

الاشتقاقية

الاشتقاقية: f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي x_0 و (C_f) تمثيلها البياني .

♠ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$ (حيث l عدد حقيقي)

♠ التفسير البياني : المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماسا معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلة هذا المماس هي من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

♠ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0

♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y = f(x_0)$

♠ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0

♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس يوازي حامل محور الترتيب معادلته $x = x_0$

♠ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$ وكان $l_1 \neq l_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0

♠ التفسير البياني : (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ وتدعى A نقطة زاوية .

مشتقات دوال مألوقة :

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (k عدد حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \geq 2; n \in \mathbb{N}$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

المشتقات والعمليات على الدوال : f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي

الدالة	$f + g$	kf	$f \times g$	$g = \frac{1}{f}$ (مع $f \neq 0$)	$\frac{f}{g}$ (مع $g \neq 0$)	$g = \sqrt{f}$ (مع $f \geq 0$)
المشتقة	$f' + g'$	kf'	$f' \times g + g' \times f$	$g' = -\frac{f'}{f^2}$	$\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$	$g' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

مشتقة بعض الدوال :

الدالة	f^n	$f(x) = g(ax + b)$	$f(x) = \sin(ax + b)$	$f(x) = \cos(ax + b)$	$(g \circ f)(x)$
المشتقة	$nf'f^{n-1}$	$f'(x) = ag'(ax + b)$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$	$f'(x) \times g'(f(x))$

❖ نقطة الانعطاف :

إذا انعدمت المشتقة الثانية $f''(x)$ من أجل x_0 مغيرة إشارتها بجوار x_0 فإن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(x_0; f(x_0))$
♠ التفسير الهندسي : المماس (T) للمنحني (C_f) عند نقطة الانعطاف $A(x_0; f(x_0))$ يخترق المنحني (C_f) .

سلسلة تمارين الاشتقاقية

✓ التمرين 01 ◀

♠ ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند x_0 ماذا تستنتج ؟ ثم فسر النتيجة هندسيا في كل حالة من الحالات التالية :

$x_0 = -1$	;	$f(x) = x^2 - x$ ♦ [1]
$x_0 = 0$	;	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ ♦ [2]
$x_0 = 2$	;	$f(x) = \sqrt{x-2}$ ♦ [3]
$x_0 = 1$	;	$f(x) = 2x x-1 $ ♦ [4]

✓ التمرين 02 ◀

♠ f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم .

- [1] ♦ اكتب f دون رمز القيمة المطلقة .
- [2] ♦ احسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟ ثم اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .
- [2] ♦ اكتب معادلتى المماسين (Δ_1) و (Δ_2) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

✓ التمرين 03 ◀

♠ ادرس تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها (D_f) في كل حالة من الحالات التالية :

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$;	$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$ ♦ [3]	$D_f = \mathbb{R}$;	$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$ ♦ [1]
$D_f =]-1; +\infty[$;	$f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ♦ [4]	$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$;	$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$ ♦ [2]

♠ احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ في كل حالة من الحالات التالية :

$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ♦ [4]	$g(x) = f(x^3)$ ♦ [3]	$g(x) = f(x^2)$ ♦ [2]	$g(x) = f(3x+1)$ ♦ [1]
--	-----------------------	-----------------------	------------------------

✓ التمرين 04 ◀

♠ نعتبر الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي : $f(x) = a + \frac{b}{x-3}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

[1] ♦ عين العددين a و b إذا علمت أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الترتيب في النقطة

التي ترتيبتها $\frac{4}{3}$ ويقبل المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحني (C_f) .

♠ نفرض فيما يلي أن : $a = 2$ و $b = 2$.

[2] ♦ ادرس تغيرات الدالة f

[3] ♦ عين أحداثيات نقط تقاطع للمنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات .

[4] ♦ بين ان المنحني (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كلا منهما يساوي -2 .

