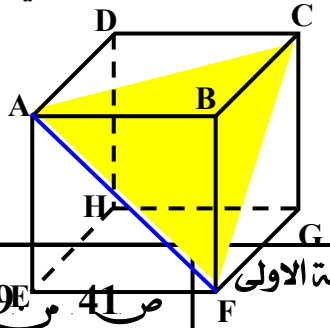
ب) هل المستقيمين $(KL)$ و $(JO)$ متقاطعان ؟

ج) هل المستقيمين $(AF)$ و $(BG)$ متقاطعان ؟

## حل

1) أ) $I$ هي نقطة من المستقيم $(AB)$ إذن هي نقطة من كل مستو يشمل المستقيم $(AB)$ وبالتالي $I$ تنتمي إلى المستوي الذي يشمل النقط $A$ ، $B$ و $E$ . النقطة $H$ لا تنتمي إلى المستوي الواجهة $(ABE)$ .

ب) المستوي $(AGF)$ يشمل المستقيم $(AF)$ و $O$ نقطة من $(AF)$ إذن $O$ تنتمي إلى المستوي $(AGF)$ .
لدينا المستقيمان $(AD)$ و $(FG)$ متوازيان تماما وبالتالي يوجد مستو واحد يشملهما وهو $(AGF)$ إذن $D$ تنتمي إليه .




2) أ) المستويان $(P)$ و$(\Pi)$ يتقاطعان في المستقيم $(AF)$ .

ب) المستوي $(P)$ والمستوي الذي يشمل النقط $C$ ، $D$ ، $G$ ، $H$ منفصلان
لا توجد أي نقطة مشتركة بينهما .

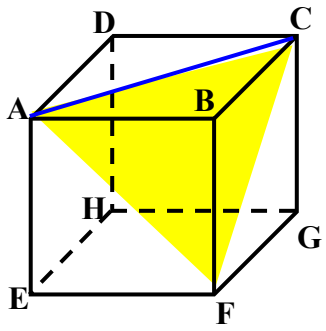
ج) رسم تقاطع المستوي $(P')$ الذي يشمل النقط $A$ ، $C$ ، $F$ مع المستوي $(P)$ ،



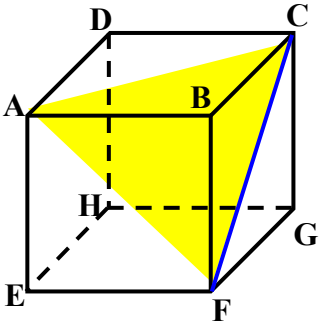
www.dzexams.com

وهو المستقيم $(AF)$ .

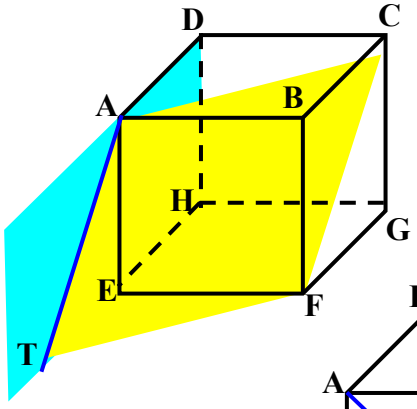
رسم تقاطع $(P')$ مع المستوي الذي يشمل النقط رسم تقاطع
$A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ وهو المستقيم $(AC)$ .




$(P')$ مع المستوي الذي يشمل النقط
$B$ ، $F$ ، $G$ ، $C$ وهو المستقيم $(CF)$

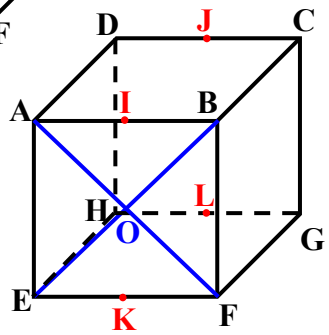



د) المستوي $(P')$ يقطع المستوي الذي يشمل النقط $A$ ، $E$ ، $H$ ، $D$
لأنهما متمايزان ولهما نقطة مشتركة $A$ إذن تقاطعهما يكون مستقيم
يشمل $A$ وهو المستقيم $(AT)$




3) أ) المستقيم $(IJ)$ يقطع المستوي $(P)$ في نقطة واحدة
وهي $I$ بينما $(CG)$ لا يقطع المستوي $(P)$ هما متوازيان

ب) $(JO)$ لا يقطع المستوي الذي يشمل النقط $E$ ، $F$ ، $G$ ،
$H$ بل هما متوازيان .




4) أ) المستقيمان $(AF)$ و $(JO)$ يتقاطعان في النقطة $O$ .
ب) المستقيمان $(KL)$ و $(JO)$ متقاطعان في نقطة .
ج) المستقيمان $(AF)$ و $(BG)$ غير متقاطعين .

## قواعد أساسية في الهندسة الفضائية :

- بديهية : إذا كانت $A$ ، $B$ ، $C$ ثلاث نقط ليست في استقامية فإنه يوجد مستو واحد يشملها .
- بديهية : إذا كانت $A$ و $B$ نقطتين متمايزتين من مستو $(P)$ فإن كل نقط المستقيم $(AB)$ تنتمي إلى المستوي $(P)$ .
- بديهية : إذا كان مستويان متمايزان ولهما نقطة مشتركة فإن تقاطعهما هو مستقيم .

## نتائج :

يتعين المستوي بـ :
- ثلاث نقط ليست في استقامية ؛
- مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه ؛
- مستقيمين متوازيان تماما ؛
- مستقيمين متقاطعان في نقطة واحدة .

## ملاحظة :

كل خواص ونتائج الهندسة المستوية تبقى صحيحة في أي مستو من الفضاء .



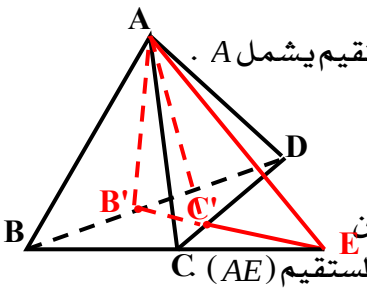
www.dzexams.com

**تمرين**

$ABCD$ رباعي وجوه. $B'$ و $C'$ نقطتان من المستقيمين $(DB)$ و $(DC)$ على الترتيب.
نفترض أن المستقيمين $(BC)$ و $(B'C')$ يتقاطعان في النقطة $E$.
برهن أن المستقيم $(AE)$ هو تقاطع المستويين $(ABC)$ و $(AB'C')$.

**الحل :**

**الطريقة :** يكفي إثبات أن المستويين يشملان نقطتين متمايزتين.
المستويان $(ABC)$ و $(AB'C')$ متمايزان ولهما نقطة مشتركة $A$، إذن تقاطعهما هو مستقيم يشمل $A$.
$E$ هي نقط من $(BC)$ إذن هي نقطة من المستوي $(ABC)$، وكذلك هي نقطة من $(B'C')$ إذن هي نقطة من المستوي $(AB'C')$ وبالتالي $E$ هي نقطة مشتركة للمستويين $(ABC)$ و $(AB'C')$.
$E$ هي نقط من المستوي $(BCD)$ ولكن $A$ خارج هذا المستوي إذن $A$ و $E$ نقطتان متمايزتان
$A$ و $E$ نقطتان متمايزتان تنتميان إلى المستويين $(ABC)$ و $(AB'C')$ إذن تقاطعهما هو المستقيم $(AE)$

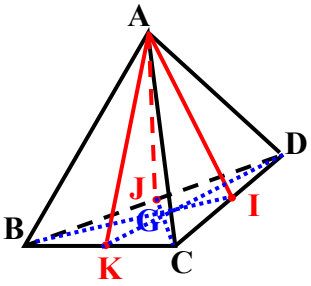



**تمرين 2 :**

$ABCD$ رباعي وجوه. النقط $I$ ، $J$ ، $K$ منتصفات الأحرف $[CD]$ ، $[DB]$ و $[BC]$ على الترتيب.
برهن أن المستويات $(ABI)$ ، $(ACJ)$ و $(ADK)$ لها مستقيم مشترك.

**الحل :**

**الطريقة :**
يكفي إثبات أن نقطتين مختلفتين تنتميان إلى المستويات الثلاث.
النقطة $A$ تنتمي إلى المستويات الثلاث $(ABI)$ ، $(ACJ)$ و $(ADK)$.
في المستوي $(BCD)$ متوسطات المثلث $BCD$ تتقاطع في نقطة وحيدة $G$ (مركز ثقله)
وبالتالي النقطة $G$ تنتمي إلى المستقيمات $(BI)$ ، $(CJ)$ ، $(DK)$ ومنه النقطة $G$ تنتمي إلى المستويات $(ABI)$ ، $(ACJ)$ و $(ADK)$.
النقطة $A$ هي خارج المستوي $(BCD)$ وبالتالي : النقطتان $A$ و $G$ متمايزتان وتنتميان إلى المستويات الثلاث $(ABI)$ ، $(ACJ)$ و $(ADK)$. إذن تقاطع هذه المستويات هو المستقيم $(AG)$.




**تمرين 3 :**

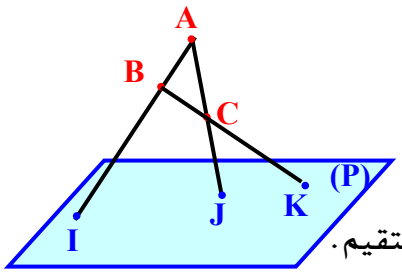
$(P)$ مستو ؛ $A$ ، $B$ ، $C$ ثلاث نقط ليست في استقامية ولا تنتمي إلى المستوي $(P)$.
نفترض أن المستقيمات $(AB)$ ، $(AC)$ و $(BC)$ تقطع المستوي $(P)$ في النقط $I$ ، $J$ ، $K$ على الترتيب.
بين أن النقط $I$ ، $J$ ، $K$ في استقامية.

**الحل :**



www.dzexams.com

**الطريقة :** إذا كانت هذه النقط تنتمي إلى مستوين متمايزين فهي تنتمي إلى تقاطعهما الذي هو مستقيم وبالتالي يكفي تبيان أن النقط $I$ ، $J$ ، $K$ تنتمي إلى مستوين متمايزين .



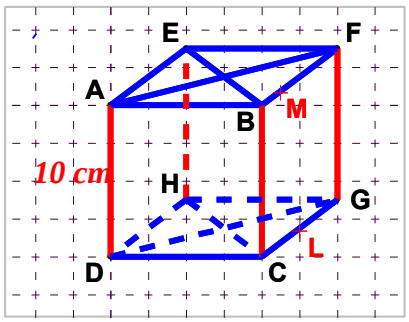

النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ليست في استقامية إذن تعين مستو نسميه $(ABC)$ .
النقط $I$ ، $J$ ، $K$ تنتمي إلى المستوي $(P)$ . وكذلك هذه النقط
تنتمي إلى المستقيمات $(AB)$ ، $(AC)$ و $(BC)$ التي هي في المستوي
$(ABC)$ ومنه النقط $I$ ، $J$ ، $K$ تنتمي إلى المستوي $(ABC)$
وبالتالي النقط $I$ ، $J$ ، $K$ تنتمي إلى المستويين المتمايزين $(P)$ و $(ABC)$ .
إذن النقط $I$ ، $J$ ، $K$ تنتمي إلى تقاطع المستويين $(P)$ و $(ABC)$ الذي هو مستقيم .
وبالتالي النقط $I$ ، $J$ ، $K$ في استقامية .
الأوضاع النسبية للمستويات والمستقيمات في الفضاء :

**نشاط:**

الشكل المقابل هو لمكعب طول حرفه $10\,cm$ مرسوم بمنظور متساوي القياس ،
النقطتان $M$ و $L$ هما تقاطع $[BF]$ و $[CG]$ مع مستقيمات رصف الورقة .
باستعمال بيانات الشكل أجب عن الأسئلة الآتية :

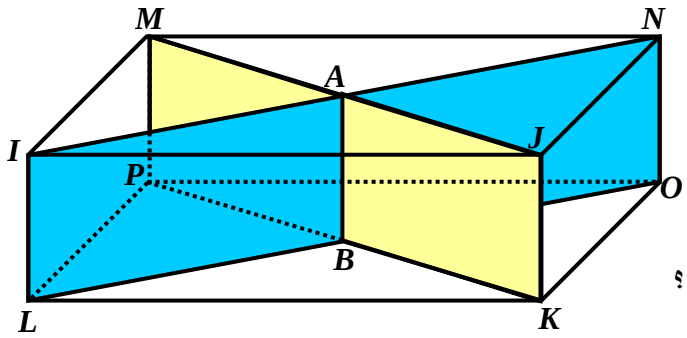
1. أذكر المستقيمات التي كل منها عمودي على $(FG)$ .
2. أذكر المستقيمات التي كل منها يوازي $(FG)$ .
3. أذكر مستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين .
4. هل المستقيمين $(EB)$ و $(HB)$ متعامدان ؟
5. ما نوع الرباعي $EBCH$ ؟
6. عين القيسين $BM$ و $CL$ وأحسب $ML$ .

حل النشاط :




1. المستقيمات العمودية على $(FG)$ هي : $(AB)$ ، $(AE)$ ، $(FA)$ ، $(FB)$ ، $(FE)$ ، $(EB)$ ، $(GH)$ ، $(GD)$ ، $(GC)$ ، $(HC)$ ، $(DH)$ ، $(DC)$ .
2. المستقيمات الموازية للمستقيم $(FG)$ هي : $(BC)$ ، $(AD)$ ، $(EH)$ .

