

1.1

أذكر صحة أم خطأ الجمل الآتية مع التعليل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3} = 2 \quad (2)$$

$$(3) \text{ إذا كانت } f(x) = ax + b + g(x) \text{ فإن } y = ax + b$$

معادلة مستقيم مقارب مائل لبيان الدالة f .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4x - 1}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad (4)$$

$$(5) \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ فإن } -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$(6) \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ فإن } f(x) \geq x^2$$

$$(7) \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ فإن } f(x) \leq x - 1$$

$$(8) \text{ الدالة } f: x \mapsto \frac{1}{x} \text{ مستمرة على } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(9) \text{ الدالة } f: x \mapsto x + \sqrt{x} \text{ مستمرة على } [0; +\infty[$$

$$(10) \text{ الدالة } f: x \mapsto \frac{1}{x} - \sqrt{x} \text{ مستمرة على } [0; +\infty[$$

$$(11) \text{ الدالة } f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 4} \text{ مستمرة على } \mathbb{R}$$

$$(12) \text{ إذا كانت الدالة } f \text{ مستمرة على مجال } [a; b] \text{ فإن المعادلة}$$

$$f(x) = 0 \text{ تقبل على الأقل حلا في المجال }]a; b[$$

$$(13) \text{ إذا كانت } f \text{ دالة مستمرة على المجال } [1; 5] \text{ فإن الدالة } f \text{ مستمرة}$$

عند 3.

$$(14) \text{ إذا كانت } f \text{ دالة مستمرة على مجال } I \text{ فإن الدالة } \frac{1}{f} \text{ مستمرة}$$

على المجال I .

5 min Maths

Bac 2021

الاستمرارية الاشتقاقية

النهايات

الشعب العلمية

اعداد الأستاذ: شعبان أسامة

(3) خاطئة لأننا لا نعلم $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x)$ التي يجب أن تكون معدومة

لكي تكون الجملة صحيحة .

(4) خاطئة لأن x يؤول إلى 0 و ليس إلى $-\infty + \infty$

$$(5) \text{ صحيحة لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

(6) صحيحة لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ و لدينا : $f(x) \geq x^2$

(7) صحيحة لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3) = -\infty$ و $f(x) \leq x - 3$

(8) خاطئة لأن الدالة f غير معرفة عند 0 وعليه فهي غير معرفة على $\square$ ومن ثم غير مستمرة على $\square$.

(9) صحيحة لأن الدالة هي مجموع دالتين مستمرتان على $[0; +\infty[$

هما : $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x$

(10) خاطئة لأن الدالة غير معرفة عند 0 .

(11) صحيحة لأن الدالة هي مركب دالتين مستمرتان

الأولى : $x \mapsto x^2 + 4$ مستمرة على $\square$ و موجبة

الثانية : $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $\square_+$.

(12) خاطئة فمثلا الدالة $f : x \mapsto x^2 - 1$ مستمرة على المجال

$[4; 2]$ لكن المعادلة $x^2 - 1 = 0$ ليس لها حل في المجال

$[4; 2]$ و حتى تقبل حل أكيد يجب أن يكون $f(a) \cdot f(b) < 0$.

(13) صحيحة لأن الدالة f مستمرة عند كل قيمة من المجال $[5; 1]$.

(14) خاطئة إلا إذا كانت f غير معدومة على I .

(15) خاطئة . فمثلا الدالة $f : x \mapsto -x^2 - 1$ سالبة تماما على $\square$

لكن غير متناقصة تماما لأن : $f'(x) = -2x$ وعليه فهي

متناقصة تماما من أجل $x > 0$ و متزايدة تماما من أجل $x < 0$.

(15) إذا كانت الدالة f سالبة تماما على مجال I فإن الدالة f متناقصة تماما على I .

(16) إذا كانت الدالة f غير مستمرة عند عدد x_0 فإنها غير معرفة عند x_0 .

(17) إذا كانت الدالة f معرفة عند عدد x_0 فإنها غير مستمرة عند x_0 .

(18) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن الدالة $\sqrt{f}$ مستمرة على المجال I .

(19) الدالة $\sqrt{f}$ مستمرة على I .

(20) الدالة : $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ مستمرة على $\square$ لأن :

الدالة $x \mapsto x^2 - 1$ مستمرة على $\square$

و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $\square$.

(19) الدالة : $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ مستمرة على $\square$

لأن الدالة $x \mapsto x^2 - 1$ مستمرة على $\square$

و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $\square$.

