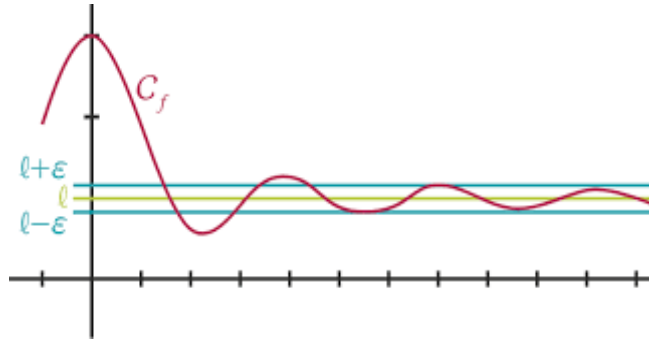


الرياضيات في الثانوية

نمارين في النهايات

و مسائل في دراسة الدوال العددية



للسنوات الثانية ثانوي

كتابة الأستاذ :

حناش نبيل

Avril 2022

التمرين رقم 01 : أحسب النهايات التالية مع التفصيل في طريقة الحساب في كل حالة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 2x^2 + 1 \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 + |x|^3 - 5x^2 + 2 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} -4 - \frac{x+2}{x-3} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 3x^3 + 5x - 2}{(x-3)^2} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 2} 3 - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{2-x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 2} - x \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x-3}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 1} \quad (9)$$

التمرين رقم 02 : أحسب النهايات التالية مع التفصيل في طريقة الحساب في كل حالة :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x+3)^2} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+2}{x^2 + 3x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{5x^2 + x - 2} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x-3} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 3x - 7}{x^2 + 2x - 3} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + 4x + 1} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x-5} \quad (10)$$

التمرين رقم 03 : أحسب النهايات التالية مع التفصيل في طريقة الحساب في كل حالة :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{x+8} - 3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+3} - 3} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 + x - 2} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 1} + 3x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda x)}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{2x} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{3x - \pi} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{x^2 + \sin x} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\tan^2 x} \quad (13) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} \quad (14)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2\theta - \pi} \quad (16) \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{4\theta - \pi} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \quad (17) \quad \text{(بالحد)}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 2x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty \text{ (نهاية دالة كثير حدود عند } \infty \text{ تساوي إلى نهاية حدها الأعلى درجة)}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 + |x|^3 - 5x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - x^3 - 5x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \text{ لأن } |x| = -x \text{ لما } x < 0$$

$$(3) \text{ لما } x \xrightarrow{<} 3 \text{ فإن } x+2 \rightarrow 5 \text{ و } x-3 \rightarrow 0^- \text{ و منه نجد : } \lim_{x \xrightarrow{<} 3} -4 - \frac{x+2}{x-3} = +\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 3x^3 + 5x - 2}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ (نهاية دالة ناطقة عند } \infty \text{ تساوي إلى نهاية حدها الأكبر درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام)}$$

$$(5) \text{ بما أن } \frac{1}{x^3} \rightarrow 0 \text{ و } \frac{2}{x} \rightarrow 0 \text{ لما } x \rightarrow +\infty \text{ فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} = 2 + 0 + 0 = 2$$

$$(6) \text{ بما أن } \frac{1}{x^3} \rightarrow \frac{1}{8} \text{ و } 2-x \rightarrow 0^- \text{ لما } x \xrightarrow{>} 2 \text{ فإن } \lim_{x \xrightarrow{>} 2} 3 - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{2-x} = -\infty$$

$$(7) \text{ بما أن } x^2 + 3x - 2 \rightarrow +\infty \text{ لما } x \rightarrow -\infty \text{ فإن } \sqrt{x^2 + 3x - 2} \rightarrow +\infty \text{ و كذلك } -x \rightarrow +\infty \text{ لما } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 2} - x = +\infty \text{ و منه نجد}$$

$$(8) \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ فإن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x - 3}} = +\infty \text{ (نهاية دالة ناطقة) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$(9) \text{ لإزالة حالة عدم التعيين نستعمل طريقة المرافق كما يلي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 1})(\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 1})}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 1}}$$

$$\text{أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2 - (x^2 + 2x - 1)}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 1}} \text{ أي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 1}} \text{ و منه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x - 1} = \frac{-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$$

ملف التمرين رقم 02 :

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{(نهاية دالة ناطقة حيث } (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 \text{)}$$

$$(2) \text{ 1 جذر لكثيري الحدود } P(x) \text{ و } Q(x) \text{ حيث : } P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x \text{ و } Q(x) = x^2 - 2x + 1$$

لإزالة حالة عدم التعيين نستعمل القسمة الإقليدية لـ $P(x)$ و $Q(x)$ فنحصل على :

$$P(x) = (x-1)(x^2 + 3x) \text{ و } Q(x) = (x-1)^2 \text{ و منه ينتج :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{x-1}$$

و بما أن $x^2 + 3x \rightarrow 4$ لما $x \rightarrow 1$

نميز حالتين :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = -\infty$$

$$(3) \text{ لما } x \rightarrow -3 \text{ فإن } x+2 \rightarrow -1 \text{ و } x^2 + 3x \rightarrow 0^- \text{ (شكل جدول إشارة ثنائي الحدود من الدرجة الثانية)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+2}{x^2 + 3x} = +\infty \quad \text{و منه نجد :}$$

$$(4) \text{ لإزالة حالة عدم التعيين نستخرج العامل المشترك : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{5x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - x \sqrt{5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{5x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \sqrt{5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \text{ أي}$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$2 - \sqrt{5} < 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{5x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 - \sqrt{5}) = -\infty$$