**نشاط :**




الشكل $LKOPIJNM$ هو تمثيل لمتوازي مستطيلات بالمنظور متساوي القياس .
لاحظ وأجب عن الأسئلة الآتية :

1. أذكر مستويين متوازيين ؟
2. أذكر مستويين متعامدين ؟
3. ما هو الوضع النسبي للمستويين $(NOLI)$ و $(MJKP)$ ؟

الحل :



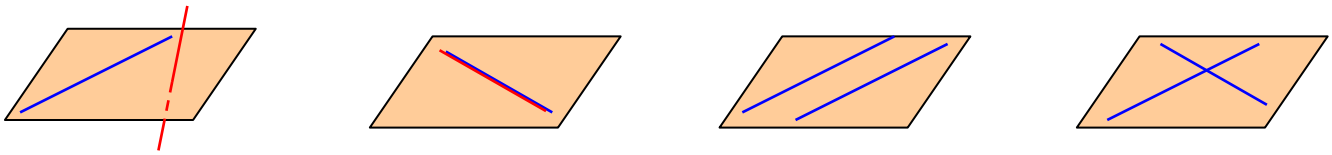
www.dzexams.com

1. $(IMNJ)$ و $(LKOP)$ مستويان متوازيان.
$(JKON)$ و $(IMPL)$ مستويان متوازيان.
$(IJKL)$ و $(MNOP)$ مستويان متوازيان.
2. $(IMNJ)$ و $(JKON)$ مستويان متعامدان.
$(IMNJ)$ و $(IJKL)$ مستويان متعامدان.
$(IMNJ)$ و $(MJKP)$ مستويان متعامدان.
$(LKOP)$ و $(JKON)$ مستويان متعامدان.
$(LKOP)$ و $(IJKL)$ مستويان متعامدان.
$(LKOP)$ و $(MJKP)$ مستويان متعامدان.
$(IMNJ)$ و $(IMPL)$ مستويان متعامدان.
$(IMNJ)$ و $(MNOP)$ مستويان متعامدان.
$(IMNJ)$ و $(NOLI)$ مستويان متعامدان.
$(LKOP)$ و $(IMPL)$ مستويان متعامدان.
$(LKOP)$ و $(MNOP)$ مستويان متعامدان.
$(LKOP)$ و $(NOLI)$ مستويان متعامدان.
3. المستويان $(NOLI)$ و $(MJKP)$ متقاطعان وتقاطعهما هو المستقيم $(AB)$.

## الاوضاع النسبية

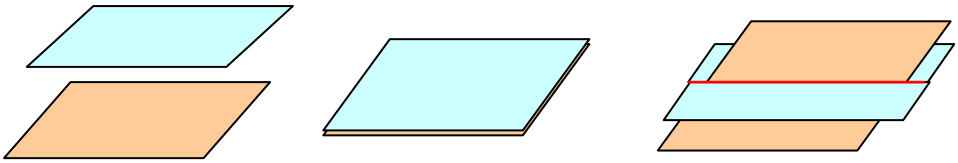
### ❖ الوضع النسبي لمستقيمين:

$D$ و $D'$ مستقيمان في الفضاء
يكون $D$ و $D'$ إما
- ✓ متقاطعان في نقطة واحدة
- ✓ متوازيان تماما وتقاطعهما خال
- ✓ منطبقين وإما ليس من نفس المستوي وتقاطعهما خال.



### ❖ الوضع النسبي لمستويين:

$P$ و $P'$ مستويان: إما يكون $P$ و $P'$ متقاطعان وتقاطعهما مستقيم ؛ إما يكونا منطبقين تقاطعهما هو المستوي $P$ ؛ وإما متوازيان تماما تقاطعهما خال.



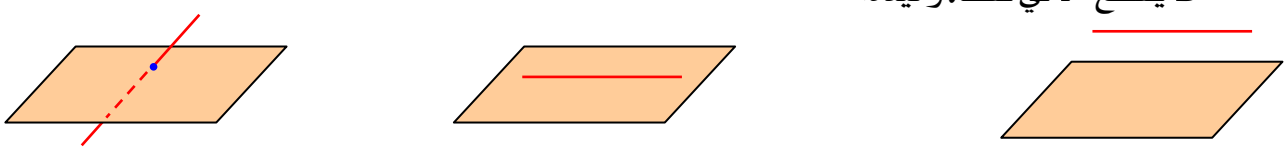
يعرف المستقيم في الفضاء بجملة معالتين لمستويين متقاطعين.

### ❖ الوضع النسبي لثلاث مستويات:

تقاطع ثلاث مستويات في الفضاء هو
- ✓ إما نقطة
- ✓ إما مستقيم
- ✓ إما خال

### ❖ الوضع النسبي لمستو ومستقيم:

$P$ مستو و $D$ مستقيم في الفضاء.
- ✓ يكون $D$ موازيا تماما لـ $P$ والتقاطع يكون خال.
- ✓ يكون $D$ محتو في $P$ والتقاطع هو $D$ .
- ✓ $D$ يقطع $P$ في نقطة وحيدة.





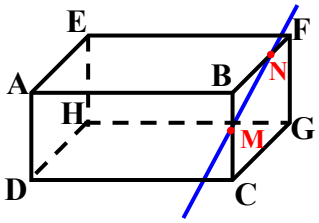
www.dzexams.com

**خواص :**

$(P)$ مستو و $(D)$ مستقيم من الفضاء .
من أجل كل نقطة $A$ من الفضاء يوجد مستقيم واحد يشمل $A$ ويوازي $(D)$ ؛ ويوجد مستو واحد يشمل $A$ ويوازي $(P)$ .
يكون مستقيم موازيا لمستو إذا وفقط كان موازيا لمستقيم من هذا المستوي .
إذا قطع مستقيم أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع الثاني .
إذا كان مستقيم يوازي أحد المستويين المتوازيين فإنه يكون موازيا للثاني .
إذا قطع مستو أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع الثاني .
المستويان الموازيان لثالث هما متوازيان .
إذا كان مستقيم يوازي مستويين متمايزين ومتقاطعان فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما .
إذا كان مستويان متوازيان فإن كل مستو غير موازي لهما يقطعهما في مستقيمين متوازيين .

**تمرين :**

الشكل المقابل هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ .
$M$ نقطة من $[BC]$ و $N$ نقطة من $[BF]$ .
أذكر الوضع النسبي مع تبرير الجواب لكل من :




أ. المستقيم $(MN)$ والمستوي $(BCF)$ .
ب. المستقيم $(MN)$ والمستوي $(ABFE)$ .
ج. المستقيم $(MN)$ والمستوي $(ADHE)$ .
د. المستقيم $(MN)$ والمستقيم $(CG)$ .
ه. المستقيم $(EB)$ والمستقيم $(HC)$ .
و. المستوي $(NBM)$ والمستوي $(BEH)$ .
ز. المستوي $(NBM)$ والمستوي $(AEH)$ .

**الحل :**

أ. لدينا $M$ نقطة من $[BC]$ و $N$ نقطة من $[BF]$ إذن $M$ و $N$ نقطتان من $(BCF)$ وبالتالي كل نقط المستقيم $(MN)$ تنتمي إلى المستوي $(BCF)$ أي المستوي $(BCF)$ يشمل المستقيم $(MN)$ .
ب. بما أن $N$ نقطة من $[BF]$ فإنها تنتمي إلى المستوي $(ABFE)$ ، و $M$ نقطة من $[BC]$ إذن $M$ هي خارج المستوي $(ABFE)$ وبالتالي المستقيم $(MN)$ يقطع المستوي $(ABFE)$ في نقطة وحيدة وهي $N$ .
ج. المستويان $(ADHE)$ و $(BCF)$ متوازيان تماما ، و المستوي $(BCF)$ يشمل المستقيم $(MN)$ إذن المستقيم $(MN)$ والمستوي $(ADHE)$ متوازيان تماما .
د. المستقيمات $(MN)$ و $(CG)$ و $(BF)$ من نفس المستوي $(BCF)$ ولدينا المستقيمين $(CG)$ و $(BF)$ متوازيين ، بما أن $(MN)$ يقطع $(BF)$ فإن $(MN)$ يقطع $(CG)$ .
ه. المستويان $(ABFE)$ و $(DCGH)$ متوازيان تماما ويشملان المستقيمين $(EB)$ و $(HC)$ على الترتيب إذن المستقيمين $(EB)$ و $(HC)$ متوازيين تماما .
و. المستويان $(NBM)$ و $(BEH)$ متمايزان ولهما نقطة مشتركة إذن هما متقاطعان في مستقيم .
ز. المستويان $(NBM)$ و $(AEH)$ متوازيان تماما لأن $(NBM)$ هو $(BCGF)$ و $(AEH)$ هو $(ADHE)$ ومن تعريف متوازي المستطيلات لدينا $(BCGF)$ و $(ADHE)$ مستويين متوازيين .



www.dzexams.com

# تمارين الرسم



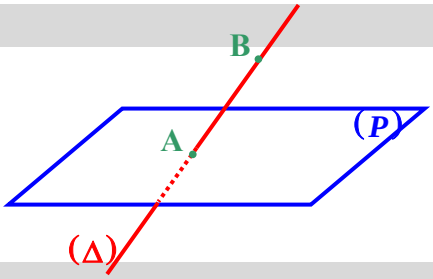
www.dzexams.com

# تمارين محلولة

**تمرين 1**

$(P)$ مستو و $B$ نقطة لا تنتمي إلى $(P)$ . $(\Delta)$ مستقيم يشمل $B$ ويقطع $(P)$ في النقطة $A$ . أرسم هذا الشكل .

**الحل :**



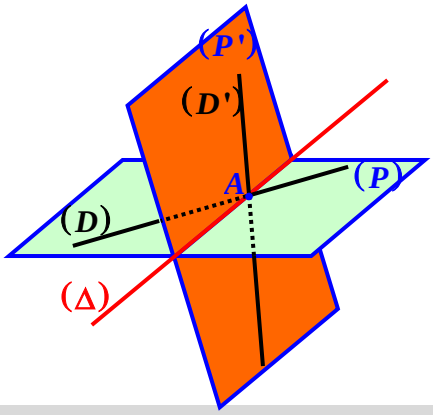

رسمنا المستقيم بشكلين ، خط مستمر وخط متقطع .
الخط المستمر هو الظاهر في الحقيقة والخط المتقطع هو غير ظاهر.

**تمرين 2**

$(P)$ و $(P')$ مستويان متقاطعان في مستقيم $(\Delta)$ . $(D)$ مستقيم من $(P)$ و $(D')$ مستقيم من $(P')$ حيث $(D)$ و $(D')$ يتقاطعان في النقطة $A$ . أرسم هذا الشكل .

**الحل :**

النقطة $A$ هي نقطة تقاطع المستقيمين $(D)$ و $(D')$ إذن هي نقطة مشتركة للمستويين $(P)$ و $(P')$ وبالتالي النقطة $A$ تنتمي إلى مستقيم $(\Delta)$ .

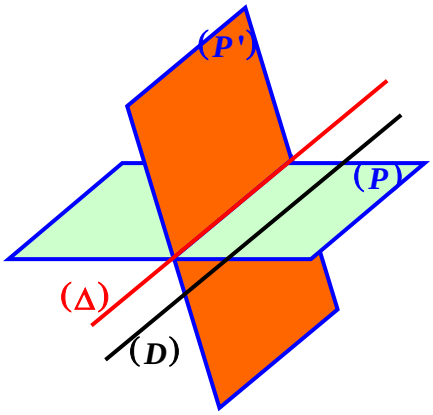



**تمرين 3**

$(P)$ و $(P')$ مستويان متقاطعان في مستقيم $(\Delta)$ . $(D)$ مستقيم من $(P)$ ويوازي $(P')$ . أرسم هذا الشكل .

**الحل :**

المستقيم $(D)$ محتوى $(P)$ في يوازي $(P')$ إذن هو موازي لتقاطعهما $(\Delta)$






www.dzexams.com

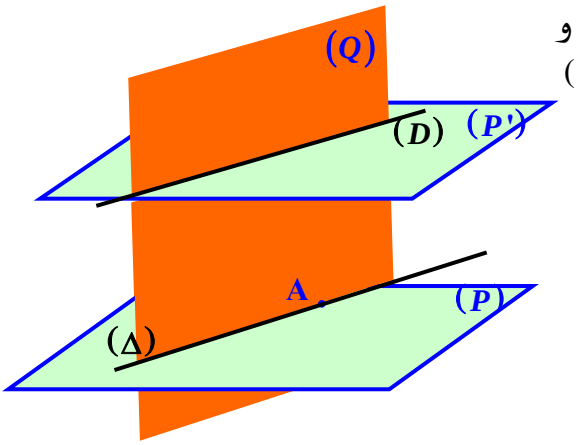
## تمرين 4

$(P)$ و $(P')$ مستويان متوازيان، $A$ نقطة من $(P)$ و $(D)$ مستقيم من $(P')$ ؛ $(Q)$ المستوي المعين بالمستقيم $(D)$ والنقطة $A$ . $(\Delta)$ المستقيم المشترك بين المستويين $(P)$ و $(Q)$ . أرسم هذا الشكل .

## الحل :

المستوي $(Q)$ يقطع كل من المستويين $(P)$ و $(P')$ في المستقيمين $(\Delta)$ و $(D)$ على الترتيب، بما أن $(P)$ و $(P')$ مستويان متوازيان فإن $(\Delta)$ و $(D)$ مستقيمان متوازيان .