(20) المعادلة $x \sin x = 1$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

الحل:

(1) صحيحة لأن $x \rightarrow +\infty$ لما $-x \rightarrow -\infty$ وعليه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{-x} = +\infty$

$$(2) \text{ صحيحة لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(3x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 4) = 7$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 4) = 7$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \quad (2) \text{ لدينا}$$

$$\bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 \neq 0\}$$

نحل المعادلة : $x^2 - 5x + 6 = 0$ فنجد : $x = 2$ أو $x = 3$

ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{2; 3\}$

$$A_f =]-\infty; 2[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[\quad \text{أي :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

لحساب بقية النهايات : نكتب جدول إشارة المقام

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	○	○	+

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 3} = -4$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x - 3} = -4$$

نلاحظ أن
البسط
هو متطابقة
شهيرة نقوم
بتحليله

(16) خاطئة . فمثلا الدالة f حيث :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

معرفة عند 1 ($f(1) = 3$) لكنها غير مستمرة عند 1 لكون :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

(17) صحيحة . لأنه حتى تكون دالة مستمرة عند x_0 يجب أن تكون :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ وتحقق } x_0 \text{ معرفة}$$

(18) خاطئة لأنه قد تكون f سالبة و عليه فالدالة $\sqrt{f}$ غير معرفة.

(19) خاطئة إلا إذا كانت $x^2 - 1 > 0$ وهذا غير محقق في $\mathbb{R}$.

(20) صحيحة لأن الدالة f حيث : $f(x) = x \sin x$ مستمرة

$$\text{على } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ و } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad 1 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

2.

عين مجموعة تعريف كل دالة فيما يلي ثم احسب النهايات عند أطرافها.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \quad (2) \quad f(x) = \frac{3x^3 + x - 4}{x - 1} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} \quad (4) \quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} \quad (3)$$

الحل:

$$(1) \text{ لدينا : } f(x) = \frac{3x^3 + x - 4}{x - 1}$$

$$\bullet D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$$

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \longrightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$$

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \longrightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$f(x) = \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} \quad \text{(4) لدينا :}$$

$$\bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 4x - 3 \neq 0\}$$

نحل المعادلة : $4x^2 - 4x - 3 = 0$ نجد : $x = \frac{3}{2}$ أو $x = -\frac{1}{2}$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right\} \quad \text{و منه :}$$

$$D_f = \left] -\infty ; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right[\cup \left] \frac{3}{2} ; +\infty \right[\quad \text{أي :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(2x^3+1)}{(2x+1)(2x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^3+1}{2x-3} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{10}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \longrightarrow 5 \\ x^2 - 5x + 6 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = +\infty$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \longrightarrow 5 \\ x^2 - 5x + 6 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} \quad \text{(3) لدينا :}$$

$$\bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 3 \neq 0\}$$

نحل المعادلة : $x^2 + 4x + 3 = 0$ فنجد : $x = -3$ أو $x = -1$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3 ; -1\} \quad \text{إن :}$$

$$D_f =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; -1[\cup]-1 ; +\infty[\quad \text{وعليه :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2-4)}{(x+3)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{-5}{2}$$

إشارة المقام لحساب النهايات :

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$3x^2+4x+3$	+	○	○	+

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+5-9)(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4})}{[x-(2x-4)](\sqrt{x+5}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4})}{-(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}}{-(\sqrt{x+5}+3)} = \frac{2+2}{-(3+3)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+x-6)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)\sqrt{x-2}}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+3)\sqrt{x-2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}][\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}]}{(x-1)[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - (2x-1)}{(x-1)[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\sqrt{x+1}+1]}{[\sqrt{x+1}-1][\sqrt{x+1}+1]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\sqrt{x+1}+1]}{(x+1)-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4x^2-4x-3$	+	$\circ$	$\circ$	+

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = +\infty \\
 \begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}
 \end{aligned}$$

3.