(5) لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نستعمل طريقة التحليل : نضع $P(x) = x^2 + 2x - 15$ و بالقسمة الإقليدية لـ $P(x)$

$$\text{على } x-3 \text{ نتحصل على : } P(x) = (x-3)(x+5) \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+5)}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 5 = 8$$

(6) لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نستعمل طريقة التحليل : نضع $P(x) = 4x^2 + 3x - 7$ و $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

بما أن 1 جذر لكثيري الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ و بالقسمة الإقليدية على $x-1$ نتحصل على :

$$P(x) = (x-1)(4x+7) \text{ و } Q(x) = (x-1)(x+3) \text{ ؛ إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 3x - 7}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+7}{x+3} = \frac{4 \times 1 + 7}{1+3} = \frac{11}{4} \text{ أي } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 3x - 7}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)}$$

$$\text{أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} - x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \quad (7)$$

$$\text{و منه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{2+0-0} - \sqrt{1+0+0})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2} - 1)x = +\infty \text{ لأن } \sqrt{2} - 1 > 0$$

(8) -2 جذر لكثيري الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ حيث : $P(x) = x^2 - 4$ و $Q(x) = x^3 + 8$

لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نستعمل التحليل : $P(x) = (x-2)(x+2)$ (متطابقة شهيرة) و بالقسمة الإقليدية لـ

$$Q(x) \text{ على } x+2 \text{ نجد } Q(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 4) \text{ ؛ إذن :}$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x-2} \text{ أي } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^3 - 2(-2) + 4}{-2 - 2} = -3$$

$$\text{إذن ؛ } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{(x-5)(x+5)}}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-5}\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-5}\sqrt{x-5}} \quad (9)$$

$$\text{فإن } x \rightarrow 5^+ \text{ لما } \sqrt{x-5} \rightarrow 0^+ \text{ و } \sqrt{x+5} \rightarrow \sqrt{10} \text{ ؛ و بما أن } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-5}} = +\infty$$

ملحوظة القسمة رقم 03 :

(1) لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نستعمل إحدى الطريقتين :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

طريقة 01 : المرافق :

$$\text{إذن ؛ } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \text{ أي}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \frac{1}{\sqrt{2-1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \text{ حيث } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

طريقة 02 : تعريف المبدأ المشتق :

الدالة g معرفة على المغلق $[1, +\infty[$ و تقبل الاشتقاق على المفتوح $]1, +\infty[$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من

$$\text{المجال }]1, +\infty[: g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \text{ ؛ إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2}$$

(2) لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نستعمل المرافق للبسط و المقام معا كما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{5-x}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{5-x}+2)} \text{ أي } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5-x-4)(\sqrt{x+8}+3)}{(x+8-9)(\sqrt{5-x}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{1+8}-3}{\sqrt{5-1}+2} = -\frac{3}{2} \text{ إذن ؛ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(\sqrt{x+8}+3)}{\sqrt{5-x}+2} \text{ أي }$$

(3) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$ نستخرج العامل المشترك كما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+3}-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}-2}{\sqrt{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{1-\frac{3}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+3}-3} = \frac{1}{1} = 1 \text{ و منه ينتج :}$$

(4) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نكتب :

$$1 \text{ و باستعمال تعريف العدد المشتق عند } 1 \text{ ؛ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{1+2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\text{للدالة } g: x \mapsto x\sqrt{x} \text{ التي تقبل الإشتقاق بجوار } 1 \text{ نتحصل على : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} g'(1) \text{ ؛ إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} g'(1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{1} = \frac{1}{2}$$

(5) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$ نستخرج العامل المشترك :

$$|x| = -x \text{ حيث } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 1} + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3x$$

$$\text{لأن } x < 0 \text{ ؛ إذن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 1} + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3 \right) \text{ ؛ و بما أن } \frac{4}{x} \rightarrow 0 \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 1} + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \text{ نجد } x \rightarrow -\infty \text{ لما } \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$$

(6) نستعمل النهاية الشهيرة $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (يمكن البرهان عليها بتعريف العدد المشتق للدالة $t \mapsto \sin t$ عند 0)

$$\text{و بكتابة : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \lambda x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \lambda \left(\frac{\sin \lambda x}{\lambda x} \right) = \text{و بوضع } \lambda x = t \rightarrow 0 \text{ لما } x \rightarrow 0 \text{ نجد :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \lambda x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda \cdot \frac{\sin t}{t} = \lambda$$

$$(7) \text{ نكتب } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \text{ ؛ و بوضع } 4x = t \rightarrow 0 \text{ لما } x \rightarrow 0 \text{ ينتج :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \frac{4}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{4}{3} \text{ لأن } \frac{\sin t}{t} \rightarrow 1 \text{ لما } t \rightarrow 0 .$$

$$(8) \text{ نكتب } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \frac{4x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \frac{4x}{\frac{3x \cdot \sin 3x}{3x}} \text{ ؛ إذن كما في المثال السابق نجد :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{4}{3}$$

$$(9) \text{ نعلم أنه إذا كان } \cos x \neq 0 \text{ فإن } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ ؛ إذن ينتج :}$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ و } \cos 0 = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{1}{\cos 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

$$(10) \text{ نكتب } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 5x}{2 \cdot 5x} = \frac{5}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y} = \frac{5}{2}$$