التمثيل بالمنظور والتصميم :

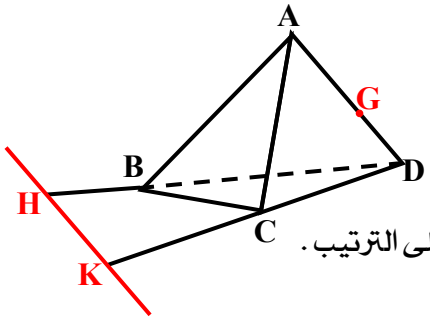



## تمرين 5

في الشكل المقابل لدينا رباعي الوجوه $ABCD$ ، مستقيم $(HK)$ من المستوي $(BCD)$ حيث $(HK)$ لا يوازي $(BC)$ ، ونقطة $G$ من الحرف $[AD]$ .

أ. أرسم تقاطعات المستوي $(GHK)$ مع الأوجه $(ABC)$ ، $(ACD)$ و $(ABD)$ للرباعي الوجوه .

ب. نسمي $I$ و $J$ النقطتين المشتركتين للمستوي $(GHK)$ مع $(AC)$ و $(AB)$ على الترتيب . برهن أن للمستقيمات $(HK)$ ، $(BC)$ و $(IJ)$ نقطة مشتركة وحيدة .




## الحل :

أ. تقاطع المستوي $(GHK)$ مع الوجه $(ABC)$ :

النقط $A$ ، $G$ ، $D$ ، $C$ ، $K$ تنتمي إلى نفس المستوي $(ACD)$

إذن المستقيمين $(AC)$ و $(GK)$ متقاطعان في نقطة نسمها $I$ .

النقط $A$ ، $G$ ، $D$ ، $B$ ، $H$ تنتمي إلى نفس المستوي $(ABD)$

إذن المستقيمين $(AB)$ و $(GH)$ متقاطعان في نقطة نسمها $J$ .

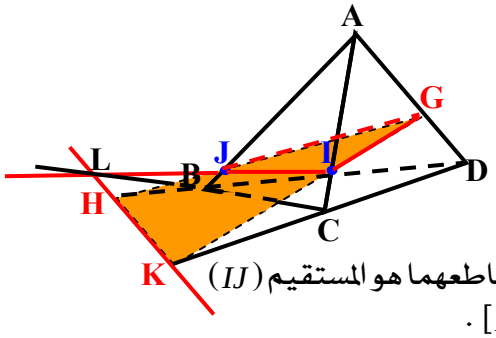
المستويان $(GHK)$ و $(ABC)$ متمايزان ويشتركان في نقطتين $I$ و $J$ إذن تقاطعهما هو المستقيم $(IJ)$

وبالتالي تقاطع المستوي $(GHK)$ مع الوجه $(ABC)$ هي القطعة المستقيمة $[IJ]$ .

ونستنتج مباشرة أن تقاطع المستوي $(GHK)$ مع الوجه $(ACD)$ هي القطعة $[IG]$ .

وكذلك تقاطع المستوي $(GHK)$ مع الوجه $(ABD)$ هي القطعة $[JG]$ .

ب. في المستوي $(BCD)$ لدينا المستقيمين $(HK)$ و $(BC)$ غير متوازيين نسمي $L$ تقاطعهما .

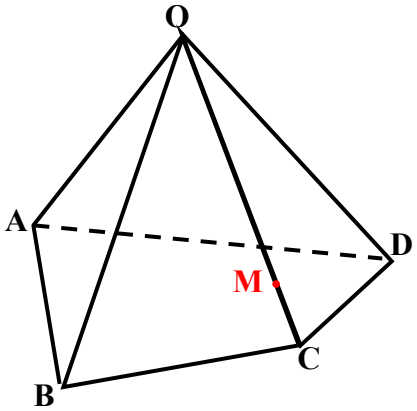





www.dzexams.com

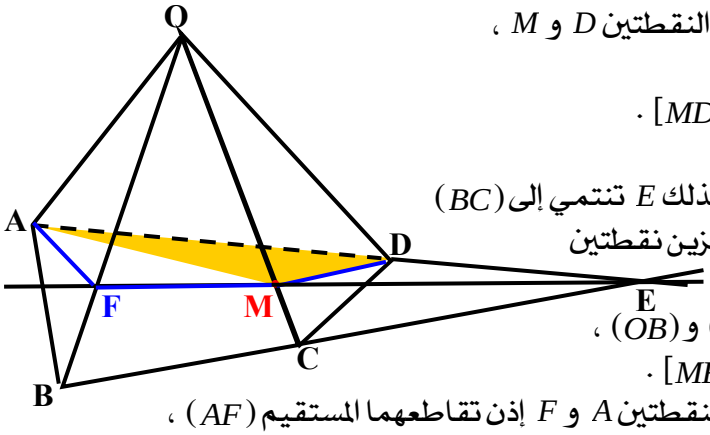
بما أن $L$ هي نقطة من $(BC)$ فإنها تنتمي إلى المستوي $(ABC)$ وبما أنها نقطة من $(HK)$ فهي تنتمي إلى المستوي $(GHK)$
إذن $L$ تنتمي إلى تقاطع المستويين $(ABC)$ و $(GHK)$ الذي يتمثل في المستقيم $(IJ)$
وبالتالي $L$ هي نقطة مشتركة للمستقيمات $(HK)$ ، $(BC)$ و $(IJ)$ .

## تمرين 6



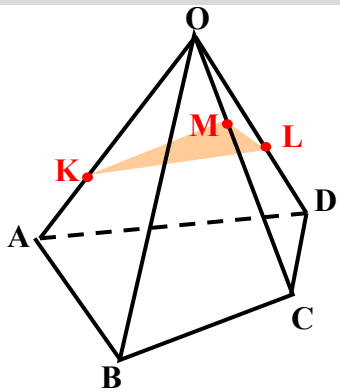

الشكل المقابل هو لهرم قاعدته الرباعي $ABCD$ .
$M$ نقطة من الحرف $[OC]$ .
أرسم تقاطعات الأوجه $(OCD)$ ، $(OBC)$ و $(OAB)$
مع المستوي $(MAD)$ .
إرشاد : أنشئ نقطة تقاطع المستقيمين $(AD)$ و $(BC)$ .

## الحل:




- المستويان $(OCD)$ و $(MAD)$ متمايزان ويشتركان في النقطتين $D$ و $M$ ،
إذن تقاطعهما هو المستقيم $(MD)$ .
وبالتالي تقاطع الوجه $(OCD)$ والمستوي $(MAD)$ هو القطعة $[MD]$ .
- نسمي $E$ نقطة تقاطع المستقيمين $(AD)$ و $(BC)$ .
$E$ تنتمي إلى $(AD)$ إذن $E$ تنتمي إلى المستوي $(MAD)$ ، وكذلك $E$ تنتمي إلى $(BC)$
إذن $E$ تنتمي إلى المستوي $(OBC)$ ومنه لهذين المستويين المتمايزين نقطتين مشتركتين $E$ و $M$ ومنه تقاطعهما هو المستقيم $(EM)$ .
في المستوي $(OBC)$ ، نضع $F$ نقطة تقاطع المستقيمين $(EM)$ و $(OB)$ ،
وبالتالي تقاطع الوجه $(OBC)$ والمستوي $(MAD)$ هو القطعة $[MF]$ .
لدينا المستويين المتمايزين $(OAB)$ و $(MAD)$ يشتركان في النقطتين $A$ و $F$ إذن تقاطعهما المستقيم $(AF)$ ،
وبالتالي تقاطع الوجه $(OAB)$ والمستوي $(MAD)$ هو القطعة $[AF]$ .

## تمرين 7




الشكل التالي هو لهرم قاعدته الرباعي $ABCD$ . $K$ نقطة من الحرف $[OA]$ ،
$L$ نقطة من الحرف $[OD]$ و $M$ نقطة من الحرف $[OC]$ .
أرسم تقاطع لكل من الأوجه $(OAD)$ ، $(ODC)$ ، $(OBC)$ و $(OAB)$
مع المستوي $(KLM)$ ، علل الرسم .
إرشاد : أنشئ تقطع المستويين $(OAD)$ و $(OBC)$

## الحل :

- المستويان $(OAD)$ و $(KLM)$ متمايزان ويشتركان في النقطتين $K$ و $L$ ،
إذن تقاطعهما هو المستقيم $(KL)$ ،
ومنه تقاطع الوجه $(OAD)$ والمستوي $(KLM)$ هو القطعة $[KL]$ .
- وبنفس الطريقة تقاطع الوجه $(ODC)$ والمستوي $(KLM)$

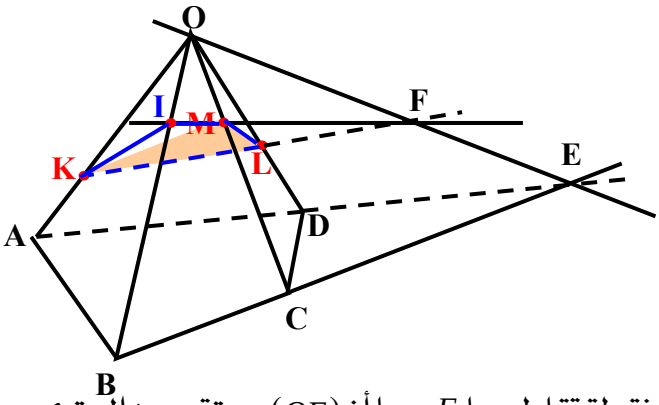


www.dzexams.com

هو القطعة $[LM]$ .

- نسمي $E$ نقطة تقاطع المستقيمين $(AD)$ و $(BC)$ .

المستويان المتمايزان $(OAD)$ و $(OBC)$ يشتركان في النقطتين $O$ و $E$ ،
إذن تقاطعهما هو المستقيم $(OE)$ .




المستقيمان $(KL)$ و $(OE)$ هما من نفس المستوي $(OAD)$ نسمي نقطة تقاطعهما $F$ ، بما أن $(OE)$ مستقيم من المستوي $(OBC)$ فإن النقطة $F$ تنتمي إلى المستوي $(OBC)$ وبما أن $(KL)$ مستقيم من المستوي $(KLM)$ فإن النقطة $F$ تنتمي إلى المستوي $(KLM)$ ، وبالتالي المستويان $(OBC)$ و $(KLM)$ يشتركان في النقطتين $F$ و $M$ إذن تقاطعهما هو المستقيم $(MF)$ .
في المستوي $(OBC)$ نسمي $I$ نقطة تقاطع المستقيمين $(MF)$ و $(OB)$ .
إذن تقاطع الوجه $(OBC)$ والمستوي $(KLM)$ هو القطعة $[MI]$ .

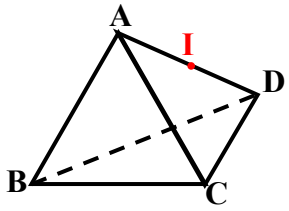
- نستنتج مباشرة أن تقاطع الوجه $(OAB)$ والمستوي $(KLM)$ هو القطعة $[KI]$ لأن المستويان $(OAB)$ و $(KLM)$ متمايزان ويشتركان في النقطتين $K$ و $I$ .

## تمرين 8

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم ( أحرفه متقايسة ) ، النقطة $I$ منتصف $[AD]$ (أنظر الشكل)

أ. تحقق من أن الوجه $(ABC)$ يقع في مستوي الواجهة .
ب. أنقل الشكل وأرسم المستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل $I$ ويوازي المستقيم $(BD)$ .
ج. علم النقطتين $M$ و $N$ منتصفي الحرفين $[BC]$ و $[CD]$ على الترتيب .
ماذا يمثل كل من :

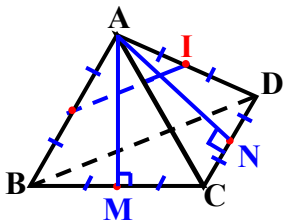
- المستقيم $(AM)$ بالنسبة للمثلث $ABC$ .
- المستقيم $(AN)$ بالنسبة للمثلث $ACD$ .




## الحل :

أ. الأشكال الواقعة في المستوي الواجهة تحافظ على قياسات الزوايا والأطوال وهذا ما نلاحظه على المثلث متقايس الأضلاع $ABC$ إذن الوجه $(ABC)$ يقع في مستوي الواجهة .
ب. النقطة $I$ والمستقيم $(BD)$ يعينان المستوي $(ABD)$ ،
إذن المستقيم $(\Delta)$ يقع في المستوي $(ABD)$ .
بما أن $I$ منتصف $[AD]$ و $(\Delta)$ يوازي $(BD)$ إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس :
$(\Delta)$ يمر بمنتصف الحرف $[AB]$ .
ج. تعلم النقطتين $M$ و $N$

- في المثلث $ABC$ المستقيم $(AM)$ هو محور القطعة $[BC]$ .
- في المثلث $ACD$ المستقيم $(AN)$ هو محور القطعة $[CD]$ .






www.dzexams.com

# تمارين محلولة

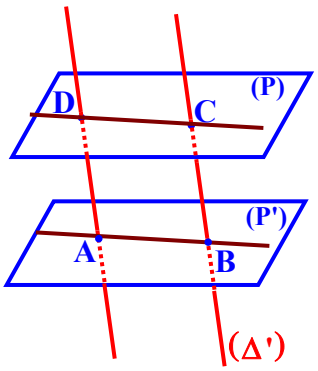


www.dzexams.com

## التمرين الاول

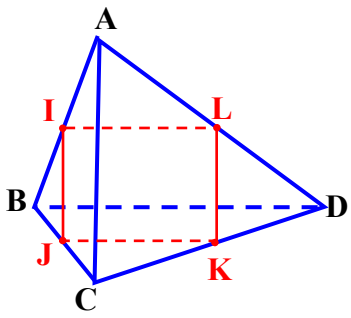
نعتبر مستقيمين متوازيين تماما $(\Delta)$ و $(\Delta')$ يقطعان مستويين متوازيين تماما $(P)$ و $(P')$ في أربع نقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$
برهن أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

**حل :**




لدينا $(\Delta)$ و $(\Delta')$ مستقيمين متوازيين إذن $(AD)$ و $(BC)$ مستقيمين متوازيين
ويعينان مستو $(ABCD)$
المستوي $(ABCD)$ يقطع كل من المستويان المتوازيان $(P)$ و $(P')$ في
مستقيمين متوازيين وهما $(AB)$ و $(DC)$ .
إذن في المستوي $(ABCD)$ لدينا $(AD)$ // $(BC)$ و $(AB)$ // $(DC)$ ومنه
الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

## التمرين الثاني

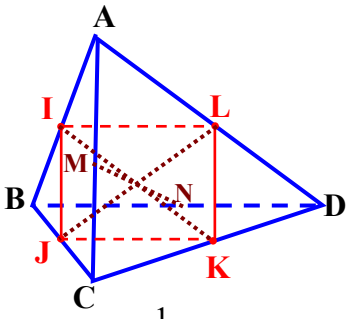



$ABCD$ رباعي وجوه ؛
$I$ ، $J$ ، $K$ و $L$ منتصفات $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ و $[DA]$ على الترتيب .