احسب النهايات التالية :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{x}-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-4}} \quad (1) \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1} \quad (3)
 \end{aligned}$$

الحل:

حساب النهايات :

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-4}}$$

نضرب و نقسم
على مرافق كل
من البسط و
المقام

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-4})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2x-4})(\sqrt{x}+\sqrt{2x-4})(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right]}{x \left[1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \right]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = \frac{2 - 1}{1 - 2} = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}}{-4x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x - \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left[-1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right]}{x \left[-4 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left[\sqrt{x+1} + 1 \right]}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + 1 = 2
 \end{aligned}$$

.4

احسب النهايات التالية :

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{4x^2 + x}} & \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{x^2 + 1}} \\
 (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 1} - x \right] & \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \sqrt{x} \\
 (5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} & \quad (6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{-x - \sqrt{x^2 + 4}}
 \end{aligned}$$

الحل:

حساب النهايات :

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{4x^2 + x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x - \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} \right)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x - \sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x - x \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}
 \end{aligned}$$

.5

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \quad (4)$$

باستعمال
العدد
المشتق

الحل:

حساب النهايات :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} \times \cos x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}} \times \cos x = 2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1 - 2}{-4 + 1} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 1} - x][\sqrt{x^2 + 1} + x]}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} [-x + \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} [-\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (-\sqrt{x} + 1) = -\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2}][\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}]}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - (x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}} = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{-x - \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(-x + \sqrt{x^2 + 4})}{[-x - \sqrt{x^2 + 4}][-x + \sqrt{x^2 + 4}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(-x + \sqrt{x^2 + 4})}{x^2 - (x^2 + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{4} [-x + \sqrt{x^2 + 4}] = -\infty$$

الحل:

حساب النهايات :

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

بوضع : $x - \frac{\pi}{2} = z$ أي $x = \frac{\pi}{2} + z$

لما $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ فإن $z \rightarrow 0$ وعليه :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3z\right)}{-\sin z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{3\pi}{2} \cos 3z - \sin \frac{3\pi}{2} \sin 3z}{-\sin z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 3z}{-\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{\sin 3z}{3z}}{-\frac{\sin z}{z}} = -3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x}$$

تغيير المتغير

بوضع : $x - \frac{\pi}{4} = z$ أي $x = \frac{\pi}{4} + z$

لما $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ فإن $z \rightarrow 0$ وعليه :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + z\right)}{1 + \cos 4\left(\frac{\pi}{4} + z\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = 2$$

.6

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \cos 4x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z + \sin z}{1 - \cos z - \sin z} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{z}{2}\right) + 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}}{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{z}{2}\right) - 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{z}{2} + 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}}{2\sin^2 \frac{z}{2} - 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{z}{2} \left[\sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2} \right]}{2\sin \frac{z}{2} \left[\sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2} \right]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2}} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

7.7

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} \quad \text{تعتبر الدالة } f:$$

(C) تمثيلها البياني .

1- عين مجموعة تعريف الدالة ثم أحسب النهايات عند أطرافها.

2- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \left[\sin \frac{\pi}{4} \cos z + \cos \frac{\pi}{4} \sin z \right]^2}{1 + \cos(\pi + 4z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos z + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin z \right)^2}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \times \frac{1}{2} (\cos z + \sin z)^2}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2 z + \sin^2 z + 2 \sin z \cos z)}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + 2 \sin z \cos z)}{1 - \cos 4z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2 \sin z \cdot \cos z}{1 - \cos 4z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2 \sin z \cdot \cos z}{1 - (1 - 2 \sin^2 2z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2 \sin z \cdot \cos z}{2 \sin^2 2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z \cdot \cos z}{(2 \sin z \cdot \cos z)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z \cdot \cos z}{4 \sin^2 z \cdot \cos^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \sin z \cdot \cos z} \end{aligned}$$

وعليه :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \sin z \cdot \cos z} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \sin z \cdot \cos z} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x}$$

$$\text{بوضع } x - \frac{\pi}{2} = z \quad \text{نجد} \quad x = \frac{\pi}{2} + z$$

$$\text{وعليه : لما } x \longrightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{فإن } z \longrightarrow 0$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x + 1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (a + b)x + b + c}{x + 1}$$

باستعمال
المطابقة

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -4 \end{cases} \quad \text{ومنّه :}$$

$$\text{إذن : } f(x) = x - \frac{4}{x + 1}$$

3- تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

فإن : $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x + 1} = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = x - \frac{4}{x + 1}$$

فإن : $y = x$ معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

4- دراسة الوضع النسبي لـ (Δ) و (C) :

$$f(x) - y = \frac{-4}{x + 1}$$

ومنّه :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$		-	+
$f(x) - y$		+	-

إذن (Δ) لا يقطع (C) .

لما $x \in]-\infty ; -1[$: (C) يقع فوق (Δ)

لما $x \in]1 ; +\infty[$: (C) يقع تحت (Δ)

3- عين معادلات المستقيمات المقاربة.