بوضع $5x = y \rightarrow 0$ لما $x \rightarrow 0$ و باستعمال

$$\text{نتيجة المثال السابق } \frac{\tan y}{y} \rightarrow 1 \text{ لما } y \rightarrow 0$$

$$(11) \text{ لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل } \frac{0}{0} \text{ نستعمل تعريف العدد المشتق :}$$

$$\text{نكتب } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{3x - \pi} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

و بوضع $g(x) = \cos x$ تقبل الاشتقاق بجوار $\frac{\pi}{3}$

$$\text{و منه ينتج : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{3x - \pi} = \frac{1}{3} g' \left(\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

حيث $g' : x \mapsto -\sin x$

$$(12) \text{ لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل } \frac{0}{0} \text{ نكتب ما يلي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{x^2 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+4)}{x \left(x + \frac{\sin x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x + \frac{\sin x}{x}}$$

حيث نعلم أن $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ لما $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{x^2 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x+1} = \frac{4}{1} = 4 \text{ إذن :}$$

$$(13) \text{ لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل } \frac{0}{0} \text{ نكتب :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}$$

حيث نعلم أن $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ لما $x \rightarrow 0$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (\cos x + 1)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{\cos x + 1} : \text{و من جهة أخرى :}$$

(ضرب البسط و المقام في $\cos x + 1$) ؛ و بما أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\tan^2 x} = -\frac{1}{2} : \text{إذن ؛ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{\cos 0 + 1} = -\frac{1}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(14) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نتبع ما يلي :

1 جذر لكثير الحدود $P(x)$ حيث $P(x) = x^4 - 1$ ؛ إذن بالقسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على $x - 1$ نتحصل على :

$$P(x) = (x - 1)(1 + x + x^2 + x^3) : \text{و منه نجد :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 1 + x + x^2 + x^3 = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 = 4$$

(15) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نستعمل تعريف العدد المشتق :

$$\text{حيث } g: \theta \mapsto \cos 2\theta \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ و } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{4\theta - \pi} = \frac{1}{4} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta - \cos \frac{\pi}{2}}{\theta - \frac{\pi}{4}} = g'(\frac{\pi}{4})$$

من أجل كل عدد حقيقي θ : $g'(\theta) = -2 \sin 2\theta$ (مشتقة مركب دالتين) ؛ إذن :

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{4\theta - \pi} = -\frac{1}{2} : \text{و منه ينتج ؛ } g'(\frac{\pi}{4}) = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2$$

(16) لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نستعمل تعريف العدد المشتق :

$$\text{حيث } g(\theta) = -\sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} \text{ تقبل } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2\theta - \pi} = \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} - (-1)}{\theta - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} g'(\frac{\pi}{2})$$

الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل $\theta \in \mathbb{R}$ لدينا : $g'(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta}{2}$ (مشتقة مركب دالتين) ؛ إذن :

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{لأن} \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2\theta - \pi} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$$

(17) لحساب النهاية يمكن مثلا إستعمال مبرهنة المقارنة (تدرس في برنامج السنة الثالثة) :

ليكن $x > 0$: $-1 \leq \cos(x^2 + 1) \leq 1$ ؛ و منه $-x \leq x \cos(x^2 + 1) \leq x$ ؛ إذن ينتج الحصر :

$$-\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \cos(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \quad ; \quad \text{و بالمرور إلى النهاية لما } x \rightarrow +\infty \text{ علما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{فإنه حسب مبرهنة الحصر نستنتج أن :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

انتهى عمل التمارين...

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x - 2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين العددين α و β حتى يشمل المنحنى (C_f) النقطة $A(3;3)$ و يقبل عندها مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

• نعتبر فيما يلي : $\alpha = 1$ ، $\beta = -3$.

(2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف ؛ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلته

(3) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = x - 1 + \frac{a}{x - 2}$ حيث a ثابت يطلب تعيينه .

(4) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{2\}$: $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$

(5) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(6) بين أن المستقيم (Δ) الذي $y = x - 1$ معادلة له مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

(7) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

(8) أوجد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f) .

(9) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ فإن $4 - x \in D_f$ و $f(4 - x) + f(x) = 2$ ؛

ماذا تستنتج ؟

(10) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الإحداثيات $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$.

(11) أرسم (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) .

(12) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) - x = m$.

(13) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{|x - 2|}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني

في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

✓ إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) اعتمادا على (C_f) ثم أنشئ (C_g) في نفس المعلم السابق .

1- تعيين العددين α و β حتى يشمل المنحنى (C_f) النقطة $A(3;3)$ و يقبل عندها مماسا يوازي حامل محور الفواصل :

$$\begin{cases} 9\alpha + 3\beta + 3 = 3 \\ -3\alpha - 2\beta - 3 = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} f(3) = 3 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \text{ معناه}$$

$$\text{أي } \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ -3\alpha - 2\beta = 3 \end{cases} \text{ و بالجمع نجد } -\beta = 3 \text{ أي } \beta = -3 \text{ ؛ و بالتالي } \alpha = -\beta/3 = 1 .$$

2- حساب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف ؛ ثم إستنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلته :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{cases} \text{ التفسير الهندسي :}$$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = 2$.