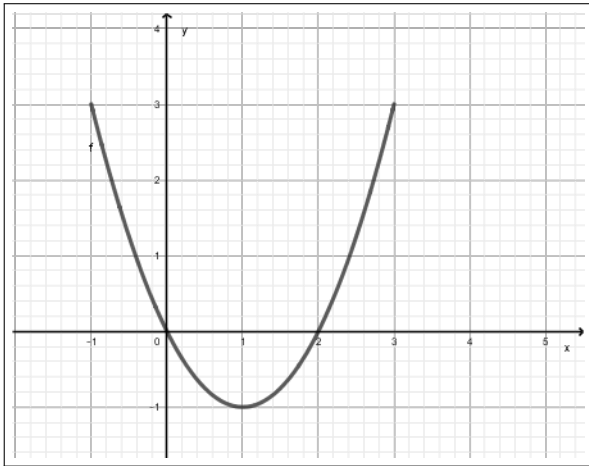
✓ التمرين 05 ◀

- ♠ f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = ax^3 + bx + c$. حيث a, b, c أعداد حقيقية .
[1] عين الأعداد الحقيقية a, b, c علما أن التمثيل البياني (C_f) الممثل للدالة f يشمل النقطة $A(1; -3)$ ويقبل في النقطة $B(0; 1)$ مماسا يوازي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -6x + 1$

- ♠ g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$. حيث a و b عدنان حقيقيان.
[1] عين العددين a و b علما أن التمثيل البياني (C_g) الممثل للدالة g يقبل في النقطة $A(1; 2)$ مماسا يوازي محور الفواصل .
[2] بين أن للمنحنى (C_g) نقطة إنعطاف w يطلب تعيينها , ثم اكتب معادلة المماس ل (C_g) عندها .
♠ h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$. حيث a و b عدنان حقيقيان.
[1] عين العددين a و b علما أن التمثيل البياني (C_h) الممثل للدالة h يقبل في النقطة $A(0; 3)$ مماسا معامل توجيهه 4 .

✓ التمرين 06 ◀

- ♠ f الدالة المعرفة على المجال $[-1; 3]$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



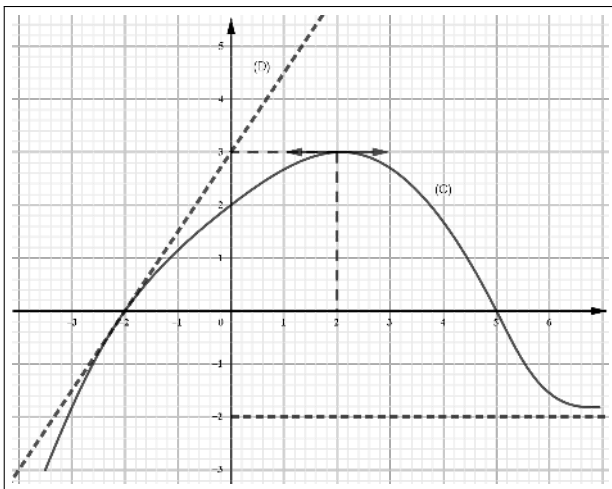
♠ بقراءة بيانية ♠

- [1] شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-1; 3]$
[2] عين إشارة $f(x)$ على المجال $[-1; 3]$.
[3] عين إشارة $f'(x)$ على المجال $[-1; 3]$.
♠ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-1; 3]$ كما يأتي : $g(x) = [f(x)]^2$
[4] احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g'(x)$.
[5] شكل جدول تغيرات الدالة g .
♠ نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[-1; 3]$ كما يأتي : $h(x) = [f(x)]^3$
[5] احسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.
[7] شكل جدول تغيرات الدالة h .