4- نفرض (Δ) المستقيم المقارب المائل.

درس الوضع النسبي للمنحني (C) و المستقيم (Δ) .

الحل:

1- مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[\quad ; \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

- النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} = +\infty$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 4 \longrightarrow -4 \\ x + 1 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} = -\infty$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 4 \longrightarrow -4 \\ x + 1 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

(2) تبين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

$$\text{إذن : } f(x) = \frac{(ax + b)(x + 1) + c}{x + 1}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} - x \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-x - \sqrt{x^2 + 1}} = 0
\end{aligned}$$

3- تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 0 \quad \text{بما أن :}$$

فإن : $y = 3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0 \quad \text{بما أن :}$$

فإن : $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

9.

$$f(x) = \frac{4 + \sin x}{x^2} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ حيث :}$$

1- عين عددين حقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$$a \leq 4 + \sin x \leq b$$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون :

$$v(x) \leq f(x) \leq u(x) \quad \text{حيث } u \text{ و } v \text{ دالتان يطلب تعيينهما.}$$

3- استنتج النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

الحل:

8.

f دالة معرفة بالعلاقة : $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$

1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$ ثم $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$

3- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

الحل:

حساب النهايات :

$$D_f =]-\infty ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

2- حساب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} - 3x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(-x - \sqrt{x^2 + 1})}{-x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{-x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{-x - \sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\bullet \text{ إذا كان } \alpha - 1 = 0 \text{ أي } \alpha = 1 : f(x) = -\frac{1}{3}$$

$$\text{وعليه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$$

$$\bullet \text{ إذا كان : } \alpha^2 - 1 = 0 \text{ و } \alpha - 1 \neq 0 \text{ أي } \alpha + 1 = 0 \text{ ومنه : } \alpha = -1$$

$$f(x) = \frac{-2x + 1}{-3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$$

$$\bullet \text{ إذا كان } \alpha \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\alpha - 1)x}{(\alpha^2 - 1)x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x}{(\alpha^2 - 1)x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

11.

f دالة عددية معرفة كما يلي :

1- تعيين a و b :

$$\text{لدينا : } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ ومنه : } 3 \leq 4 + \sin x \leq 5$$

$$2- \text{ تبيان أن : } v(x) \leq f(x) \leq u(x)$$

$$\text{لدينا : } 3 \leq 4 + \sin x \leq 5$$

$$\text{وعليه : } \frac{3}{x^2} \leq \frac{4 + \sin x}{x^2} \leq \frac{5}{x^2}$$

$$\text{ومنه : } \frac{3}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{5}{x^2}$$

3- استنتاج النهايات :

$$\bullet \text{ بما أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$$

$$\text{فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \text{ بما أن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = 0$$

$$\text{فإن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$-4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + \sin x}{x^2} = +\infty$$

10.

$$f \text{ دالة معرفة بالعلاقة : } f(x) = \frac{(\alpha - 1)x + 1}{(\alpha^2 - 1)x - 3}$$

حيث α عدد حقيقي .

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) , \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

الحل:

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ ومنه } f(1) = \frac{(1)^2}{(1)^2 + 1} \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x^2} + 1 = 0$$

إذن f غير مستمرة عند 1 لأنها لا تقبل نهاية عند 1.

13.

f دالة معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 4} , & x > 0 \\ f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} , & x \leq 0 \end{cases}$$

عين العدد الحقيقي b بحيث تكون الدالة f مستمرة عند 0

الحل:

تعيين b بحيث تكون f مستمرة عند 0 :

$$\text{لدينا : } f(0) = \sqrt{2(0)^2 + 1} \text{ ومنه : } f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + b}{x^2 + 4} = \frac{b}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2x^2 + 1} = 1$$

حتى تكون f مستمرة عند 0 يجب أن يكون :

$$\frac{b}{4} = 1 \text{ ومنه } b = 4$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} ; & x \neq 1 , x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f

2- ادرس استمرارية f عند -1 .

الحل:

1- تعيين مجموعة التعريف :

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} : D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[\text{ أي } D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

2- دراسة الاستمرارية عند -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$$

وعليه : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ ومنه f مستمرة عند -1 .

12.

f دالة معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} , & x \geq 1 \\ f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1 , & x < 1 \end{cases}$$

أدرس استمرارية الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل:

- دراسة الاستمرارية على $\mathbb{R}$ للدالة f :

• من أجل $x \in]1 ; +\infty[$: الدالة f مستمرة لأنها دالة ناطقة .