1. برهن أن الرباعي $IJKL$ متوازي الأضلاع .
2. النقطتان $M$ و $N$ منتصفا $[AC]$ و $[BD]$ على الترتيب .
برهن أن للمستقيمات $(IK)$ ، $(JL)$ و $(MN)$ نقطة مشتركة وحيدة .

**حل :**

1. في المثلث $ABC$ نطبق نتيجة مبرهنة طاليس الخاصة
بالمنتصفات ونحصل على $(IJ)//(AC)$ و $AC = 2IJ$ .
ونطبق نفس النتيجة في المثلث $ACD$ ونحصل على $(LK)//(AC)$ و $AC = 2LK$ .
ومنه : $(IJ)//(LK)$ و $IJ = LK$
بالتالي : المستقيمان $(IJ)$ و $(LK)$ يعينان مستو وهو
$(IJKL)$ والرباعي $IJKL$ هو متوازي الأضلاع .




2. من السؤال السابق نستنتج أن القطرين $[IK]$ و $[JL]$ متناصفان .
لنبرهن أن $[IK]$ و $[MN]$ متناصفان . ( أو $[JL]$ و $[MN]$ متناصفان )
بتطبيق نتيجة مبرهنة طاليس في كل من المثلثين $ABC$ و $BCD$ نجد : $(IM)//(BC)$ ، $IM = \frac{1}{2}BC$ و
$(NK)//(BC)$ ، $NK = \frac{1}{2}BC$ . ومنه : $(IM)//(NK)$ إذن هذين المستقيمين يعينان مستو $(IMKN)$ ولدينا
$IM = NK$ وبالتالي الرباعي $IMKN$ متوازي أضلاع ومنه قطريه $[IK]$ و $[MN]$ متناصفان .
خلاصة القطع $[IK]$ ، $[JL]$ و $[MN]$ لها نفس المنتصف ومنه للمستقيمات $(IK)$ ، $(JL)$ و $(MN)$ نقطة مشتركة وحيدة .

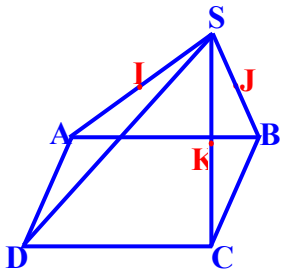


www.dzexams.com

## التمرين الثالث

$ABCD$ متوازي أضلاع في مستو $(P)$ و $S$ نقطة خارج المستوي $(P)$ .
نعين النقط $I$ ، $J$ ، $K$ منتصفات $[SA]$ ، $[SB]$ و $[SC]$ على الترتيب .

1. ما هو تقاطع المستوي $(CIJ)$ مع المستويين $(P)$ و $(SDA)$ ؟
2. برهن أن المستوي $(IJK)$ يقطع القطعة $[SD]$ في منتصفها .




## حل :

1. المستويان $(CIJ)$ و $(P)$ متمايزان ولهما نقطة مشتركة $C$ إذن تقاطعهما هو مستقيم يشمل النقطة $C$ .
في المثلث $SAB$ لدينا $I$ و $J$ منتصفي القطعتين $[SA]$ و $[SB]$ على الترتيب إذن حسب نتيجة طاليس $(IJ)$ يوازي $(AB)$ .
في المستوي $(P)$ لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن $(AB)$ يوازي $(DC)$ ومنه : $(IJ)$ يوازي $(DC)$ .
إذن المستقيمين $(IJ)$ و $(DC)$ يعينان مستو الذي هو $(CIJ)$ .
خلاصة : تقاطع المستويين $(CIJ)$ و $(P)$ هو المستقيم $(DC)$ .
نستنتج أن المستوي $(CIJ)$ يشمل النقطتين $I$ و $D$
بما أن النقطة $I$ تنتمي إلى المستقيم $(SA)$ فإن $I$ تنتمي إلى المستوي $(SDA)$
وبالتالي المستويين $(CIJ)$ و $(SDA)$ متمايزان ويشتركان في نقطتين متمايزتين $I$ و $D$ إذن تقاطعهما هو المستقيم $(ID)$ .
2. في ما سبق لدينا $(IJ)$ يوازي $(DC)$ ؛ وفي المثلث $SDC$ نعين $L$ منتصف $(SD)$ وبما أن $K$ منتصف $(SC)$ فإن المستقيم $(KL)$ يوازي $(DC)$ ومنه : $(IJ)$ يوازي $(KL)$ إذن النقطة $L$ تنتمي إلى المستوي $(IJK)$ .
بما أن المستقيم $(SD)$ لا يوازي المستوي $(IJK)$ فإنهما يتقاطعان في نقطة وحيدة وهي $L$ منتصف القطعة $[SD]$ .



www.dzexams.com

# الاحصاء

## 1 مفردات الإحصاء



www.dzexams.com

**نشاط :**

في كل من الحالات المقترحة أدناه ، عين المجموعة والظاهرة أو الخاصية المدروسة عليها .

أ ) عدد إخوة وأخوات تلاميذ قسم نهائي محصور بين 1 و 6 .

ب ) تبين في قسم للسنة الأولى جدع مشترك أن الوزن المتوسط للتلاميذ هو $51kg$ .

ج ) توزع الانتماء في النادي الثقافي لتلاميذ مؤسسة تربوية إلى كرة القدم ، كرة السلة ، الموسيقى والمسرح .

د ) سجل $100km/h$ معدل سرعة 50 سيارة ، مرت بطريق وطني .

ه ) كان الطلب على السيارات بيجو أكثر من رونو وفيات في مؤسسة بيع السيارات .

**حل النشاط :**

أ ) عدد إخوة وأخوات المجموعة هي تلاميذ قسم نهائي والظاهرة المدروسة عليها عدد إخوة وأخوات.

ب ) المجموعة هي قسم للسنة الأولى جدع مشترك والظاهرة المدروسة عليها هي الوزن .

ج ) المجموعة هي مجموعة تلاميذ مؤسسة تربوية والظاهرة المدروسة هي أنواع النشاطات الموجودة في النادي الثقافي .

د ) المجموعة المدروسة هي مجموعة الخمسين سيارة التي مرت بطريق وطني والظاهرة التي تقام عليه الدراسة هي السرعة.

ه ) المجموعة هي مجوعة السيارات الموجودة في مؤسسة البيع والخاصية المدروسة هي أنواع السيارات .

## المجتمع الإحصائي :

المجموعة التي تقوم عليها الدراسة الإحصائية تسمى مجتمع إحصائي وكل عنصر منها يدعى فرد .

## الميزة الإحصائية :

الظاهرة أو الخاصية التي تدرس على مجتمع إحصائي تسمى ميزة إحصائية أو طبع إحصائي .

تنقسم الميزة إلى قسمان : الميزة الكمية والميزة النوعية .

أ ) الميزة الكمية :

هي الميزة التي يمكن قياسها وتسمى كذلك متغير إحصائي .

مثلا :

العمر يقاس بالسنوات ، الوزن بالكيلوغرام ، الطول بالمتر ، السرعة بالكيلومتر في الساعة . . .

ب ) الميزة النوعية :

هي الميزة التي لا يمكن قياسها .

مثلا :

النادي الثقافي ، أنواع السيارات . . .

**نشاط 2 :**

إليك علامات قسم 1 ج م ع ت في مادة الرياضيات : 3 ، 3 ، 7 ، 7 ، 19 ، 19 ، 10 ، 10 ، 10 ، 10 ، 16 ، 16 ، 16 ، 16 ، 3 ، 3 ، 5 ، 5 ، 5 ، 13 ، 5 ، 5 ، 7 ، 13 ، 13 ، 13 ، 13 ، 16 ، 16 ، 16 ، 10 ، 10 ، 10 ، 10 .

أ ) أحسب عدد العلامات المسجلة .



www.dzexams.com

ب) أحسب عدد كل علامة.

ج) أحسب عدد العلامات الموجودة في كل من المجالات التالية : $[0 ; 8[$ ؛ $[8 ; 10[$ ؛ $[10 ; 14[$ ؛ $[14 ; 20[$ .

**حل النشاط :**

أ) عدد العلامات هو : 35 .

ب)

- ✓ عدد العلامة 3 هو : 4
- ✓ عدد العلامة 5 هو : 6
- ✓ عدد العلامة 7 هو : 3
- ✓ عدد العلامة 10 هو : 8
- ✓ عدد العلامة 13 هو : 5
- ✓ عدد العلامة 16 هو : 7
- ✓ عدد العلامة 19 هو : 2 .

يمكن تلخيص النتائج في الجدول رقم 1

| العلامات | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد العلامات | 4 | 6 | 3 | 8 | 5 | 7 | 2 | 35 |

ج) عدد العلامات الموجودة في المجال $[0 ; 8[$ هو : 13

عدد العلامات الموجودة في المجال $[8 ; 10[$ هو : 0

عدد العلامات الموجودة في المجال $[10 ; 14[$ هو : 13

عدد العلامات الموجودة في المجال $[14 ; 20[$ هو : 9

يمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول رقم 2 .

| المجالات | $[0 ; 8[$ | $[8 ; 10[$ | $[10 ; 14[$ | $[14 ; 20[$ |
|---|---|---|---|---|
| عدد العلامات | 13 | 0 | 13 | 9 |

في هذا النشاط الميز المدروسة على مجتمع التلاميذ هي العلامات وهي ميزة كمية ، نلاحظ في الجدول رقم 1 أن كل علامة تقاس بقيمة معزولة ، بينما في الجدول رقم 2 قيم الميزة غير محددة وإنما هي محصورة في مجالات .

الميزة الكمية بدورها تنقسم إلى قسمان : الميزة المتقطعة والتي تأخذ قيمها معزولة والميزة المستمرة التي تأخذ قيمها في

مجالات من الشكل $[a ; b[$ كل منها تسمى فئة.

العدد $a$ يسمى الحد الأدنى للفئة ،العدد $b$ حدها الأعلى ، العدد $\frac{a+b}{2}$ يسمى مركز الفئة والعدد $b-a$ يسمى طول الفئة .



www.dzexams.com

**التوزيعات التكرارية :**

عدد أفراد (عناصر) المجتمع يسمى تكرار المجتمع . وعدد أفراد الموافق لقيمة ميزة يسمى تكرار هذه القيمة في النشاط الثاني تكرار المجتمع هو 35 ، وتكرار العلامة 7 هو العدد 3 .

**التواتر لقيمة ميزة**

هو حاصل قسمة التكرار المناسب لها على تكرار المجتمع (التكرار الكلي) . يسمى التواتر كذلك بالتكرار النسبي.

التواتر للعلامة 7 هو $\frac{3}{35} \simeq 0,086$ .

نفرض أن القيم مرتبة تصاعديا

**التكرار المجمع الصاعد لقيمة (أو لفئة)**

هو مجموع التكرارات هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات) السابقة لها .

**التكرار المجمع النازل لقيمة (أو لفئة)**

هو مجموع التكرارات هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات) الموالية لها .