3- نبين انه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = x - 1 + \frac{a}{x-2}$ حيث a ثابت يطلب تعيينه :

بتوحيد المقامات نتحصل على $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2 + a}{x-2}$ ثم بالمطابقة مع العبارة $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-2}$ نجد : $2 + a = 3$ و منه

$$a = 1 \text{ ؛ إذن : } f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

4- نبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{2\}$: $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$:

f تقبل الإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty, 2[$ و $]2, +\infty[$ حيث : $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$ أي

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 4 - 1}{(x-2)^2} \text{ و منه } f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} \text{ و هو المطلوب .}$$

5- دراسة تغيرات الدالة f :

$$f'(x) = 0 \text{ تكافئ } x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ و } x \neq 2$$

$$\Delta = 4 \text{ و منه : } x = 3 \text{ أو } x = 1$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+			+

على المجالين $]-\infty, 1]$ و $[3, +\infty[$: $f'(x) \geq 0$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty, 1]$ و على المجال $[3, +\infty[$.

على المجالين $[1, 2[$ و $]2, 3]$: $f'(x) \leq 0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $[1, 2[$ و $]2, 3]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+				+
$f(x)$	$-\infty$	-1		$+\infty$	$+\infty$

6- نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

و منه نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$.

7- دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :

على المجال $]-\infty, 2[$: لدينا $\frac{1}{x-2} < 0$ و منه فالمنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

على المجال $]2, +\infty[$: لدينا $\frac{1}{x-2} > 0$ و منه فالمنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

المعادلة $\frac{1}{x-2} = 0$ لا تقبل حولا في $\mathbb{R} - \{2\}$ و منه المنحنى (C_f) لا يقطع المستقيم (Δ) .

8- إيجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f) :

من أجل $x=2$ نجد : $y=2-1$ أي $y=1$

و منه نجد : $\omega(2;1)$.

9- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ فإن $4-x \in D_f$ و $f(4-x) + f(x) = 2$:

$x \in D_f$ معناه $x \neq 2$ و منه $-x \neq -2$ و منه $4-x \neq 2$ أي $4-x \in D_f$

$f(4-x) + f(x) = 2$ (بالحساب)

الاستنتاج : النقطة $\omega(2;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

10- كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الإحداثيات $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$:

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ حيث :

$f'(0) = \frac{3}{4}$ و منه نجد :

$(T): y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

11- رسم (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) :

12- المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات المائلة (Δ_m) التي معادلتها من الشكل : $y = x + m$ حيث $m \in \mathbb{R}$.

* من أجل $m = -1$: المعادلة $f(x) = x - 1$ لا تقبل حولا ($y = x - 1$ هي معادلة المقارب المائل (Δ))

* من أجل $m > -1$ أي $m \in]-1, +\infty[$ فإن المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا موجبا تماما .

* من أجل $m = -\frac{3}{2}$: المعادلة $f(x) = x - \frac{3}{2}$ تقبل حلا وحيدا معدوما .

* من أجل $m < -1$ أي $m \in]-\frac{3}{2}, -1[$ المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا سالبا تماما .

* من أجل $m < -\frac{3}{2}$ أي $m \in]-\infty, -\frac{3}{2}[$:

المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا موجبا تماما .

13- شرح كيف يمكن إنشاء (C_g) اعتمادا على (C_f) ثم إنشاء (C_g) في نفس المعلم السابق :

بحساب مميز ثلاثي الحدود $x^2 - 3x + 3$ نجد أن :

$\Delta = -3 < 0$ و بالتالي المقدار $x^2 - 3x + 3$ لا ينعدم على $\mathbb{R}$ و تكون إشارته موجبة تماما أي :