• من أجل $x \in]-\infty ; 1[$: الدالة f مستمرة لأنها دالة كثيرة حدود .

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{|x-1|}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad f \text{ دالة معرفة بالعلاقة :}$$

1- عين مجموعة التعريف

2- أدرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها

الحل:

(1) مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R}$

(2) دراسة الاستمرارية على D_f :

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{x-1}{x-1} ; x > 1 \\ f(x) = x - \frac{x-1}{x-1} ; x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 ; x > 1 \\ f(x) = x - 1 ; x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

• الدالة f مستمرة على المجال $]1; +\infty[$ لأنها دالة كثيرة الحدود

• الدالة f مستمرة على $]1; -\infty[$ لأنها دالة كثيرة حدود .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

ومنه f غير مستمرة عند 1 وبالتالي f غير مستمرة على D_f .

f دالة معرفة بجدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$	3^-	2^-	3	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow 1$	$\searrow -3$	$\nearrow +4$	$\searrow 3$

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$.

الحل:

تعيين عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$

(1) في المجال : $]-\infty; -3]$ لدينا : f مستمرة و متزايدة تماما

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad f(-3) = 1$$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty; -3]$.

(2) في المجال $[-3; -2]$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما

$$\text{ولدينا : } f(-3) = 1 \quad \text{و} \quad f(-2) = -3 \quad \text{ومنه حسب نظرية القيم}$$

المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[-3; -2]$.

(3) في المجال $[2; 3]$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما

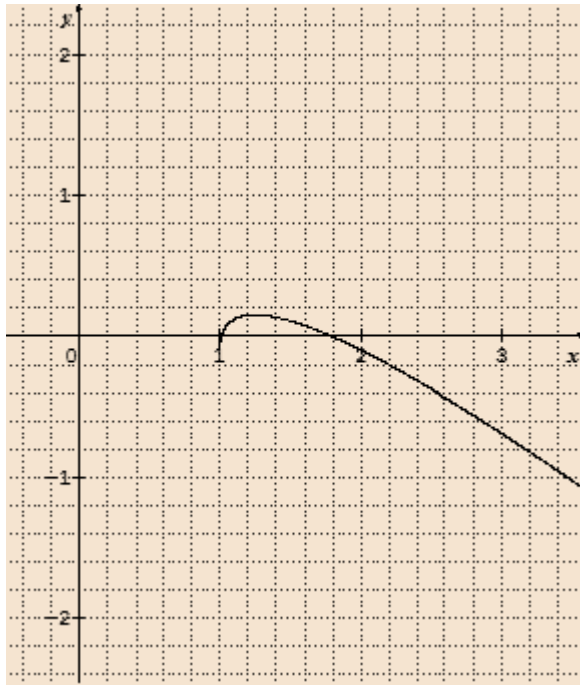
$$\text{ولدينا : } f(-2) = -3 \quad \text{و} \quad f(3) = 4 \quad \text{ومنه حسب نظرية القيم}$$

المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[2; 3]$.

وبالتالي : عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على $\mathbb{R}$ هي ثلاث حلول.

الحل:

تم انشاء هذا التمثيل البياني باستعمال المبرمج (Sin qua non)

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا محصور في $[1,78 ; 1,79]$.

18.

أثبت أن المعادلة : $2x - \cos x = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال : $\left[0 ; \frac{\pi}{6}\right]$

الحل:

إثبات أن المعادلة : $2x - \cos x = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال

$$\left[0 ; \frac{\pi}{6}\right]$$

16.

إليك جدول التغيرات لدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-4	4	-2

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ في $\square$.

الحل:

تعيين عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ (1) في المجال $]-\infty ; 0]$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و تأخذقيمها في المجال $]-4 ; 4]$ و بما أن $2 \in]-4 ; 4]$ فإن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد حسب نظرية القيم المتوسطة .(2) في المجال $[0 ; +\infty[$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما و تأخذقيمها في المجال $]-2 ; 4]$ و بما أن $2 \in]-2 ; 4]$ فإن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد حسب نظرية القيم المتوسطة.إذن للمعادلة $f(x) = 2$ حلين في $\square$.

