



الدوال العددية

reem. engineer

(5) - مبرهنة القيمة المتوسطة :

صيغة السؤال : بين أن المعادلة

$$g(x) = 0 \text{ تقبل حلاً وحيداً } \alpha \text{ حيث :}$$

$$g(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad \alpha \in]-1,47; -1,48[\text{ ثم استنتج إشارة } g(x) \text{ .}$$

الجواب : الدالة g معرفة ومستمرة ورتيبة على

$$[-1,48; -1,47]$$

$$g(-1,48) = \sim = - \sim$$

$$g(-1,47) = \sim = + \sim$$

$$g(-1,48) \times g(-1,47) < 0 \text{ لدينا :}$$

إذن $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha \dots$

* إلاشارة : حسب مبرهنة في م

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

أجب إشارة

(6) - النهايات :

- نهاية كثير حدود : يؤول لحساب نهاية أعلى حد .

- نهاية دالة ناطقة : يؤول لحساب نهاية أعلى على أعلى حد / بقيمة كبرى و صغرى للقيم الممنوعة .

التفسير الهندسي :

$$\leftarrow x = a \text{ م م عمودي ل } (f) \text{ جوار } \pm \infty$$

$$\leftarrow y = b \text{ م م أفقي ل } (f) \text{ جوار } \pm \infty$$

(2) - إتجاه التفرع :

- أولاً نحسب المشتقة :

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 6x + 2 \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = \frac{u}{v} \\ f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{array} \right.$$

- ندرس إشارة المشتقة على $\mathbb{R}$

ل $f'(x) \geq 0$ فإن الدالة f متزايدة

نصاً على هذا المبدأ والعكس .

- ثم نضع جدول التغيرات .

(2) - معادلات التماس :

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- في القراءة البيانية :

(قيمة f')

القيمة = نقطة

تماس

معامل تربية = (قيمة f') التماس

القيمة = قيمة عددية

$$f'(x_0) = 0$$

(3) - مركز و محور التناظر :

$$f(2a - x) + f(x) = 2b \text{ المركز .}$$

$$f(2a - x) = f(x) \text{ المحور .}$$

(4) - وضعية منحني بالنسبة لمستقيم :

نضع : $y = f(x)$ ندرس إشارة

الفرق وعلى أساسه نبني جدول

الوضعية .

المستقيم المقارب المائل:

حيث يكون $y = ax + b$ $a \neq 0$ $b \in \mathbb{R}$ يجب أن يكون:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0 \end{cases}$$

حالات:

و طرق رفعها:

1. طريقة الاختزال: $\frac{0}{0}$

* عند تواجد دالة ناطقة؛ نقسم البسط على المقام ونختزل الحدود المتشابهة؛ ثم نحسب النهاية عند ∞ .

2. طريقة العدد المشق: $\frac{0}{0}$

* عند تواجد دالة كسرية؛

$$f(x) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x}$$

تشتق $g(x)$ ومانحصل عليه فنسب عند النهايات ∞

3. طريقة العامل المشترك: $\frac{\infty}{\infty}$

4. طريقة الضرب في المرافق:

نضرب ونقسم على المرافق؛ إذا

$$f(x) = \sqrt{ax + b} \pm ax$$

و نحسب النهاية ∞

5. طريقة الحصر:

لدينا: $h(x) < f(x) < g(x)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = b$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

6. طريقة المقارنة:

$f(x) \geq g(x)$
 و $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ ؛ إذن:

مباشرة $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

نقطة الانعطاف:

1. إذا انعدمت المشتقة 2 عند

x_0 و غيرت إشارتها فإن $(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ل (f) .

2. إذا كان نقطة (انعطف) مركز تناظر هي نقطة من (f) .

