

سلسلة تمارين المتتاليات

التمرين 1: ينسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$ ، و لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$u_0 = 5 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$$

1- نعتبر المستقيمين (D) و (D') المعرفين بمعادلتيهما: $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x - 2$ على الترتيب.

(أ) مثل بيانيا (D) و (D') ثم مثل على محور الفواصل الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) (دون حسابها).

(ب) ما هو تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها؟

(ت) عين α فاصلة نقطة تقاطع (D) و (D') .

(ث) من أجل قيمة α المحصل عليها في السؤال السابق نضع:

$$v_n = u_n - \alpha$$

- أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .
- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- أدرس تقارب (v_n) ، واستنتج تقارب المتتالية (u_n) .
- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و تأكد من التخمين الذي وضعته سابقا.

2- أحسب المجموعين :

$$S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

التمرين 2: نعتبر المتتالية لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{و من أجل كل}$$

1 أ- بين بالتراجع أن من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 1$

ب - أدرس رتبة المتتالية (u_n) ثم استنتج تقاربها .

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية

(ب) أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين 3: (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$U_0 = 4 \text{ و } U_{n+1} = \frac{9U_n - 49}{U_n - 5}$$

1 برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n : U_n \neq 7$

2 لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n = \frac{1}{U_n - 7}$

3 برهن أن (V_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

4 عبر عن V_n و U_n بدلالة n

5 أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

ثم استنتج بدلالة n المجموع :

$$H_n = V_0 U_0 + V_1 U_1 + \dots + V_n U_n$$

التمرين 4:

1 (u_n) متتالية حسابية متناقصة معرفة على بدها الاول u_0 و أساسها r

أ- عين u_0 و r علما ان:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \dots\dots\dots (1) \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

ب- أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب المجموع

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = e^{14-3n}$ حيث

أساس اللوغاريتم النبيري

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و

حدها الاول v_0 ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و ماذا تستنتج ؟

ب- أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

ج - أحسب u_{2011} ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

التمرين 05: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على

$$\begin{cases} \ln u_3 + \ln u_7 = 2 \ln 2 + 8 \\ \ln u_2 - \ln u_6 = -4 \end{cases} \quad \text{حيث } IN^*$$

1/ عين الحد الأول والأساس لهذه المتتالية وأحسب u_n بدلالة n

2/ نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، أحسب S_n

بدلالة n ، عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

3/ نضع : $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$ ، برهن أن (v_n)

متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول والأساس

التمرين 06: (u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي :

$$u_0 = e^3 - 1 \text{ ومهما يكن العدد الطبيعي } n :$$

$$e^3 u_{n+1} = 1 - e^3 + u_n$$

1/ أحسب : u_3, u_2, u_1

2/ أثبت أنه مهما يكن العدد الطبيعي $n : 1 + u_n > 0$

3/ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

4/ (v_n) متتالية عددية معرفة بـ $v_n = 2(1 + u_n)$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها ، أكتب v_n بدلالة n

ب) نضع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين 07: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

1/ أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن :

$$0 < u_n < 1$$

ج) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2/ نضع : $x_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير

معدوم : $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ ، ب- احسب : $\lim x_n$

3/ نضع : $v_n = \ln(x_n)$

أ- تحقق أن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ ،

ب- أثبت أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$

ج- أثبت أن المتتالية (v_n) محدودة

د- عين نهاية المتتالية (v_n) لما يؤول n إلى $+\infty$

3/ نضع : $y_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$

أ- أكتب y_n بدلالة x_n

ب- عين نهاية المتتالية (y_n) لما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين 08: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالشكل :

$$4u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n \text{ و } u_1 = \frac{1}{2}, u_0 = \frac{1}{4}$$

1/ أحسب : u_2 و u_3

2/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - u_n$

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq v_n \leq \frac{1}{4}$

ب) بين أن (v_n) متناقصة ، ماذا تستنتج

ج) برهن أن (v_n) متتالية هندسية ، عين أساسها وحدها الأول ثم عبر عن v_n بدلالة n

د/ أحسب : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$ وإستنتج عبارة u_n بدلالة n

التمرين 09: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \end{cases}$$

1/ أحسب $u_1; u_2; u_3$

2/ أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$: $u_n \geq 0$

أ- إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$: $u_n \geq n - 3$

ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n)

3/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

أ- بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

ج- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين 10: (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول

$$u_0 = 1 - \frac{1}{e} \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n :$$

$$u_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - u_n}$$

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3. أثبت أن (u_n) متقاربة .

4. لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = \ln(1 - u_n) \text{ كما يلي :}$$

• بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

• عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

• أحسب الجداء π_n حيث :

$$\pi_n = (1 - u_0) \times (1 - u_1) \times \dots \times (1 - u_n)$$

التمرين 11: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}; u_1 = 1 \\ \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} \right) : n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{-1 + 4u_n}$

2. نعتبر (v_n) متتالية معرفة بـ $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{4}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ) بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n . ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين 12: (u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$

$$u_{n+1} = \sqrt{4u_n} : n \text{ عدد طبيعي}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$

2. لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = \ln\left(\frac{u_n}{4}\right) \text{ كما يلي :}$$

• بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

• عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

• أحسب المجموع S حيث: $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

• أحسب الجداء π_n حيث: $\pi_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.