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $x^2 - 3x + 3 > 0$

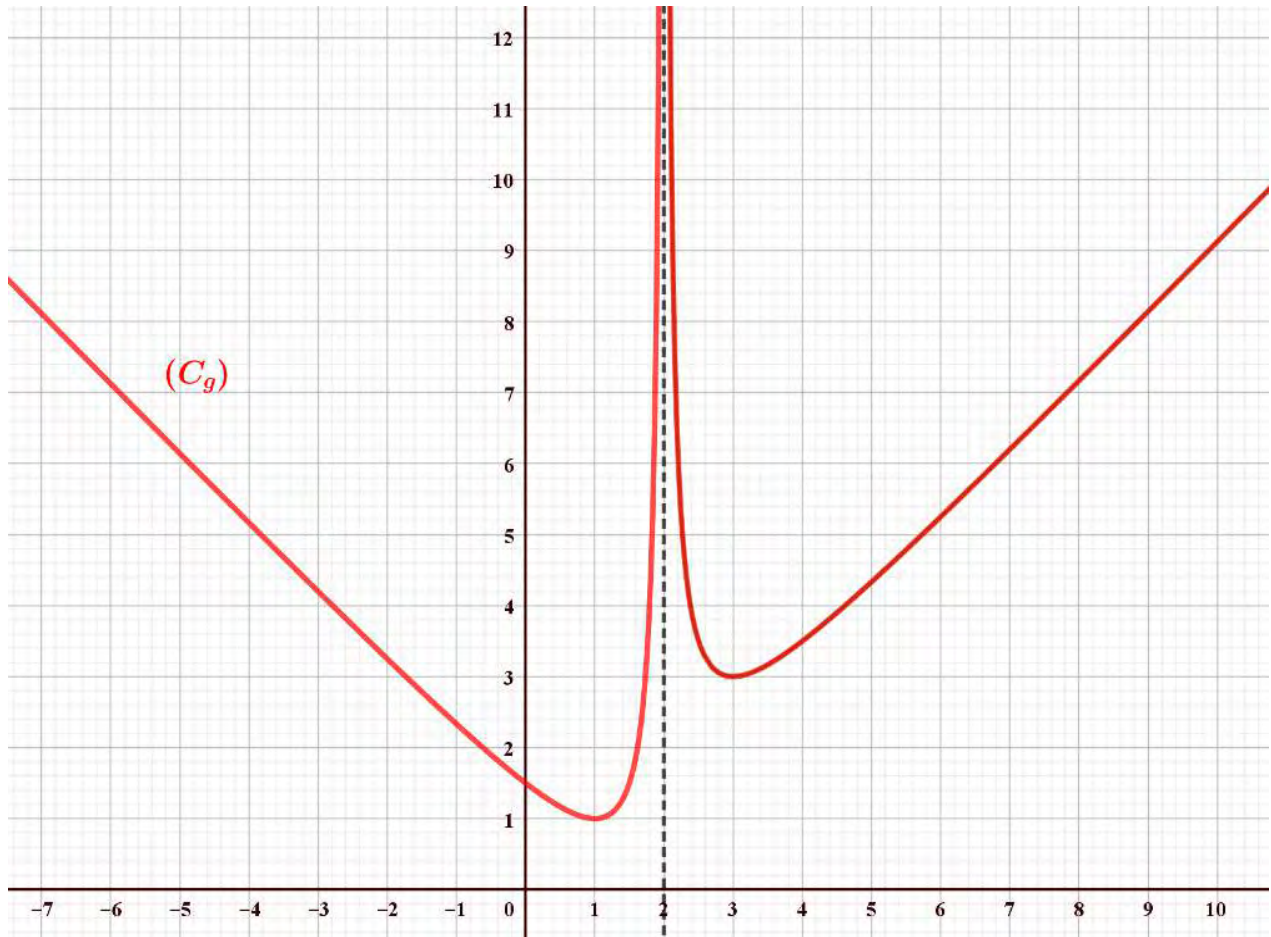
و منه نكتب : $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{|x - 2|} = \left| \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} \right|$ إذن

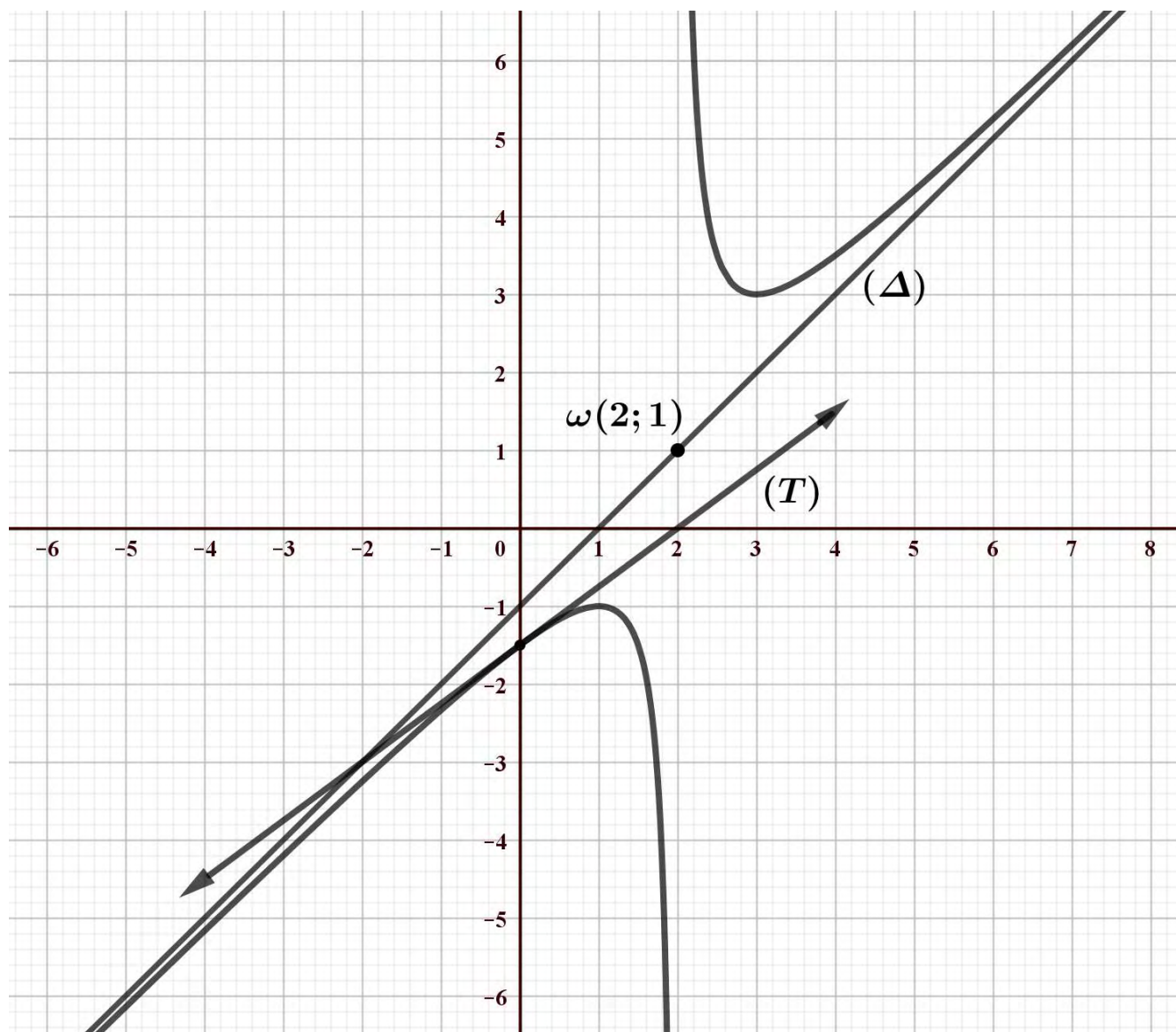
من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ فإن $g(x) = |f(x)|$