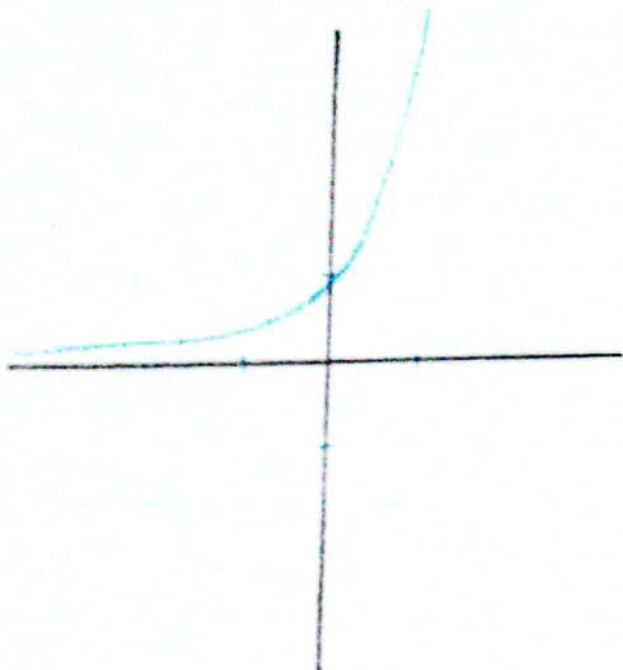
3. إذا انعدمت المشتقة 2 و لم تغير إشارتها عند النقطة A فإن A ن؛

4. نقطة التماس هي نقطة انعطاف ل (f) و قطع المنحنى للمماس

reem. engineer

الدالة الأسية:

4. الفصل البراني ✓

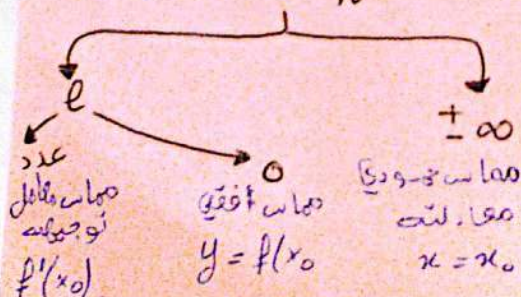


• نهاية الدالة $e^{f(x)}$ تقول حسب
نهاية صرحت بالسيف:

$$\lim_{x \rightarrow x} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x} f(x) = \bullet \\ \lim_{x \rightarrow \bullet} e^x = \star \end{cases}$$

$$① - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$(2) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{h}$$



1. خواص المادة الأساسية

- مع التعريف : $1D_{e^+} = 1R$ و $1D_{e^-} = 1R$

$f(x) = e^x$ متزايداً وتماماً على $\mathbb{R}$

• $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$: خواص :

$$\bullet e^x / e^y = e^{x-y} \quad \bullet \sqrt{e^x} = e^{x/2}$$
$$\cdot (e^x)^y = e^{x \cdot y} \quad \cdot \ln e^a = a$$
$$e^0 = 1$$

2. اشتقاق الدالة e^x :

$$(e^{f(x)})' = f'(x) e^{f(x)}$$

$$(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1}$$

3. الذهابات ✓:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{ففي } y=0$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ۱. بجوار $-\infty$

4. التزاوج المقارن :

①- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} = 1$

② - $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

(3) - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

④ - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

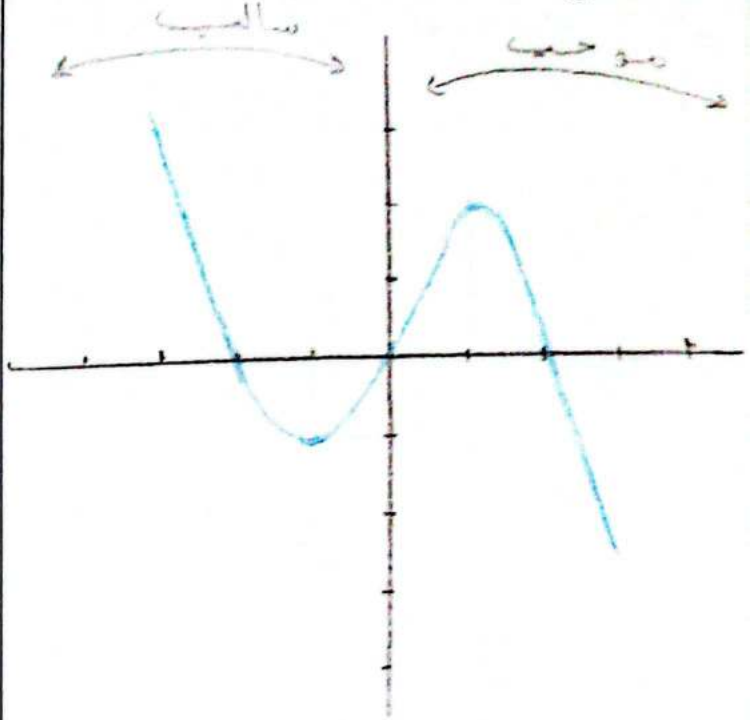
$\lim_{x \rightarrow 0} e^x$ (كثير جداً) = $e^0 = 1$ علاوة النهاية