✓ التمرين 07 ◀

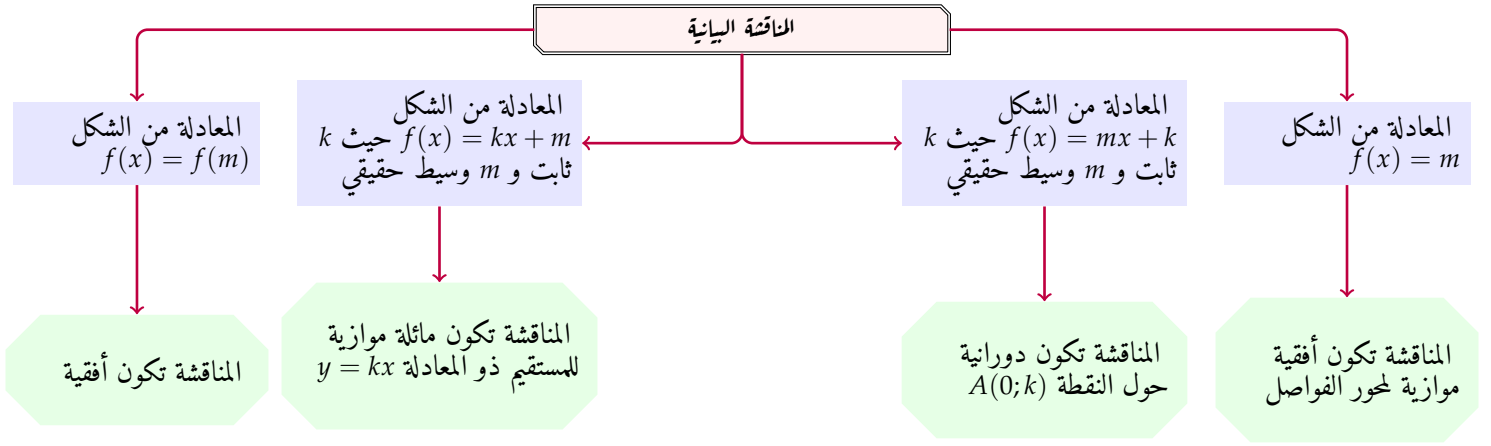
- ♠ المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$.

♠ بقراءة بيانية عين ♠



- [1] $f(0) = \dots\dots\dots$ [2] $f(5) = \dots\dots\dots$
[3] $f(-2) = \dots\dots\dots$ [4] $f(2) = \dots\dots\dots$
[5] $f'(-2) = \dots\dots\dots$ [6] $f'(2) = \dots\dots\dots$
[7] $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$ [8] $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$
[9] معادلة المماس (D) : $y = \dots x + \dots$
[10] وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل
[11] حساب قيم x إشارة $f(x)$
[12] حساب قيم x إشارة $f'(x)$
[13] شكل جدول تغيرات الدالة f
[14] حلول المعادلة : $f(x) = 2$
[15] حلول المتراجحة : $f(x) \geq 2$
[16] ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي : m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = m$.

الناقشة البيانية



الدالة الزوجية:

إذا كانت $f(x) = f(-x)$ نقول أن الدالة f زوجية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب .

الدالة الفردية:

إذا كانت $f(-x) = -f(x)$ نقول أن الدالة f فردية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمركز المعلم .

الدالة الدورية:

إذا كانت $f(x+p) = f(x)$ نقول أن الدالة f دورية وتمثيلها البياني يعيد نفسه عند كل مجال طوله p .

مركز التناظر:

إذا كانت $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل مركز تناظر هو النقطة $A(\alpha; \beta)$.

محور التناظر:

إذا كانت $f(2\alpha - x) = f(x)$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$.

التقاطع مع محور الفواصل:

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ونجد فواصل هذه النقط مع العلم أن ترتيباتها معدومة .

التقاطع مع محور الترتيب:

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الترتيب نحسب $f(0)$ ونجد ترتيبات هذه النقط مع العلم أن فواصلها معدومة .

استنتاج تمثيل بياني من آخر:

① إذا كانت $h(x) = |f(x)|$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل .

و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل .

② إذا كانت $h(x) = f(|x|)$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) لما يكون $x > 0$.

و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب لما يكون $x < 0$.

③ إذا كانت $h(x) = -f(x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .

④ إذا كانت $h(x) = f(-x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب .

⑤ إذا كانت $h(x) = f(x+a) + b$ فإن (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a, b)$.

⑥ إذا كانت $h(x) = -f(-x)$ فإن (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمركز المعلم .