* (C_g) ينطبق على (C_f) لما يكون (C_f) فوق حامل محور الفواصل .

* (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل .

الإنشاء الهندسي :





كتابة الأستاذ : حناش نبيل

f الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن المستقيم (Δ) الذي $y = 2x + 3$ معادلة له مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

(2) أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ) .

f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين D مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x \right]$

(4) استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما .

(5) حدد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .



f الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) نبين أن المستقيم (Δ) الذي $y = 2x + 3$ معادلة له مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

يكفي أن نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0$ حيث :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2} = 0$$

المستقيم (Δ) الذي $y = 2x + 3$ معادلة له مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

(2) دراسة الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ) :

$$f(x) - y = \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2} \quad \text{من أجل كل } x \geq 0 \text{ لدينا :}$$

و بما أن $\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2 > 0$ من أجل كل $x \geq 0$ فإن $f(x) - y < 0$ على المجال $[0, +\infty[$ و منه

المنحنى (C) يقع تحت المقارب المائل (Δ) .

f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تعيين D مجموعة تعريف الدالة f :

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $|x^2 - 1| \geq 0$ و بالتالي المقدار $\sqrt{|x^2 - 1|}$ معرف من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

إذن مجموعة تعريف الدالة f هي : $D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

(2) حساب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$$

لأن $x^2 - 1 > 0$ عندما $x \rightarrow +\infty$ و منه ينتج :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$$

لأن $x^2 - 1 > 0$ عندما $x \rightarrow -\infty$ و منه ينتج :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{2} x = +\infty$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2} = |x| = x, & x \geq 0 \\ \sqrt{x^2} = |x| = -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

نذكير :

(3) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x \right]$:

أي $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{3}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 0$ لأن $x - \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$

$\sqrt{x^2 - 1} + x \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

(4) إستنتاج أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادليهما :

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x \right] = 0$ فإن المستقيم (Δ) الذي $y = -\frac{3}{2}x$ معادلة له مقارب مائل لـ (C) عند

$-\infty$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = 0$ فإن المستقيم (Δ') الذي $y = \frac{1}{2}x$ معادلة له مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

(5) أ- تحديد الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة إلى (Δ) :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x) + \frac{3}{2}x = x + \sqrt{x^2 - 1}$: نضع : $x + \sqrt{x^2 - 1} = 0$

إذا كان $x \geq 0$ فإن $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$ و بالتالي المعادلة $x + \sqrt{x^2 - 1} = 0$ مستحيلة الحل .

إذا كان $x < 0$: $x + \sqrt{x^2 - 1} = 0$ يكافئ $\sqrt{x^2 - 1} = -x$ يكافئ $|x^2 - 1| = x^2$ يكافئ

$x^2 - 1 = x^2$ مستحيلة الحل أو $x^2 - 1 = -x^2$ يكافئ $2x^2 = 1$ يكافئ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (لأن $x < 0$)

ثم نلخص إشارة المقدار $x + \sqrt{x^2 - 1}$ في جدول :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$x + \sqrt{ x^2 - 1 }$	—	0	+

و منه نستنتج أن :

✚ إذا كان $x \in \left] -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[$ فإن $f(x) + \frac{3}{2}x < 0$ و منه يكون (C) تحت المقارب (Δ) .

✚ إذا كان $x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$ فإن $f(x) + \frac{3}{2}x > 0$ و منه يكون (C) فوق المقارب (Δ) .

✚ إذا كان $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f(x) + \frac{3}{2}x = 0$ و منه المنحني (C) يقطع المقارب (Δ) .

(ب) تحديد الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة إلى (Δ') :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x) - \frac{1}{2}x = -x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ ؛ نضع : $-x + \sqrt{|x^2 - 1|} = 0$

✚ إذا كان $x \leq 0$ فإن $-x + \sqrt{|x^2 - 1|} \geq 1$ و بالتالي المعادلة $-x + \sqrt{|x^2 - 1|} = 0$ مستحيلة الحل .