**مثال:**

نعتبر الجدول رقم 1 السابق :

| قيم الميزة | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 4 | 6 | 3 | 8 | 5 | 7 | 2 | 35 |
| التكرار المجمع الصاعد | 4 | 10 | 13 | 21 | 26 | 33 | 35 | |
| التكرار المجمع النازل | 35 | 31 | 25 | 22 | 14 | 9 | 2 | |

**مثال :**

نعتبر الجدول رقم 2 السابق :

| المجالات | [0 ; 8[ | [8 ; 10[ | [10 ; 14[ | [14 ; 20[ |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 13 | 0 | 13 | 9 |
| التكرار المجمع الصاعد | 13 | 13 | 26 | 35 |
| التكرار المجمع النازل | 35 | 22 | 22 | 9 |

## 2 التمثيلات البيانية



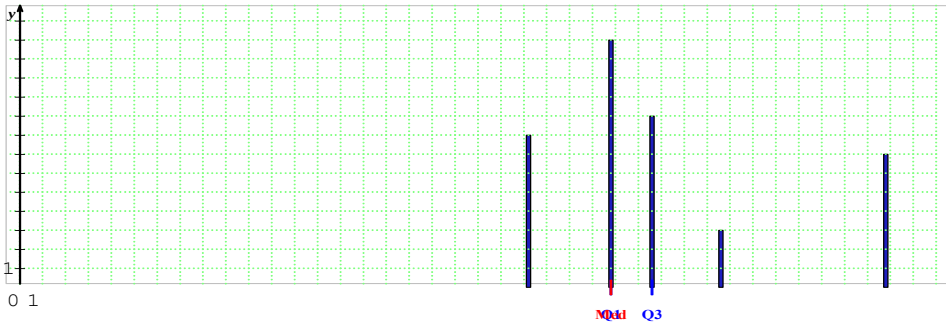
www.dzexams.com

## الأعمدة البيانية :

في دراسة أوزان بالكلوغرام لتلاميذ قسم سجلت النتائج على الجدول الآتي :

| الوزن (kg) | 37 | 43 | 46 | 51 | 63 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 8 | 13 | 9 | 3 | 7 | 40 |
| التوتر | 0,20 | 0,33 | 0,23 | 0,08 | 0,18 | |

أرسم المخطط بالأعمدة لهذه السلسلة :



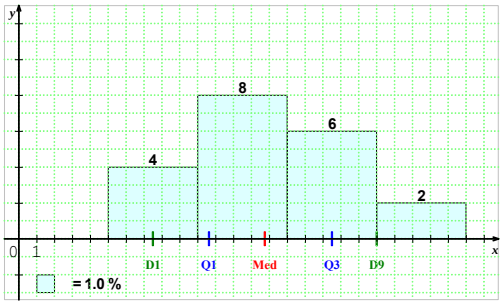

### ملاحظات :

نواصل بين رؤوس الأعمدة نحصل على مضلع تكراري

وبنفس الطريقة نرسم الأعمدة البيانية للتواتر حيث نأخذ التواترات على محور التراتيب .

## المدرج التكراري:

أجريت دراسة في مزرعة على كمية الحليب المقدرة باللتر ،
المنتجة من طرف 20 بقرة وسجلت النتائج في الجدول التالي :




| الفئة (باللتر) | [5 ;10[ | [10 ;15[ | [15 ;20[ | [20 ;25[ |
|---|---|---|---|---|
| التكرار (عدد الأبقار) | 4 | 8 | 6 | 2 |

### ملاحظات :

المدرج التكراري هو خاص بميزة مستمرة
ويكون على شكل مستطيلات بعداه طول الفئة وتكرارها في حالة الفئات متساوية الأطوال.
مساحة المستطيلات تكون متناسبة مع التكرارات .
في حالة الفئات مختلفة الأطوال ، نحدد الفئة التي لها أصغر $a$ طول وليكن $n$ تكرارها نرسم المستطيل ذي



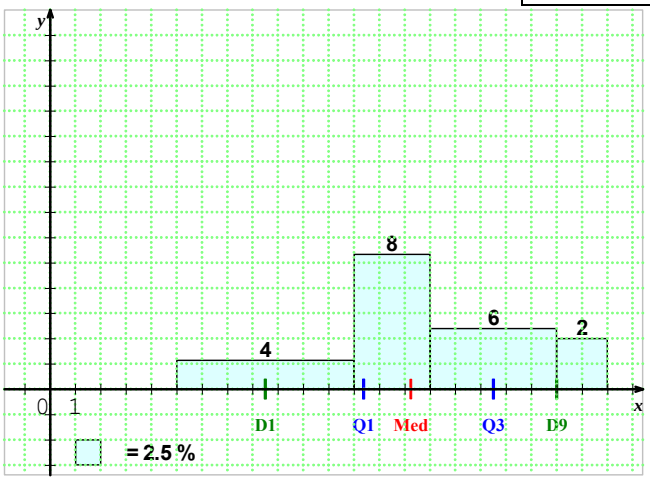
www.dzexams.com

البعدين $a$ و $n$ وبالنسبة لأي فئة أخرى ذات الطول $a'$ و التكرار $n'$ نعين العدد $k=\frac{a'}{a}$ و ونرسم المستطيل الذي بعداه $a'$ و $\frac{n'}{k}$ .

## مثال

نحتفظ بنفس الدراسة في المثال السابق ونفترض أن الفئات تكون مختلفة الأطوال :

| الفئة (باللتر) | $[5;12[$ | $[12;15[$ | $[15;20[$ | $[20;22[$ |
|---|---|---|---|---|
| التكرار (عدد الأبقار) | 4 | 8 | 6 | 2 |
| $\frac{n}{k}$ | 1 | 5,33 | 2,5 | 2 |




الفئة التي لها أصغر طول هي $[20;22[$ وطولها $a=2$

طول الفئة الأولى هو $a_1=7$ ومنه : $k_1=\frac{7}{2}=3,5$

إذن نمثلها بالمستطيل ذي البعدين 7 و 1,14 .

طول الفئة الثانية هو $a_2=3$ ومنه : $k_2=\frac{3}{2}=1,5$

إذن نمثلها بالمستطيل ذي البعدين 3 و 5,33

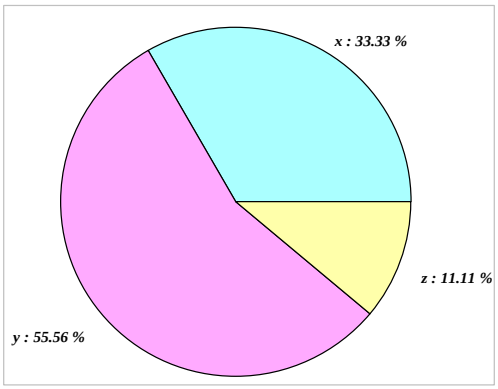
طول الفئة الثالثة هو $a_3=5$ ومنه : $k_3=\frac{5}{2}=2,5$

إذن نمثلها بالمستطيل ذي البعدين 5 و 2,5 .

## 1) المخطط الدائري :

عدد السيارات التي بيعت في مؤسسة خلال أسبوع .

| أنواع السيارات | رونو | بيجو | فيات |
|---|---|---|---|
| التكرار | 3 | 5 | 1 |




$360° \to 9$

$z° \to 1$ ، $y° \to 5$ ، $x° \to 3$

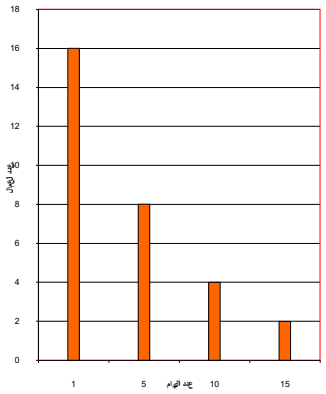
ومنه : $x=360\times\frac{3}{9}=120°$ $y=360\times\frac{5}{9}=200°$ $z=360\times\frac{1}{9}=40°$



www.dzexams.com

## التمرين الاول

المخطط بالأعمدة الآتي يمثل عدد أيام العطل المرضية لعمال مؤسسة .




أ) عين الجدول الإحصائي للسلسلة ثم أتممه بالتواتر والتكرار مجمع الصاعد والنازل.

ب) ما هو عدد عمال المؤسسة .

ج) ما هو منوال السلسلة .

## حل التمرين :

أ) الجدول الإحصائي للسلسلة .

| قيم الميزة (عدد الأيام) | 1 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| التكرار (عدد العمال) | 16 | 8 | 4 | 2 |
| التواتر | 0,53 | 0,27 | 0,13 | 0,07 |
| المجمع الصاعد | 16 | 24 | 28 | 30 |
| المجمع النازل | 30 | 14 | 6 | 2 |

ب) عدد عمال المؤسسة . 30

ج) منوال : يعرف المنوال بقيمة الميزة التي لها أكبر تكرار أو التي لها أطول عمود وهي القيمة 1 .

## التمرين الثاني

نعتبر سلسلة تتعلق بأوزان طرود بريدية .

| الأوزان بـ kg | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد الطرود | 8 | 5 | 4 | 2 | 1 |

1) هل ميزة هذه السلسلة كمية أم نوعية ؟

2) هل ميزة هذه السلسلة مستمرة أم منفصلة ؟

3) ما هو عدد الطرود ؟

4) ما هو عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأقل ؟

5) ما هو عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأكثر ؟

6) ما هو الوزن المتوسط لهذه الطرود ؟

7) أحسب مدى هذه السلسلة .

8) أرسم المخطط بالأعمدة لهذه السلسلة .



www.dzexams.com

**حل التمرين :**

الميزة تقاس بالكيلوغرام إذن هي كمية .

الميزة تأخذ قيم معزولة (ISOLEES) إذن هي متقطعة (منفصلة) .

عدد ا لطرود أي تكرار السلسلة هو 20 .

جدول خاص بالتكرار المجمع

| الأوزان بـ kg | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد الطرود | 8 | 5 | 4 | 2 | 1 |
| المجمع النازل | 20 | 12 | 7 | 3 | 1 |
| المجمع الصاعد | 8 | 13 | 17 | 19 | 20 |

20

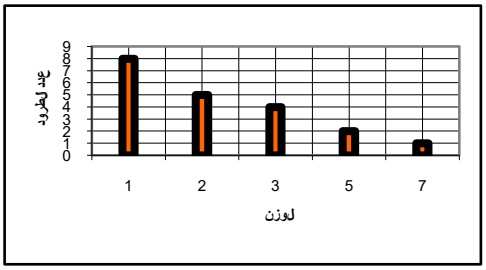
عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأقل هو 7

عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأكثر 17

الوزن المتوسط يعرف بمعدل الوزن للسلسلة و يحسب بالطريقة التالية :

$$\bar{x} = \frac{1\times 8 + 5\times 2 + 4\times 3 + 2\times 5 + 1\times 7}{20} = 3.8$$

يعرف المدى بفرق أكبر قيمة و أصغر قيمة للميزة وهو 6 .






www.dzexams.com

# ❸ مؤشرات سلسلة إحصائية :

**المدى :**

**التعريف :**

المدى لسلسة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للميزة .

**مثال :**

| 3 | 2 | 2 | 5 | 6 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| المدى | | | | | Max-Min | 4 |

**ملاحظة :**

المدى يسمى مؤشر التشتت . وفي حالة ميزة مستمرة المدى هو الفرق بين أكبر مركز وأصغر مركز للفئات .

**المنوال والفئة المنوالية:**

**تعريف :**

- ✓ نسمي منوالا لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع كل قيمة للميزة التي لها أكبر تكرار .
- ✓ نسمى فئة منوالية لسلسلة ذات متغير إحصائي مستمر كل فئة التي لها أكبر تكرار .

**ملاحظة :**

يمكن لسلسلة إحصائية أن يكون لها عدة مناول أو فئات منوالية .

**مثال :**

| 3 | 2 | 2 | 5 | 6 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| المنوال | | | | | Mod = | 2 |

**الوسيط :**

**التعريف :**

الوسيط لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا.ونرمز له بالرمز $Med$

**مثال :**

نعتبر القيم : 2 ، 2 ، 3 ، 3 ، 3 ، 5 ، 6 ، 6 ، 6 ، 6 ، 7 ، 7 .

$$Med = \frac{5+6}{2} = 5.5$$



www.dzexams.com

**مبرهنة:**

$N$ تكرار الكلي لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع قيمه مرتبة تصاعديا أو تنازليا .

✓ إذا كان $N$ فرديا فإن الوسيط هو قيمة الميزة التي رتبتها $\frac{N+1}{2}$ ( أي $Med$ يقع في الرتبة $\frac{N+1}{2}$ )

✓ إذا كان $N$ زوجيا فإن الوسيط هو نصف مجموع القيمتين للميزة التين رتبتيهما $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$ .

**مثال:**

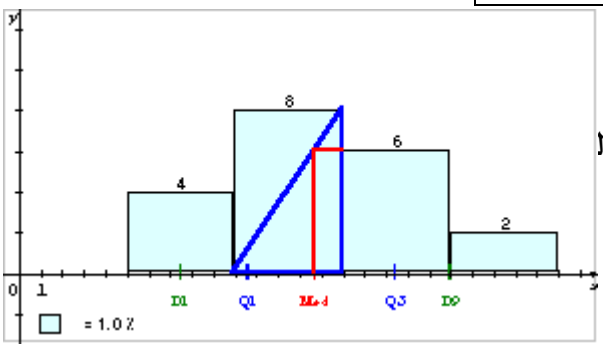
نفرض 31 هو تكرار مجتمع فإن رتبة الوسيط هي $\frac{31+1}{2}=16$ .

نفرض أن 30 هو تكرار مجتمع فإن $Med=\frac{x_{15}+x_{16}}{2}$ حيث $x_{15}$ هي قيمة الميزة ذات الرتبة 15 و $x_{16}$ هي قيمة الميزة ذات الرتبة 16 .

**طريقة إيجاد الوسيط في حالة طبع إحصائي مستمر.**

دراسة كمية الحليب المنتجة في حالة الفئات متساوية الطول :

| الفئة (باللتر) | $[5;10[$ | $[10;15[$ | $[15;20[$ | $[20;25[$ |
|---|---|---|---|---|
| التكرار (عدد الأبقار) | 4 | 8 | 6 | 2 |
| التكرار المجمع الصاعد | 4 | 12 | 18 | 20 |




توجد 20 بقرة مرتبة حسب إنتاجها من $5l$ إلى $22l$ .