17.

 f دالة معرفة على المجال $[1 ; +\infty[$ بالعلاقة :

$$f(x) = -x + \sqrt{x-1} + 0,9$$

أنشئ التمثيل البياني للدالة f باستعمال آلة بيانية . ثم استنتج عدد حلولالمعادلة : $f(x) = 0$ مع إعطاء حصرا لكل منها بتقريب 10^{-2}

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 2
\end{aligned}$$

إذن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ وعليه f مستمرة عند 0 .

2- دراسة الاستمرارية على D_f :

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad \text{لدينا :}$$

ولدينا : $x \mapsto x \sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.

ولدينا : $x \mapsto 1 - \cos x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.

إذن الدالة f هي حاصل قسمة دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0 \right[\cup \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right]$ ومنه الدالة f مستمرة على D_f .

• الدالة f هي مجموع دالتين و منه فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ لأن الدالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و عليه :} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\text{إذن :} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} \quad \text{وعليه :} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$$

$$f(0) = 2(0) - \cos 0 \quad \text{وعليه :} \quad f(0) = -1$$

$$\text{إذن :} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right), f(0) < 0$$

وحسب نظرية القيم المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل على الأقل في المجال $\left] 0 ; \frac{\pi}{6} \right[$.

19

f دالة معرفة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$ كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x}, x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند 0

2- ادرس استمرارية f على مجموعة التعريف .

الحل:

1- دراسة الاستمرارية عند 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}$$

فدالة معرفة و مستمرة على المجال $[0 ; 1]$ ز تأخذ قيمها في المجال $[0 ; 1]$.

- 1- برهن على وجود عدد α من المجال $[0 ; 1]$ بحيث : $f(\alpha) = \alpha$.
- 2- فسر هندسيا هذه النتيجة .
- 3- هل تبقى النتائج السابقة صحيحة على مجال $[a ; b]$ حيث $a < b$.

الحل:

1- البرهان على وجود α :

نعرف الدالة g كمايلي : $g(x) = f(x) - x$ على المجال $[0 ; 1]$

- الدال g مستمرة على $[0 ; 1]$ لأنها مجموع دالتان مستمرتان على $[0 ; 1]$.

• ولدينا $g(0) = f(0) - 0$ و $g(1) = f(1) - 1$

بما أن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $[0 ; 1]$ فإن : $0 \leq f(x) \leq 1$

أي أن : $0 \leq f(0) \leq 1$ و عليه $0 \leq g(0) \leq 1$

إذن $g(0) \geq 0$.

وكذلك $0 \leq f(1) \leq 1$ و عليه $-1 \leq f(1) - 1 \leq 0$

إذن $g(1) \leq 0$ و منه : $g(0) \cdot g(1) \leq 0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد α من المجال $[0 ; 1]$

بحيث $g(\alpha) = 0$

أي $f(\alpha) - \alpha = 0$ و عليه : $f(\alpha) = \alpha$

2- التفسير الهندسي للنتيجة :

العدد α هو حل للمعادلة $f(x) = x$ و منه التمثيل البياني للدالة f

يتقاطع مع المنصف الأول : $y = x$ في نقطة فاصلتها α .

3- لندرس صحة النتائج السابقة في المجال $[a ; b]$.

لتكن الدالة g حيث : $g(x) = f(x) - x$

• الدالة g مستمرة على $[a ; b]$ لأنها مجموع دالتان مستمرتان على $[a ; b]$

• $g(a) = f(a) - a$ و $g(b) = f(b) - b$

لدينا : $a \leq f(x) \leq b$ و عليه : $a \leq f(a) \leq b$

ومنه : $0 \leq f(a) - a \leq b - a$ وبالتالي : $f(a) - a \geq 0$

أي أن : $g(a) \geq 0$

وكذلك : $a \leq f(b) \leq b$ و عليه : $g(b) \leq 0$

إذن : $g(a) \cdot g(b) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد α من المجال

$[a ; b]$

بحيث $f(\alpha) - \alpha = 0$ و عليه $f(\alpha) = \alpha$

و عليه (C_r) يتقاطع مع المنصف الأول في نقطة فاصلتها α .

إذن تبقى النتائج السابقة صحيحة

21.

برهن أن كل كثير حدود درجته فردية ينعدم على الأقل مرة في $\mathbb{R}$.

الحل:

نعتبر دالة كثيرة حدود من الدرجة n ودرجته فردية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n \neq 0$ و n عدد فردي نفرض $a_n > 0$

• الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = -\infty$$

وعليه حسب نظرية القيم المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل على الأقل في $\square$.

أي أن $f(x)$ ينعدم مرة واحدة على الأقل.