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x + \left(\frac{1}{x} \right) = \infty$$

لمناقشة التباينة

ملفحة

الأفقية:



$m \in]-\infty; -1[$: يوجد حل وحيد موجب.

$m \in]-1; 1[$: لا يوجد حلول.

$m \in]1; +\infty[$: يوجد حل وحيد سالب.

الدورانية:

حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل
نقط تقاطع (f) مع $y = m$:

$m < -1$: حل وحيد موجب.

$m = -1$: حلين أحدهما مفاعف وآخر موجب.

$-1 < m < 0$: حلين سالبين وحل موجب.

$m = 0$: 3 حلول مفاعف 0، موجب وسالب.

$0 < m < 2$: 3 حلول : 2 موجبة و 1 سالب.

$m = 2$: حل مفاعف $x = 2$ وآخر سالب.

$m > 2$: حل وحيد سالب.

المائلة:

* حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل

نقط تقاطع (f) مع $y = x + m$:

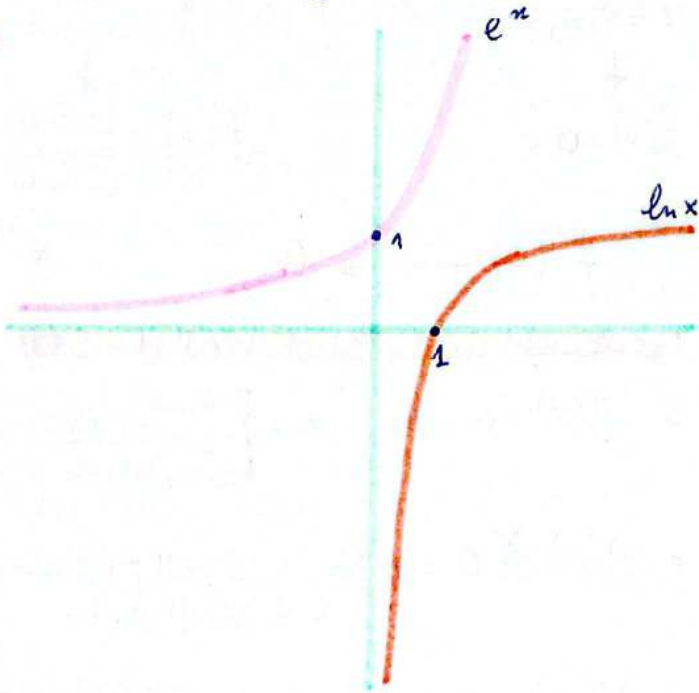
reem. engineer

الدالة اللوغاريتمية

$$③ - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$④ - \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

⑤. التمثيل البياني:



1. خواص الدالة اللوغاريتمية:

هي دالة معاكسة للدالة الأسية تحقق:

$$\ln e^a = a$$

نرمز لها بـ $\ln x$ وهي معرفة على $[0; +\infty[$ (المهم أن يكون ما داخله موجب)

$$① - \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$② - \ln 1 = 0 ; \ln e = 1$$

$$③ - \ln a^n = n \ln a$$

$$④ - \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$⑤ - \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

2. النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

3. المشتقة:

$$f(x) = \ln(u(x))$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

reem.engineer

4. التزايد والمقارنة:

$$① - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - 1}{x - 1} = 1$$

$$② - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$$

حل البصيرة
..... ①

• إذا كانت (f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسة يوازي المستقيم ذو المعادلة:
 $y = mx + k$

$$\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$$

حل البصيرة
..... ②

• إذا كانت (f) يقبل في $A(x_0; y_0)$ مماسة يشمل $B(x_1; y_1)$:

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \end{cases} \dots\dots ③$$

من ① و ② و ③ نستخرج العلاقة ونجد الثوابت a و b و c

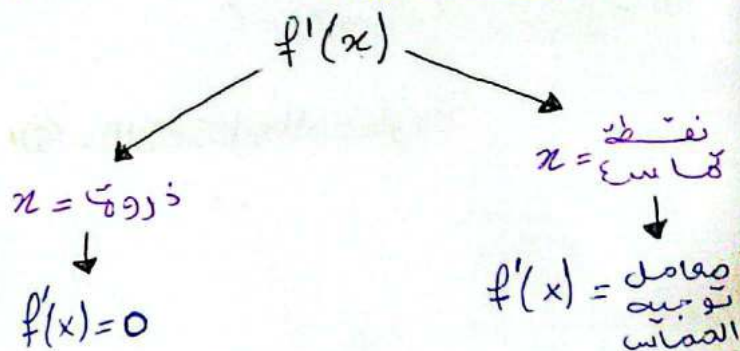
reem. engineer

القراءة البيانية

① - مجموعة التعريف: نقمأ من المنحني

وإذا كانت هناك قيمت ممنوعة تذكرها.

② - إيجاد الصور:



③ - حل المعادلات والمراجعات:

• $g(x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \text{نقطة التقاطع مع محور الفواصل} \end{cases}$

• $g(x) \neq 0 \Rightarrow$ نستخرج المجالات من جدول الإشارة

• $g'(x) = 0 \Rightarrow x = \text{الذروات}$

• $g'(x) \neq 0 \Rightarrow$ نعتمد على جدول إشارته الذي يكون معتمداً على تمأيد أو تناقص الدالت

④ - صبر هنة القيم المتوسطة:

"..."

$$g(A) \neq 0 \xrightarrow[\text{القراءة البيانية}]{\text{القراءة البيانية}} g(B) \neq 0$$

$$g(A) \cdot g(B) < 0$$

"..."

⑤ - تفسير الثوابت a و b و c :

• إذا كانت (f) يقبل في النقطة $A(x_0; y_0)$ مماسة يوازي محور الفواصل:

المتساوية البينائية

بالفصل

• $|m-1| > 0$ أي :

$(m-1) \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
ومنه : $m \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ لا يوجد
حلول للمعادلة

$$f(x) = -m$$

• $-m \leq 0$ ومنه $m \geq 0$: للمعادلة حل وحيد
• $0 < -m < 1$ ومنه $-1 < m < 0$: للمعادلة حلان
• $-m = 1$ ومنه $m = -1$: للمعادلة حل مضاعف
• $-m > 1$ ومنه $m < -1$: لا يوجد حلول

$$f(x) = m^2$$

$m \geq 0$

• $m^2 = 0$ أي $m = 0$: للمعادلة حل وحيد
• $0 < m^2 < 1$ أي $0 < m < 1$: للمعادلة حلان
• $m^2 = 1$ أي $m = 1$ أو $m = -1$: للمعادلة حل مضاعف
• $m^2 > 1$ أي $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة

$$f(x) = \sqrt{m}$$

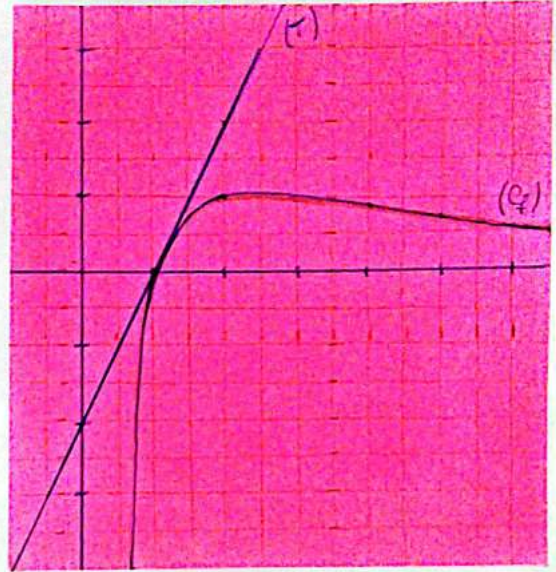
$m \geq 0$

• $\sqrt{m} = 0$ أي $m = 0$: للمعادلة حل وحيد
• $0 < \sqrt{m} < 1$ أي $0 < m < 1$: للمعادلة حلان
• $\sqrt{m} = 1$ أي $m = 1$: للمعادلة حل مضاعف
• $\sqrt{m} > 1$ أي $m > 1$: لا يوجد حلول للمعادلة

good luck

د- المتساوية الأفقية :

$$f(x) = |m|$$



• حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع

(y) مع المستقيم ذو المعادلة $y = |m|$

حيث $m \geq 0$

• $|m| = 0$: للمعادلة حل وحيد
• $0 < |m| < 1$ أي $0 < m < 1$: للمعادلة حلان
• $|m| = 1$ أي $m = 1$ أو $m = -1$: للمعادلة حل مضاعف

• $|m| > 1$ أي $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة

$$f(x) = |m-1|$$

• حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع

(y) مع $y = |m-1|$: حيث $|m-1| \geq 0$

• $|m-1| = 0$ أي $m = 1$: للمعادلة حل وحيد

• $0 < |m-1| < 1$ أي $0 < m-1 < 1$: للمعادلة حلان

• $|m-1| = 1$ أي $m = 0$ أو $m = 2$: للمعادلة حل مضاعف

• للمعادلة حل مضاعف

reem. engineer

$-|m| > b$
 $\Rightarrow m \in]-\infty; -b[\cup]b; +\infty[$
 $-|m| < b \quad \left\{ \begin{array}{l} |m| = b \\ m = b \\ m = -b \end{array} \right.$
 $\Rightarrow -b < m < b$
 $f(x) = f(m)$
 1° : نقوم بإزالة قسمة المقلية
 $\vee f(x) = 2$
 2° : نعمل جدول تغيرات $f(m)$
 3° : نعمل نقاط من جدول f
 على الصور لإيجاد m و x

$$f(x) = e^m - 1$$

• $0 \leq e^m - 1$ أي $0 \leq m$ للمعادلة

حل و حلية

• $0 < m < \ln 2$ أي $0 < e^m - 1 < 1$

للمعادلة حلية

• $e^m - 1 = 1$ أي $m = \ln 2$ للمعادلة

حل مضاعف $x = 2$

• $e^m - 1 > 1$ أي $m > \ln 2$ لا يوجد

حل للمعادلة

$$f(x) = \ln m$$

$$m > 0$$

• $\ln m \leq 0$ أي $m \leq 1$ للمعادلة حل

• $0 < \ln m < 1$ أي $1 < m < e$ للمعادلة

حلية

• $\ln m = 1$ أي $m = e$ للمعادلة

حل مضاعف $x = 2$

• $\ln m > 1$ أي $m > e$ لا يوجد حل

$$f(x) = f(m)$$

لدينا النقطة مجموعة النقاط f

حيث $\Pi_m(m; f(m))$

• $f(m) \leq 0$ أي $f(m) \in]0; 1]$ للمعادلة

حلية

• $0 < f(m) < 1$ أي $f(m) \in]0; 1[$ للمعادلة

حلية

• $f(m) = 1$ أي $m = 2$ للمعادلة

حل مضاعف

• $f(m) > 1$: لا يوجد حلول