البقرة التي تتوسط المجتمع تكون في المرتبة 10

وبالتالي يكون إنتاجها في الفئة $[10;15[$ والتي تسمى الفئة ال

عدد الأبقار حيث يكون إنتاجها من الفئة الوسيطية وأقل من

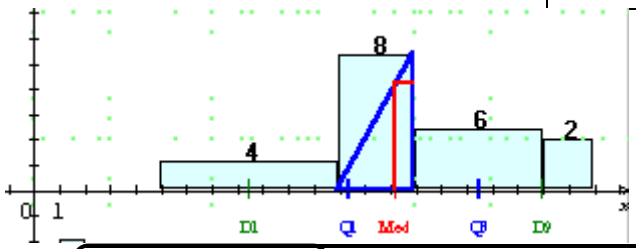
$Med$ هو : $10-4=6$ . إذن حسب مبرهنة طاليس لدينا :

$$\frac{Med-10}{5}=\frac{6}{8}$$

ومنه: $Med=10+3,75=13,75$ .

**دراسة كمية الحليب المنتجة في حالة الفئات مختلفة الطول:**

| الفئة (باللتر) | $[5;12[$ | $[12;15[$ | $[15;20[$ | $[20;22[$ |
|---|---|---|---|---|
| التكرار (عدد الأبقار) | 4 | 8 | 6 | 2 |
| التكرار المجمع الصاعد | 4 | 12 | 18 | 20 |




في هذه الحالة الفئة الوسيطية هي $[12;15[$



www.dzexams.com

عدد الأبقار حيث يكون إنتاجها من الفئة الوسيطية وأقل من $Med$ هو : $10-4=6$. إذن حسب مبرهنة طاليس لدينا :

$$\frac{Med-12}{3}=\frac{6}{8}$$

ومنه: $Med=12+2.25=14.25l$

**خلاصة:**

لإيجاد الوسيط في حالة طبع إحصائي مستمر، نحدد أولا الفئة الوسيطية $[a\ ;\ b[$ وتكرارها $n_m$ ثم نحسب الوسيط بالعلاقة

$$Med=a+\frac{(b-a)\left(\frac{n}{2}-N_c\right)}{n_m}$$

حيث $N_c$ هو التكرار المجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة الوسيطية.

## التمرين الثالث:

في مؤسسة أشغال الغابات، الدراسة الإحصائية لأقطار 50 شجرة أعطت النتائج التالية.

| $x_i$ | [7 ; 7,5[ | [7,5 ; 8[ | [8 ; 8,5[ | [8,5 ; 9[ | [9 ; 9,5[ | [9,5 ; 10[ | [10 ; 10,5[ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 7 | 12 | 10 | 6 | 4 | 6 | 50 |

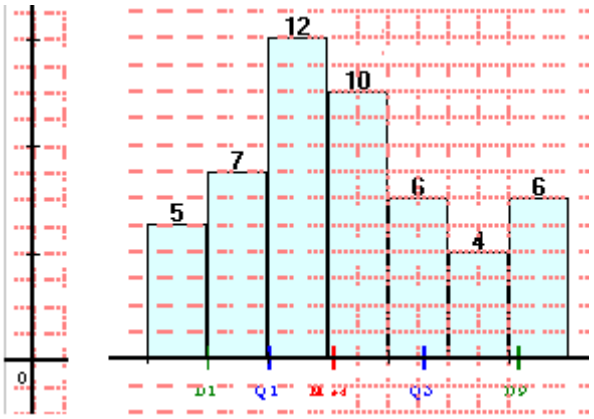
1. أكمل الجدول بالتكرار المجمع الصاعد ثم أحسب وسيط هذه السلسلة
2. أنشئ المدرج التكراري لهذه السلسلة.

## الحل:

| $x_i$ | [7 ; 7,5[ | [7,5 ; 8[ | [8 ; 8,5[ | [8,5 ; 9[ | [9 ; 9,5[ | [9,5 ; 10[ | [10 ; 10,5[ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 7 | 12 | 10 | 6 | 4 | 6 | 50 |
| التكرار المجمع الصاعد | 5 | 12 | 24 | 34 | 40 | 44 | 50 | |

رتبة الوسيط هي 25 ويكون في الفئة الوسيطية $[8,5\ ;\ 9[$ ومنه : $Med=8,5+0,5\times\frac{25-24}{10}=8,55cm$

حساب الوسيط باستعمال البرمجيات :






www.dzexams.com

## الوسط الحسابي :

الوسط الحسابي للقيم $x_1$ ، $x_2$ ، $x_3$ ، ... ، $x_k$ ، المرفقة بالتكرارات $n_1$ ، $n_2$ ، $n_3$ ، ... ، $n_k$ على الترتيب هو العدد $\bar{x}$ المعرف بـ : $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + ... + n_kx_k}{n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k}$

## التمرين الرابع:

أحسب الوسط الحسابي لكل من السلسلات التالية :

| $x_i$ العلامات | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|
| $n_i$ التكرارات | 1 | 1 | 1 |

| $x_i$ العلامات | 7 | 10 | 13 |
|---|---|---|---|
| $n_i$ التكرارات | 3 | 1 | 2 |

| $x_i$ العلامات | 1 | 2 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ التكرارات | 1 | 1 | 10 | 10 |

| $x_i$ العلامات | 4 | 7 | 8 | 10 | 13 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ التكرارات | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 |

**ملاحظة 1 :**

كل من الوسيط والمنوال والوسط الحسابي ، يسمى مؤشر الموقع .

**ملاحظة 2 :**

الوسط الحسابي لسلسلة ذات طبع إحصائي مستمر يعرف بنفس العلاقة السابقة حيث نعوض القيم

$x_1$ ، $x_2$ ، $x_3$ ، ... ، $x_k$ بمراكز الفئات $c_1$ ، $c_2$ ، $c_3$ ، ... ، $c_k$

## التمرين الخامس:

أحسب الوسط الحسابي لكل من السلسلات الآتية :

| $x_i$ الفئات | [8 ، 12[ | [12 ، 16[ | [16 ، 20[ | [20 ، 24[ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ التكرارات | 5 | 7 | 6 | 2 | 20 |
| $c_i$ مراكز الفئات | | | | | |
| $n_i \times c_i$ | | | | | |

| الفئات | [7 ، 7,5[ | [7,5 ، 8[ | [8 ، 8,5[ | [8,5 ، 9[ | [9 ، 9,5[ | [9,5 ، 10[ | [10 ، 10,5[ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ التكرارات | 5 | 7 | 12 | 10 | 6 | 4 | 6 | 50 |
| $c_i$ مراكز الفئات | | | | | | | | |
| $n_i \times c_i$ | | | | | | | | |

**ملاحظة 3 :**

مجموع : $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$ يكتب على الشكل $\sum_{i=1}^{i=k} n_i$ ويقرأ مجموع الأعداد $n_1$ من $i = 1$ إلى $i = k$



www.dzexams.com

## التمرين السادس

1. أكتب المجاميع التالية باستعمال الرمز $\Sigma$ :

$2^3+3^3+4^3+5^3$ $\quad$ $3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7$ $\quad$ $5+9+13+17$

2. أحسب المجموعين : $\sum_{k=0}^{k=4}(3k-2)$ ؛ $\sum_{k=1}^{k=3}\frac{2}{3k(k+1)}$

## الحل :

1. $2^3+3^3+4^3+5^3=\sum_{i=2}^{i=5}i^3$

$3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7=\sum_{i=2}^{i=7}3^i$

$5+9+13+17=\sum_{i=1}^{i=4}(4i+1)$ .

2. $\sum_{k=0}^{k=4}(3k-2)=(3\times0-2)+(3\times1-2)+(3\times2-2)+(3\times3-2)+(3\times4-2)=-2+1+4+7+10=20$

$$\sum_{k=1}^{k=3}\frac{2}{3k(k+1)}=\frac{2}{3(1+1)}+\frac{2}{3\times2(2+1)}+\frac{2}{3\times3(3+1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{6+2+1}{18}=\frac{1}{9}$$

### خواص الوسط الحسابي :

### الخاصية 1:

$x_1$ ، $x_2$ ، $x_3$ ، ... ، $x_k$ قيم سلسلة إحصائية ، مرفقة بالتواترات $f_1$ ، $f_2$ ، $f_3$ ، ... ، $f_k$ على الترتيب

الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو العدد $\bar{x}$ حيث : $\bar{x}=f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+...+f_kx_k=\sum_{i=1}^{i=k}f_ix_i$

### البرهان :

بما أن $f_i=\frac{n_i}{\sum_{i=1}^{i=k}n_i}$ فإن : $\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+...+n_kx_k}{\sum_{i=1}^{i=k}n_i}=f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+...+f_kx_k$ .

### الخاصية 2 :

$x_1$ ، $x_2$ ، $x_3$ ، ... ، $x_k$ قيم سلسلة إحصائية ، مرفقة بالتكرارات $n_1$ ، $n_2$ ، $n_3$ ، ... ، $n_k$ على الترتيب

و $\bar{x}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة .

$\overline{x+a}$ هو الوسط الحسابي للسلسلة $x_1+a$ ، $x_2+a$ ، $x_3+a$ ، ... ، $x_k+a$ مرفقة بالتكرارات $n_1$ ، $n_2$ ، $n_3$ ، ..

$n_k$ ، على الترتيب . و $\overline{x\times a}$ هو الوسط الحسابي للسلسلة $x_1\times a$ ، $x_2\times a$ ، $x_3\times a$ ، ... ، $x_k\times a$ مرفقة

بالتكرارات $n_1$ ، $n_2$ ، $n_3$ ، ... ، $n_k$ على الترتيب . ولدينا : $\overline{x+a}=\bar{x}+a$ و $\overline{x\times a}=\bar{x}\times a$ .



www.dzexams.com

**الخاصية 3 :**

$x_1 \; ، \; x_2 \; ، \; x_3 \; ، \ldots \ldots \; ، \; x_k \; ، \; y_1 \; ، \; y_2 \; ، \; y_3 \; ، \ldots \ldots \; ، \; y_k$ قيم سلسلة إحصائية ، مرفقة بالتكرارات

$n_1 \; ، \; n_2 \; ، \; n_3 \; ، \ldots \ldots \; ، \; n_k \; ، \; n'_1 \; ، \; n'_2 \; ، \; n'_3 \; ، \ldots \ldots \; ، \; n'_k$ على الترتيب و نحسب $\overline{X}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة بالعلاقة :

$$\overline{X} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)\overline{x} + \left(\sum_{i=1}^{k} n'_i\right)\overline{y}}{n}$$ حيث:

$\overline{x}$ الوسط الحسابي للسلسلة $x_1 \; ، \; x_2 \; ، \; x_3 \; ، \ldots \ldots \; ، \; x_k$ المرفقة بالتكرارات $n_1 \; ، \; n_2 \; ، \; n_3 \; ، \ldots \ldots \; ، \; n_k$ على الترتيب.

$\overline{y}$ الوسط الحسابي للسلسلة $y_1 \; ، \; y_2 \; ، \; y_3 \; ، \ldots \ldots \; ، \; y_k$ المرفقة بالتكرارات $n'_1 \; ، \; n'_2 \; ، \; n'_3 \; ، \ldots \ldots \; ، \; n'_k$ على الترتيب.

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{i=1}^{k} n'_i$ التكرار الكلي للسلسلة .

**الربعيات:**

نعتبر سلسلة إحصائية ذات طبع إحصائي كمي قيمه مرتبة تصاعديا وتكرارها $n$ .

- **الربعي الأول $Q_1$** هو أصغر قيمة للطبع حيث 25% على الأقل من الحدود السلسلة لها قيم أصغر من أو تساوي $Q_1$ .
- **الربعي الثالث $Q_3$** هو أصغر قيمة للطبع حيث 75% على الأقل من الحدود السلسلة لها قيم أصغر من أو تساوي $Q_3$ .

في حالة طبع إحصائي متقطع

- إذا كان $\frac{n}{4}$ عددا طبيعيا فإن رتبة $Q_1$ هي $\frac{n}{4}$ ورتبة $Q_3$ هي $\frac{3n}{4}$ ؛
- إذا كان $\frac{n}{4}$ ليس عددا طبيعيا فإن العدد الطبيعي الأصغر $n'$ الذي يحقق $n' > \frac{n}{4}$ هو رتبة $Q_1$ والعدد الطبيعي الأصغر $n"$ الذي يحقق $n" > \frac{3n}{4}$ هو رتبة $Q_3$ .

**مثال**

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

**4 , 4 ,4 , 4 , 4 , 4 , 7 , 7 , 7 , 7 , 7 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 13 , 13 , 13 , 16**

حيث أن قيم الطبع الإحصائي مرتبة ترتيبا تصاعديا و كل قيمة مكتوبة عددا من المرات مساو لتكرارها

نلاحظ أن التكرار الكلي N يساوي 23

- أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر من أو يساوي $\frac{N}{4}$ هي القيمة السادسة لأن $\frac{N}{4} = 5,75$

تسمى هذه القيمة الرُبعي الأول و نرمز له بالرمز $Q_1$ ( هنا $Q_1 = 4$ )

- أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$ هي القيمة الثامنة عشر لأن $\frac{3N}{4} = 17,25$



www.dzexams.com

تسمى هذه القيمة الرُبعي الثالث و نرمز له بالرمز $Q_3$ ( هنا $Q_3 = 10$ )

**ملاحظة** : $Q_1$ و $Q_3$ قيمتان من السلسلة بخلاف الوسيط Med الذي يمكن أن لا يكون قيمة من السلسلة

في حالة طبع إحصائي مستمر

☜ ننشئ مضلع التواتر المجمع الصاعد ويكون $Q_1$ ، $Me$ و $Q_3$ فواصل نقط المضلع التي تراتيبها 0,25 ، 0,50 و 0,75 على الترتيب .