✚ إذا كان $x > 0$: $-x + \sqrt{|x^2 - 1|} = 0$ يكافئ $\sqrt{|x^2 - 1|} = x$ يكافئ $|x^2 - 1| = x^2$ يكافئ

$x^2 - 1 = x^2$ مستحيلة الحل أو $x^2 - 1 = -x^2$ يكافئ $2x^2 = 1$ يكافئ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (لأن $x > 0$)

ثم نلخص إشارة المقدار $-x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ في جدول :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$-x + \sqrt{ x^2 - 1 }$		0	
	+		-

و منه نستنتج أن :

إذا كان $x \in \left] -\infty, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$ فإن $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$ و منه يكون (C) فوق المقارب (Δ') .

إذا كان $x \in \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$ فإن $f(x) - \frac{1}{2}x < 0$ و منه يكون (C) تحت المقارب (Δ') .

إذا كان $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f(x) - \frac{1}{2}x = 0$ و منه المنحني (C) يقطع المقارب (Δ') .

إنتهى عمل القريبن...



الرياضيات في الثانوية - Mathematics for all -



التمرين رقم 85 ص 67 من الكتاب المدرسي - بتصرف -

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f .
- (2) أدرس تغيرات الدالة f (نهايات ، اتجاه التغير ، جدول تغيرات) .
- (3) إستنتج معادلة للمستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .
- (4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 5 .
- (5) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي $x=1$ معادلة له محور تناظر للمنحنى (C_f) .
- (6) أنشئ المنحنى (C_f) .
- (7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = m^2$.
- (8) نعتبر الدالة f_m المعرفة بـ : $f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$ حيث m وسيط حقيقي .
 - (أ) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - (ب) أدرس تغيرات الدالة f_m و إستنتج معادلة للمستقيمات المقاربة للمنحنى (C_m) .
 - (ج) بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m) .
 - (د) ما هو المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(4;1)$ ؟

تلكه الرياضيات مه إثبات الشيء الأكث ووضوحاً بأقل الطرق ووضوحاً

جورج بوليا ...



نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تحديد D مجموعة تعريف الدالة f :

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2 - 2x - 3 \neq 0$ حيث أن ثلاثي الحدود $x^2 - 2x - 3$ ينعلم من أجل $x = \frac{2 + \sqrt{16}}{2}$ أي $x = 3$ أو $x = \frac{2 - \sqrt{16}}{2}$ أي $x = -1$ ($\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$)

و منه تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x \neq 3$ و $x \neq -1$ و منه $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

(2) دراسة تغيرات الدالة f (نهايات ، اتجاه التغير ، جدول تغيرات) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = - \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{12}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = - \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{12}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = - \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{12}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = - \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{12}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \end{array} \right.$$

(إرشاد : أدرس حسب قيم x إشارة المقام $x^2 - 2x - 3$)

الدالة f تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل $x \in D_f$ لدينا :

$$f'(x) = \frac{24(x-1)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \text{ أي } f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2 - 2x - 3) - (x^2 - 2x - 15)(2x-2)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

من أجل كل $x \in D_f$ فإن $(x^2 - 2x - 3)^2 > 0$ و بالتالي إشارة $f'(x)$ على D_f من إشارة $x-1$:

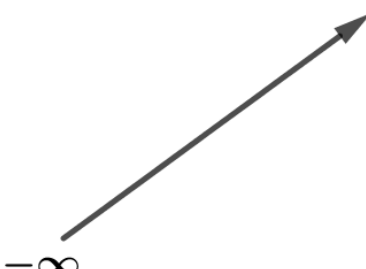
إذا كان $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1]$ فإن $f'(x) \leq 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على كل من

المجالين $]-\infty, -1[$ و $]-1, 1]$.

إذا كان $x \in [1, 3[\cup]3, +\infty[$ فإن $f'(x) \geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من

المجالين $[1, 3[$ و $]3, +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ 0 $+$		$+$
$f(x)$	1 		$+\infty$  4 		1 

(3) **التفسير الهندسي :** بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ فإن المستقيم الذي $y = 1$ معادلة له

مقارب أفقي للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \mp\infty$ فإن المستقيم الذي $x = -1$ معادلة له مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

بما أن $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \pm\infty$ فإن المستقيم الذي $x = 3$ معادلة له مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

(4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 5 :

لدينا : $(T): y = f'(5)(x-5) + f(5)$ حيث $f'(5) = \frac{24(5-1)}{((5)^2 - 2(5) - 3)^2} = \frac{2}{3}$ و $f(5) = 0$

إذن : $(T): y = \frac{2}{3}(x-5)$ أي $(T): y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$

(5) إثبات أن المستقيم (Δ) الذي $x = 1$ معادلة له محور تناظر للمنحني (C_f) :

يكفي أن نتحقق من الشرطين : من أجل كل $x \in D_f$ فإن $2-x \in D_f$ و $f(2-x) = f(x)$

$x \in D_f$ معناه $x \neq -1$ و $x \neq 3$ و منه $-x \neq 1$ و $-x \neq -3$ و منه يكون $2-x \neq 3$ و $2-x \neq -1$

على الترتيب ، إذن $2-x \in D_f$ أي $2-x \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$$f(2-x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x) - 15}{(2-x)^2 - 2(2-x) - 3} = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = f(x) \quad \text{و من أجل كل } x \in D_f \text{ لدينا :}$$

إذن نستنتج أن المستقيم الذي $x=1$ محور تناظر للمنحني (C_f) .