التمرين 13: نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

1. أثبت أن: $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^+$.

2. أثبت أن: f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \leq \sqrt{3}$ فإن $f(x) \leq \sqrt{3}$.

3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ $u_0 = -1$

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ و}$$

• برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n \geq 0$.

• برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.

• أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة

4. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ $v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

• برهن أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حددها الأول.

• اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n \text{ ثم } \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n$$

التمرين 14: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي:

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \text{ و } u_0 = 1$$

I. أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ المنحني (c_f)

الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ حيث:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \text{ و المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = x$$

II. باستعمال الرسم السابق و دون حساب الحدود مثل على محور الفواصل الحدود $u_2 ; u_1 ; u_0$.

أ. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{R}^+$:

$$1 \leq u_n < 4$$

ج. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

III. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بالعلاقة:

$$v_n = u_n + \alpha \text{ حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي غير معدوم.}$$

1. عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها

$$q \text{ و حددها الأول } v_0.$$

2. نضع $\alpha = -4$

أ. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة

$$u_n \text{ بدلالة } n.$$

ب. أحسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

التمرين 15: (U_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حددها الأول

$$\begin{cases} U_1 + 2U_2 + U_3 = 32 \\ U_1 \times U_2 \times U_3 = 216 \end{cases} \text{ حيث : } U_1 \text{ وأساسها } q$$

(1) أ- أحسب U_2 و q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول U_1

ب- اكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n

ج- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

(2) (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{R}^+$ كمايلي:

$$V_{n+1} = \frac{3}{2}V_n + U_n \text{ و } V_1 = 2$$

(أ) أحسب V_2 و V_3

(ب) نضع من أجل كل n غير معدوم: $W_n = \frac{V_n}{U_n} - \frac{2}{3}$

• بين أن (W_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

• اكتب W_n بدلالة بدلالة n ثم استنتج V_n بدلالة n

• أحسب المجموع $S_n = w_1 + \dots + w_n$ بدلالة n .

التمرين 16: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

- 1) أحسب الحدود u_4, u_3, u_2 .
 2) أ) أثبت أنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم $n : u_n > 0$.
 ب) أثبت أن (u_n) متناقصة .
 ج) إستنتج سلوك المتتالية (u_n) .

- 3) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n : v_n = \frac{u_n}{n}$
 أ) أثبت أن (v_n) هندسية ، عين أساسها وحدها الأول v_1 .
 ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n : u_n = \frac{n}{2^n}$

التمرين 17 :

- i. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و بالعلاقة :
 $u_{n+1} = -2u_n + 3$
 ➤ أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة
 ➤ أحسب بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 ii. نفرض $u_0 = 3$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - 1$
 1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
 2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .
 3) أحسب ، بدلالة n ، المجموعين $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين 18 :

- لتكن المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 4U_n - 5 \end{cases}$$

 1. أحسب الحدين U_1, U_2 .
 2. نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
 $V_n = 3U_n + \beta$ حيث β عدد حقيقي .

- عين قيمة β بحيث تكون المتتالية (V_n) متتالية هندسية .
- أكتب V_n بدلالة n ، ثم عبر عن U_n بدلالة n
- أحسب المجموع S حيث : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$
- أحسب الجداءات التالية : $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

التمرين 19 :

- لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ و بالعلاقة :
 $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$
 1- لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ : $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$
 (a) حل في $\mathbb{R}^+$ المعادلة $f(x) = x$.

- (b) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; 1]$.

- إستنتج أنه إذا كان $x \in [0; 1]$ فإن $f(x) \in [0; 1]$.

- 2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n \in [0; 1]$.

- 3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

- 4- أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة . عين نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين 20 :

- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ :
 $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

- وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; i^r; j^m)$ ،

- الجزء الأول : g هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$g(x) = -[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x]$$

1. أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في الحالتين

$$0 < x < 1 \text{ و } x > 1$$

2. أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ ، 0 ، ثم استنتج

- المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) .

3. أحسب $f'(x)$ واستنتج أن إشارتها من نفس إشارة

الدالة g

4. إستنتج اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

5. أرسم (C_f) والمستقيمين المقاربين

الجزء الثاني :

- (u_n) متتالية معرفة بحددها الأول u_0 حيث : $u_0 \in [1; 2]$ ، ومن

$$u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1 \text{ لدينا } n \text{ لكل عدد طبيعي}$$

1. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; 2]$

$$\text{لدينا : } 0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$$

2. برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$u_n \in [1; 2]$$

3. بملاحظة أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} = f(u_n) + u_n \text{ ، عين اتجاه تغير المتتالية } (u_n) .$$

4. برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة

- ✓ نسمي العدد l نهايتها ' أحسب بدقة قيمة l .

التمرين 21 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

- 1/ برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3
- 2/ درس رتبة المتتالية (u_n) . استنتج أن (u_n) متقاربة حسب نهايتها
- 3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n = n(3 - u_n)$
- (أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية
- (ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .
- (ج) جد نهاية المتتالية u_n من جديد
- 4/ احسب المجموعين : $S_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $S_2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$

الأستاذة : بن صافية