- نعين الفئة $[a;b[$ التي تشمل الربعي وتكرارها $n_Q$ ، ولدينا $Q_1 = a + \dfrac{(b-a)\left(\frac{n}{4} - N\right)}{n_Q}$ و $Q_3 = a + \dfrac{(b-a)\left(\frac{3n}{4} - N\right)}{n_Q}$ ( $N$ هو التكرار المجمع الصاعد للفئة التي تسبق $[a;b[$ ).
- $Q_1$ و $Q_3$ هما قيمتان من السلسلة بخلاف $Me$ يمكن أن لا يكون قيمة من السلسلة .

## كيف نحدِّد $Q_1$ و $Q_3$ :

| | في حالة طبع كمي متقطع | في حالة طبع كمي مستمر |
|---|---|---|
| ➢ بعد ترتيب القائمة ترتيبا تصاعديا (مع كتابة كل قيمة بعدد مساو لتكرارها)<br>➢ $Q_1$ القيمة التي رتبتها n حيث n هو أصغر عدد طبيعي يحقق $n \geq \frac{N}{4}$<br>➢ $Q_3$ القيمة التي رتبتها n حيث n هو أصغر عدد طبيعي يحقق $n \geq \frac{3N}{4}$ | نطبق التعريف باستخدام التكرار المجمع الصاعد أو التواتر المجمع الصاعد . | $Q_1$ هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{4}$<br>$Q_3$ هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{3}{4}$ |

## التمرين السابع

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

| $x_i$ | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 7 | 3 | 8 | 8 | 6 | 3 |

1ـ شكل جدول التكرار المجمع الصاعد و التواتر المجمع الصاعد

2ـ عين الوسيط Med و الربعيين $Q_1$ و $Q_3$ لهذه السلسلة



www.dzexams.com

حل التمرين

| $x_i$ | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 7 | 3 | 8 | 8 | 6 | 3 |
| ت م ص | 5 | 12 | 15 | 23 | 31 | 37 | 40 |
| ت و م ص | 0,125 | 0,3 | 0,375 | 0,575 | 0,775 | 0,925 | 1 |

2ـ

التكرار الكلي : $N = 2 \times 20$

و منه الوسيط Med هو نصف مجموع

الحدين اللذين رتبتاهما 20 و 21

أي $Med = 7$

بقراءة جدول التواتر المجمع الصاعد نلاحظ أن أصغر قيمة $Q_1$ حيث 25 ٪ على الأقل من الحدود لها قيمة أصغر أو تساوي $Q_1$ هي 4 و بتطبيق التعريف كذلك نلاحظ أن $Q_3 = 8$

## الانحراف الربعي

**تعريف :**

الإنحراف الربعي هو الفرق بين الربعيين الثالث و الأول . أي هو العدد I حيث $I = Q_3 - Q_1$

**ملاحظة**

الإنحراف الربعي هو مؤشر من مؤشرات التشتت

التمرين الثامن دراسة سلسلة ذات طبع كمي مستمر

يهتم منظمو دورة في كرة المضرب بدراسة متوسط الزمن المستغرق للمباريات .

جمعت النتائج في الجدول التالي :

| مجال الزمن (min) | [30 ، 50[ | [50 ، 80[ | [80 ، 120[ | [120،300[ |
|---|---|---|---|---|
| عدد المباريات | 14 | 18 | 20 | 8 |

1 – أنشئ منحنى التواتر المجمع الصاعد و استنتج قيمة الوسيط

2ـ عيّن الربعيين الأول و الثالث للسلسلة . ما هو الانحراف الربعي ؟

حـل التمرين

| مجال الزمن (min) | [30 ، 50[ | [50 ، 80[ | [80 ، 120[ | [120،300[ |
|---|---|---|---|---|
| عدد المباريات | 14 | 18 | 20 | 8 |
| التواتر | $\frac{7}{30}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ |
| التواتر المجمع الصاعد | $\frac{7}{30}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{13}{15}$ | 1 |



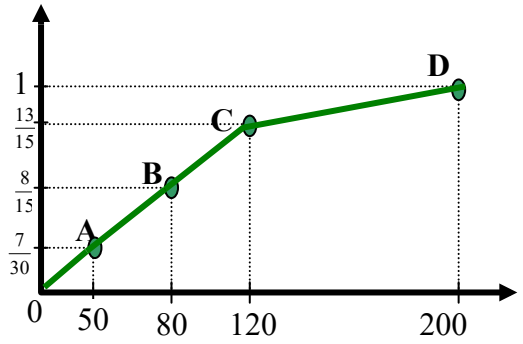
www.dzexams.com

1 ) الوسيط Med هو فاصلة النقطة من المنحنى و التي ترتيبها $\frac{1}{2}$ ، هذه النقطة تقع على القطعة

المستقيمة [AB] حيث A( 50 , $\frac{7}{30}$ ) و B( 80 , $\frac{8}{15}$ )

معادلة ( AB ) هي $y=\frac{\frac{8}{15}-\frac{7}{30}}{80-50}(x-50)+\frac{7}{30}$

و منه $x=\frac{230}{3}$ ( $50\le x\le 80$ ) $Med\approx 76,67$




2) بنفس الطريقة نبحث عن فاصلتي النقطتين اللتين ترتيباهما $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ وهما $Q_1$ و $Q_3$ على الترتيب

نجد $Q_1\approx 51,66$ و $Q_3=106$ و منه الإنحراف الربعي $I\approx 54,33$

## العشريان $D_1$ و $D_9$ :

**تعريف:**

- **العشري الأول $D_1$**

هو أصغر قيمة طبع حيث يكون 10% على الأقل من الحدود لها قيمة طبع أصغر أو تساوي $D_1$ .

- **العشري التاسع $D_9$**

هو أصغر قيمة طبع حيث يكون 90% على الأقل من الحدود لها قيمة طبع أصغر أو تساوي $D_9$ .

## المخطط بالعلبة:

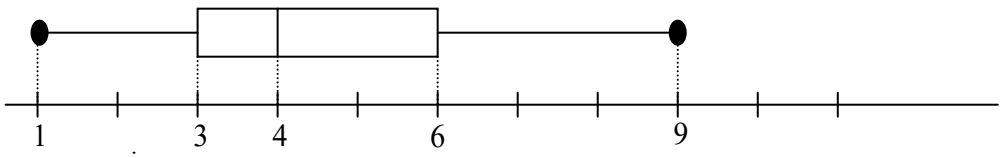
نكوّن مخططا بالعلب بالطريقة التالية :

- ✓ نضع قيم الطبع على محور ( أفقي أو شاقولي )
- ✓ نعيّن على هذا المحور القيم min ، max ، $Q_1$ ، Med و $Q_3$ .

( القيمة الصغرى ، القيمة الكبرى ، الربعيين الأول و الثالث و الوسيط )

- ✓ نكون عندئذ مستطيلا ( العلبة ) بالتوازي مع المحور . ( طول المستطيل هو الانحراف الربعي و عرضه كيفي )

**مثال :** $\min=1$ ، $\max=9$ ، $Q_1=3$ ، $Med=4$ و $Q_3=6$ .




**ملاحظة:**

هذا المخطط يمكننا من مشاهدة تشتت توزيع إحصائي و المقارنة بين عدة سلاسل إحصائية .



www.dzexams.com

## التباين والانحراف المعياري:

### التباين(V) :

هو الوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم $x_i$ عن وسطها الحسابي $\bar{x}$ أي الوسط الحسابي للقيم $(x_i-\bar{x})^2$ .

$$V=\frac{1}{n}\left[n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+\ldots+n_p(x_p-\bar{x})^2\right]$$

### الانحراف المعياري(s) :

هو الجذر التربيعي للتباين أي $s=\sqrt{V}$

**خاصية:**

$$V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{p}f_i(x_i-\bar{x})^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i{x_i}^2\right)-\bar{x}^2=\left(\sum_{i=1}^{p}f_i{x_i}^2\right)-\bar{x}^2$$

**البرهان:**

لدينا: $(x_i-\bar{x})^2={x_i}^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2$ ومنه $n_i(x_i-\bar{x})^2=n_i{x_i}^2-2n_ix_i\bar{x}+n_i\bar{x}^2$

ومنه: $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_i(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_i{x_i}^2-\frac{2}{n}\bar{x}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i+\frac{1}{n}\bar{x}^2\sum_{i=1}^{i=p}n_i$

لدينا: $\sum_{i=1}^{i=p}n_i=n$ و $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i=\bar{x}$

إذن: $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_i{x_i}^2-2\bar{x}^2+\bar{x}^2$ أي $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_i{x_i}^2-\bar{x}^2$

**ملاحظة:**

**إذا كانت السلسلة مجمعة بالفئات ( توزيع منتظم ) نأخذ $x_i$ كمركز للفئة**

## التمرين التاسع

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

1ـ أحسب التباين و الانحراف المعياري للسلسلة

| $x_i$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 0,08 | 0,15 | 0,28 | 0,35 | 0,1 | 0,04 |

**حـل:**

نستعمل التعريف (2)

**طريقة**

نضيف سطرا للجدول لحساب القيم $f_i.x_i$ ثم نحسب مجموع $f_i.x_i$

نضيف سطرا آخرا للجدول لحساب $f_i.x_i^2$ ثم نحسب مجموع $f_i.x_i^2$

| $x_i$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 0,08 | 0,15 | 0,28 | 0,35 | 0,1 | 0,04 | |
| $f_i.x_i$ | 0,24 | 0,75 | 1,96 | 3,15 | 1,1 | 0,52 | 7,72 |
| $f_i.x_i^2$ | 0,72 | 3,75 | 13,72 | 28,35 | 12,1 | 6,76 | 65,4 |

$V=65,4-(7.72)^2=5,8016$ $\quad s=\sqrt{5.8016}\simeq 2,4086$



www.dzexams.com

# تمارين محلولة

## التمرين الأول

إليك الجدول التالي الذي يمثل علامات أحد الاقسم :

| العلامة | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 4 | 6 | 5 | 5 | 3 | 2 |
| التكرار م ص | | | | | | | |
| التواتر م ص | | | | | | | |

1-أكمل الجدول ثم احسب كل من: المدى، المنوال، الوسط الحسابي، الوسيط

2- احسب كل من: ربعي الاول ، الربعي الثالث ، العشري الاول ، العشري التاسع

## حل التمرين

إكمال الجدول:

| العلامة | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 4 | 6 | 5 | 5 | 3 | 2 |
| التكرار م ص | 5 | 9 | 15 | 20 | 25 | 28 | 30 |
| التواتر م ص | $\frac{5}{30}$ | $\frac{9}{30}$ | $\frac{15}{30}$ | $\frac{20}{30}$ | $\frac{25}{30}$ | $\frac{28}{30}$ | 1 |

المدى: 19-3=16

المنوال: Mod=7

الوسط الحسابي : $\bar{x}=\frac{3\times5+5\times4+7\times6+10\times5+13\times5+16\times3+19\times2}{30}=9.26$ ،

الوسيط: التكرار الكلي : $N=30$ وبالتالي $Med=\frac{x_{15}+x_{16}}{2}=\frac{7+10}{2}=8.5$

**الربعيات**

أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر من أو يساوي $\frac{N}{4}$ هي القيمة الثامنة لأن $\frac{30}{4}=7,5$

$x_8$ تسمى هذه القيمة الرُبعي الأول و نرمز له بالرمز $Q_1$ ( هنا $Q_1=5$ )

أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$ هي القيمة الثالثة و العشرون لأن $\frac{3\times30}{4}=22,5$

$x_{23}$ تسمى هذه القيمة الرُبعي الثالث و نرمز له بالرمز $Q_3$ ( هنا $Q_3=13$ )

**العشريات**

لدينا $\frac{N}{10}$ $\frac{30}{10}=3$

$x_3$ تسمى هذه القيمة العشري الأول و نرمز له بالرمز $D_1$ ( هنا $D_1=3$ )

لدينا $\frac{9N}{10}$ $\frac{9\times30}{10}=27$



www.dzexams.com

$x_{27}$ تسمى هذه القيمة العشري التاسع و نرمز له بالرمز $D_9$ ( هنا $D_9 = 16$ )

## التمرين الثاني

إليك الجدول التالي الذي يمثل علامات أحد الاقسم :

| العلامة | 2 | 4 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 4 | 6 | 11 | 5 | 3 | 2 |
| التكرار م ن | | | | | | | |
| التواتر م ن | | | | | | | |

1-أكمل الجدول ثم احسب كل من: المدى، المنوال، الوسط الحسابي، الوسيط

2- احسب كل من: ربعي الاول ، الربعي الثالث ، العشري الاول ، العشري التاسع

## حل التمرين

إكمال الجدول:

| العلامة | 2 | 4 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 4 | 6 | 11 | 5 | 3 | 2 |
| التكرار م ن | 36 | 31 | 27 | 21 | 10 | 5 | 2 |
| التواتر م ن | 1 | $\frac{31}{36}$ | $\frac{27}{36}$ | $\frac{21}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |

المدى: 18-2=16

المنوال:Mod=9

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{2\times5+4\times4+6\times6+9\times11+12\times5+15\times3+18\times2}{36} = 8.38$ ،

الوسيط: التكرار الكلي : $N = 36$ وبالتالي $Med = \frac{x_{18}+x_{19}}{2} = \frac{9+9}{2} = 9$

### الربعيات

لدينا $\frac{N}{4}$ $\frac{36}{4} = 9$

$x_9$ تسمى هذه القيمة الرُبعي الأول و نرمز له بالرمز $Q_1$ ( هنا $Q_1 = 4$ )

