

**التمرين الأول: ( 06,5 ن )**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . دائرة مركزها  $O$  و طول نصف قطرها  $\frac{8}{2^n}$  حيث  $n$  عدد طبيعي.  $M_n$  نقطة من الدائرة  $(\mathcal{C}_n)$  حيث :  $(\vec{i}; \overrightarrow{OM_n}) = \frac{n\pi}{2}$

1. أنشئ النقط  $M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4$ .
2. عيّن طبيعة المثلث  $OM_nM_{n+1}$ .
3. بين أن :  $M_nM_{n+1} = \frac{8\sqrt{5}}{2^{n+1}}$
4. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $u_n = M_nM_{n+1}$   
 (أ) برهن أن  $(u_n)$  متتالية هندسية . عيّن أساسها و حدّها الأول. هل هي متقاربة ؟  
 (ب) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$   
 (ج) احسب بدلالة  $n$  الجداء  $P_n$  حيث :  $P_n = u_0^2 \times u_1^2 \times \dots \times u_n^2$

**التمرين الثاني: ( 06,5 ن )**

• القول إن الدالة  $f$  دورية و دورها  $p$  يعني: أنه من أجل كل  $x$  من  $D_f$   $x+p \in D_f$  و  $f(x+p) = f(x)$ .

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة :  $f(x) = 1 - 8\cos x - 4\cos 2x$

1. (أ) برهن أن  $f$  دورية و دورها  $2\pi$ .  
 (ب) ادرس شفعية  $f$ .  
 (ج) استنتج أنه يمكن اقتصار دراسة  $f$  على المجال  $[0; \pi]$  و اشرح كيف يمكن أن نكمل التمثيل البياني للدالة  $f$  على  $[0; \pi]$  لكي نحصل على التمثيل البياني للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .
2. (أ) احسب  $f'(x)$  و تحقق أن  $f'(x) = 8\sin x(1 + 2\cos x)$ .  
 (ب) ادرس إشارة  $f'(x)$  ثم شكّل جدول تغيّرات  $f$  من أجل  $x$  ينتمي إلى المجال  $[0; \pi]$ .
3. (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(x) = -8\cos^2 x - 8\cos x + 5$ .  
 (ب) استنتج حسابيا حلول المعادلة  $f(x) = -1$  في  $\mathbb{R}$ .

$ABC$  مثلث متقايس الساقين رأسه  $A$  حيث  $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{5}$  و  $k$  عدد صحيح نسبي ، نضع  $BC = a$ .

منصف الزاوية  $\widehat{ABC}$  يقطع الضلع  $[AC]$  في نقطة  $D$ .

$[DH]$  ؛  $[DI]$  ؛  $[AJ]$  و  $[BK]$  هي الارتفاعات في المثلثات  $DAB$  ؛  $DBC$  ؛  $ABC$  و  $DBC$  على الترتيب.

1. أنجز شكلاً .

2. أ) برهن أن المثلثان  $DAB$  و  $DBC$  متقايسا الساقين .

ب) نعتبر المثلث  $DAB$  ، عبّر عن الطول  $AB$  بدلالة  $\cos \frac{\pi}{5}$  و  $a$ .

استنتج عبارة  $CD$  بدلالة  $\cos \frac{\pi}{5}$  و  $a$ .

ج) نعتبر المثلث  $DBC$  ، برهن أن:  $CD = 2a \cos \frac{2\pi}{5}$

د) استنتج أن:  $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$

3. أ) نعتبر المثلث  $DBC$  ، عبّر عن الطول  $IB$  بدلالة  $\cos \frac{\pi}{5}$  و  $a$ .

استنتج عبارة  $IC$  بدلالة  $\cos \frac{\pi}{5}$  و  $a$ .

ب) برهن أن:  $IC = 2a \left( \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right)$

ج) استنتج أن:  $\cos \frac{\pi}{5} + 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} = 1$

4. أ) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة:  $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$

ب) تحقق أن  $\cos \frac{2\pi}{5}$  حل لهذه المعادلة

ج) استنتج القيمة المضبوطة للعدد  $\cos \frac{2\pi}{5}$  ، ثم للعدد  $\cos \frac{\pi}{5}$ .

0,80

**Bonus**

أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون:  $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$