لدينا $\frac{3N}{4}$ $\frac{3\times36}{4} = 27$

$x_{27}$ تسمى هذه القيمة الرُبعي الثالث و نرمز له بالرمز $Q_3$ ( هنا $Q_3 = 12$ )

### العشريات

لدينا $\frac{N}{10}$ $\frac{36}{10} = 3,6$

$x_4$ تسمى هذه القيمة العشري الأول و نرمز له بالرمز $D_1$ ( هنا $D_1 = 2$ )

لدينا $\frac{9N}{10}$ $\frac{9\times36}{10} = 32,4$

$x_{33}$ تسمى هذه القيمة العشري التاسع و نرمز له بالرمز $D_9$ ( هنا $D_9 = 15$ )



www.dzexams.com

# نموذج امتحان الفصل الثالث



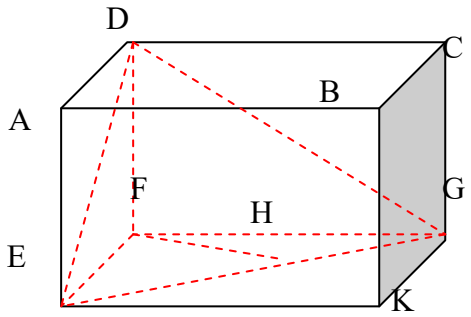
www.dzexams.com

# نموذج امتحان الفصل الثالث

**التمرين الأول:** ( ...ن)

نعتبر متوازي المستطيلات القائم الممثل في الشكل المقابل :

بحيث: $AE = 6cm$; AB=AD=4cm




1 ـ احسب الأطوال: $AG$ ; $DE$ ; $DG$ ; $EG$

2 ـ استنتج طبيعة المثلث EDG

3 ـ ليكن H منتصف [EG]

أ ـ بين أن (DF) عمودي على (HF)

ب ـ احسب DH

ج ـ احسب حجم الهرم DFEG

**التمرين الثاني** (... ن)

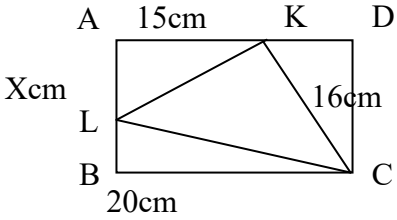
ABCD مستطيل حيث : CD=16cm و BC=20cm ،ولتكن K نقطة من $[AD]$ بحيث: AK=15cm

ولتكن L نقطة من $[AB]$ حيث AL=X cm حيث X عدد حقيقي موجب (الرسم غير مطلوب)

1ـ أحسب كل من $KC^2$ ثم $LC^2$ و $KL^2$ بدلالة X

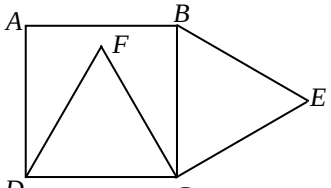
2ـ أحسب العدد X بحيث يكون المثلث KCL متساوي الساقين $[KC]$ و $[KL]$

3ـ أحسب العدد X بحيث يكون المثلث KCL قائم في K




**التمرين الثالث:**(... ن)

يمثل الشكل مربعا ABCD ، ومثلثين BCE ، CDF كل منهما متقايس الأضلاع.




أ) علم النقطة G بحيث يكون المثلث ACG متقايس الأضلاع

وتكون G و B من جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (AC).

ب) بين أن النقط B ، D ، G في استقامية.

بين أنه يوجد دوران يحول النقط B ، D ، G إلى النقط A ، F ، E ، ثم استنتج أن النقط A ، F ، E في استقامية.

**التمرين الرابع:**(... ن)

إليك علامات قسم 1 ج م ع ت في مادة الرياضيات:

3، 3، 7، 19، 19، 10، 7، 7، 16، 16، 7، 7، 3، 3، 3، 5، 7، 13، 13، 13، 13، 16، 16، 16، 16، 7، 10، 10، 10، 10 ،

1 ـ ارسم جدولا تبين فيه : التكرار،التواتر،التكرار المجمع الصاعد،التكرار المجمع النازل.

احسب كل من:المدى،المنوال،الوسط الحسابي،الوسيط

2- احسب كل من: ربعي الاول ، الربعي الثالث ، العشري الاول ، العشري التاسع

3-شكل المخطط بالعلبة



www.dzexams.com

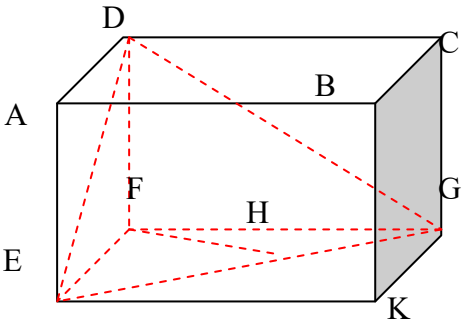
# حل مقترح:

## التمرين الأول: ( ...ن)

نعتبر متوازي المستطيلات القائم الممثل في الشكل المقابل :

بحيث: $AE = 6cm$ ; $AB=AD=4cm$

1ـ حساب الأطوال: $AG$ ; $DE$ ; $DG$ ; $EG$




أ ـ حساب $EG$

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث $EKG$ القائم في $K$ نجد :

$EG^2 = EK^2 + KG^2 = 16+16 = 32$ ومنه $EG = \sqrt{32}$

ب ـ حساب $DG$

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث $DFG$ القائم في $F$ نجد :

$DG^2 = DF^2 + FG^2 = 36+16 = 52$ ومنه $DG = \sqrt{52}$

ج ـ حساب $DE$

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث $EFD$ القائم في $F$ نجد :

$DE^2 = DF^2 + FE^2 = 36+16 = 52$ ومنه $DE = \sqrt{52}$

د ـ حساب $AG$

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث $EAG$ القائم في $E$ نجد :

$AG^2 = AE^2 + EG^2 = 36+32 = 68$ ومنه $AG = \sqrt{68}$

4 ـ استنتاج طبيعة المثلث EDG

المثلث EDG متساوي الساقين لأن $DE = DG$

5 ـ ليكن H منتصف [EG]

أ ـ تبيين أن (DF) عمودي على (HF)

المستقيم (DF) على المستوي $(EFGK)$ وبما أن المستقيم (HF) محتوى في المستوي $(EFGK)$

فإن (DF) عمودي على (HF)

ب ـ حساب DH

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث $DFH$ القائم في $F$ نجد :

$$DH^2 = DF^2 + FH^2 = 36+\left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 = 36+\frac{32}{4} = 44 \quad \text{ومنه} \quad DH = \sqrt{44}$$

ج ـ حساب حجم الهرم DFEG

$$V(DFEG) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times 4\times 6\right)\times 4 = 16cm^3$$

## التمرين الثاني (... ن)

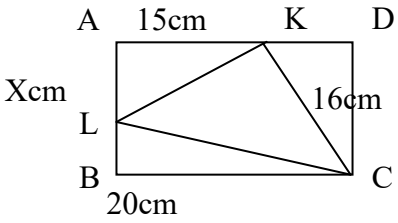
ABCD مستطيل حيث : CD=16cm و BC=20cm ، ولتكن K نقطة من $[AD]$ بحيث: AK=15cm



www.dzexams.com

ولتكن L نقطة من $[AB]$ حيث AL=X cm حيث X عدد حقيقي موجب (الرسم غير مطلوب)

1ـ حساب كل من $KC^2$ ثم $LC^2$ و $KL^2$ بدلالة X




أ ـ حساب $KC^2$

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث $KDC$ القائم في $D$ نجد :

$$KC^2 = KD^2 + DC^2 = 25 + 256 = 281$$

ب ـ حساب $LC^2$

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث $LBC$ القائم في $B$ نجد :

$$LC^2 = LB^2 + BC^2 = (16 - X)^2 + 400 = X^2 - 32X + 656$$

ج ـ حساب $KL^2$

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث $AKL$ القائم في $A$ نجد :

$$KL^2 = AL^2 + AK^2 = X^2 + 225$$

2ـ حساب العدد X بحيث يكون المثلث KCL متساوي الساقين $[KC]$ و $[KL]$

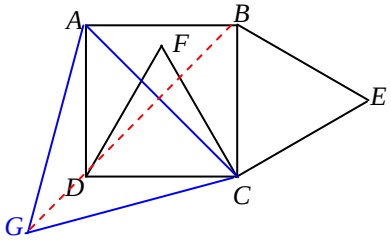
$KL = KC$ معناه $KL^2 = KC^2$ معناه $X^2 + 225 = 281$ ومنه $X^2 = 56$ أي $X = \sqrt{56} = 7.483cm$

3ـ حساب العدد X بحيث يكون المثلث KCL قائم في K

KCL قائم في K تكافئ $LC^2 = KL^2 + KC^2$ تكافئ $X^2 - 32X + 656 = X^2 + 225 + 281$

تكافئ $X = \frac{150}{32} = \frac{75}{16} = 4.6875cm$

**التمرين الثالث:** (... ن)




أ) تعلم النقطة G بحيث يكون المثلث ACG متقايس الأضلاع.

و G ، B من جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (AC).

ب) تبيين أن النقط B ، D ، G في استقامية.

لدينا ABCD مربع إذن (DB) محور القطعة $[AC]$

بما أن المثلث ACG متقايس الأضلاع و (DB) هو محور $[AC]$ فإن (DB) يشمل الرأس G وبالتالي النقط $G.D.B$ في استقامية .....2ن

ج) تبين أنه يوجد دوران يحول النقط B ، D ، G إلى النقط A ، F ، E واستنتاج استقامية النقط A ، F ، E

لدينا : $CB = CE$ ، $CF = CD$ ، $CA = CG$ .

ولدينا : $\hat{BCE} = \hat{DCF} = \hat{GCA} = 60°$

بتوجيه المستوي في الاتجاه غير المباشر (اتجاه دوران عقارب الساعة)

لدينا : صورة B هي E ، صورة D هي F و صورة G هي A بالدوران الذي مركزه C و زاويته $60°$ ....3ن

وبما أن النقط B ، D ، G في استقامية فإن النقط E ، F ، A في استقامية.

**التمرين الرابع ...ن**



www.dzexams.com

3، 3، 7، 19، 19، 10، 7، 7، 16، 16، 3، 3، 3، 5، 7، 13، 13، 13، 13، 16، 16، 16، 7، 7
، 10، 10، 10

1- نرى جدول التكرارات المتجمعة الصاعدة والمتجمعة النازلة.

| القيم | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 1 | 5 | 4 | 4 | 5 | 2 |
| التردد | $\frac{5}{26}$ | $\frac{1}{26}$ | $\frac{5}{26}$ | $\frac{4}{26}$ | $\frac{4}{26}$ | $\frac{5}{26}$ | $\frac{2}{26}$ |
| تكرار متجمع صاعد | 5 | 6 | 11 | 15 | 19 | 24 | 26 |
| تكرار متجمع نازل | 26 | 21 | 20 | 15 | 11 | 7 | 2 |

احساب كل من: الانحراف المتوسط، التباين والانحراف المعياري

الانحراف المتوسط: $19-3=16$

التباين: $Mod_3=16$ ;$Mod_2=7$ ;$Mod_1=:3$

الانحراف المتوسط: $\bar{x} = \frac{3\times5+5\times1+7\times5+10\times4+13\times4+16\times5+19\times2}{26} = 9.80$ ..

التباين: $N=26$

$$Med = \frac{x_{13}+x_{14}}{2} = \frac{10+10}{2} = 10$$

**الربعيات**

أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر من أو يساوي $\frac{N}{4}$ هي القيمة الثامنة لأن $\frac{26}{4}=6,5$

$x_7$ تسمى هذه القيمة الرُبعي الأول و نرمز له بالرمز $Q_1$ ( هنا $Q_1=7$ )

أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$ هي القيمة الثالثة و العشرون لأن $\frac{3\times26}{4}=19,5$

$x_{20}$ تسمى هذه القيمة الرُبعي الثالث و نرمز له بالرمز $Q_3$ ( هنا $Q_3=16$ )

**العشريات**

لدينا $\frac{N}{10}$ $\frac{26}{10}=2,6$

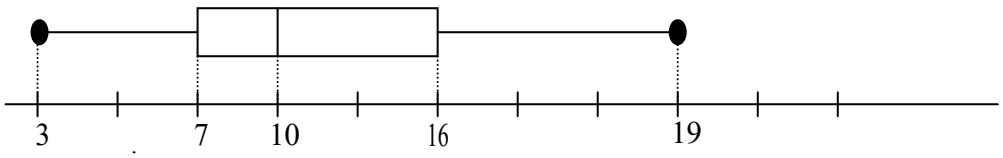
$x_3$ تسمى هذه القيمة العشري الأول و نرمز له بالرمز $D_1$ ( هنا $D_1=3$ )

لدينا $\frac{9N}{10}$ $\frac{9\times26}{10}=23,4$

$x_{24}$ تسمى هذه القيمة العشري التاسع و نرمز له بالرمز $D_9$ ( هنا $D_9=16$ )

**المخطط بالعلبة :**

$\min=3$ ، $\max=19$ ، $Q_1=7$ ، $Med=10$ و $Q_3=16$ .






www.dzexams.com

تم بفضل اللّه

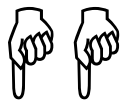
الحمد للّه الذي بنعمته تتم الصالحات

**الأستاذ يوسف بوشناق**

يتمنى لكم التوفيق

تجدون هذا الملف في صفحة

Top Maths






www.dzexams.com