(7) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = m^2$:

حلول المعادلة $f(x) = m^2$ بيانيا تمثل فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات الأفقية (Δ_m) التي لها معادلات من الشكل $y = m^2$ (نوع المناقشة أفقية) حيث من أجل كل عدد حقيقي m فإن $m^2 \geq 0$ و بالتالي جميع المستقيمات (Δ_m) تقع فوق محور الفواصل أو تنطبق عليه .

إذا كان $m^2 = 0$ أي $m = 0$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y = 0$ معادلة له (حامل محاور الفواصل) في نقطتين متميزتين فاصلة إحداهما هي -3 و فاصلة الأخرى هي 5 و بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين متميزين في الإشارة هما $x_1 = -3$ و $x_2 = 5$.

إذا كان $0 < m^2 < 1$ أي $0 < m < 1$ أو $-1 < m < 0$ أي $m \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y = m^2$ في نقطتين متميزتين فاصلة إحداهما عدد موجب تماما و فاصلة الأخرى عدد سالب تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2$ تقبل حلين متميزين في الإشارة .

إذا كان $1 \leq m^2 < 4$ أي $-2 < m \leq -1$ أو $1 \leq m < 2$ أي $m \in]-2, -1] \cup [1, 2[$ فإن المنحني (C_f) لا يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y = m^2$ معادلة له و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2$ لا تقبل حولا .

إذا كان $m^2 = 4$ أي $m = -2$ أو $m = 2$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y = 4$ معادلة له في نقطة وحيدة ذات الفاصلة 1 و بالتالي المعادلة $f(x) = 4$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما و يساوي 1 (بعض المراجع تسميه حلا مضاعفا لوجود ذروة للمنحني) .

إذا كان $4 < m^2 < 5$ أي $-\sqrt{5} < m < -2$ أو $2 < m < \sqrt{5}$ أي $m \in]-\sqrt{5}, -2[\cup]2, \sqrt{5}[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y = m^2$ معادلة له في نقطتين متميزتين كل منهما ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2$ تقبل حلين متميزين موجبين تماما .

إذا كان $m^2 = 5$ أي $m = -\sqrt{5}$ أو $m = \sqrt{5}$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y = 5$ معادلة له في نقطتين متميزتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى ذات فاصلة موجبة تماما و تساوي 2 و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2$ تقبل حلين متميزين هما 0 و 2 .

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

إذا كان $m^2 > 5$ أي $m < -\sqrt{5}$ أو $m > \sqrt{5}$ أي $m \in]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$ فإن المنحني

(C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y = m^2$ معادلة له في نقطتين متميزتين إحداهما ذات فاصلة سالبة تماما و الأخرى ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2$ تقبل حلين متميزين في الإشارة .

(8) نعتبر الدالة f_m المعرفة بـ : $f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$ حيث m وسيط حقيقي .

(C_m) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) دراسة تغيرات الدالة f_m و إستنتاج معادلة للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_m) :

تكون الدالة f_m معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2 - mx - 3 \neq 0$ حيث مميز ثلاثي الحدود $x^2 - mx - 3$ هو : $x^2 - mx - 3 = 0$ إذن المعادلة $\Delta_m = (-m)^2 - 4(1)(-3) = m^2 + 12 > 0$ من أجل كل عدد حقيقي m ،

تقبل حلين متميزين هما : $x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ و $x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ و بالتالي نستنتج أن :

$$D_{f_m} = \mathbb{R} - \{x_1, x_2\} =]-\infty, x_1[\cup]x_1, x_2[\cup]x_2, +\infty[$$

نهايات الدالة f_m عند أطراف مجموعة التعريف :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \xrightarrow{<} x_1} f_m(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} x_1} \frac{-15}{x^2 - mx - 3} = -\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{>} x_1} f_m(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} x_1} \frac{-15}{x^2 - mx - 3} = +\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{<} x_2} f_m(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} x_2} \frac{-12}{x^2 - mx - 3} = +\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{>} x_2} f_m(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} x_2} \frac{-12}{x^2 - mx - 3} = -\infty \end{array} \right.$$

(إرشاد : أحسب قيمة البسط من أجل $x = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ ثم من أجل $x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ و شكل

جدول إشارة المقام $x^2 - mx - 3$ حسب قيم x)

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

التفسير الهندسي : بما أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f_m(x) = 1$ فإن المستقيم الذي $y=1$ معادلة له مقارب أفقي للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$

بما أن $\lim_{x \xrightarrow{<} x_1} f_m(x) = \mp\infty$ فإن المستقيم الذي $x = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ معادلة له مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

بما أن $\lim_{x \xrightarrow{>} x_2} f_m(x) = \pm\infty$ فإن المستقيم الذي $x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ معادلة له مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

الدالة f_m تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل $x \in D_{f_m}$ لدينا :

$$f'_m(x) = \frac{(2x-m)(x^2-mx-3) - (x^2-mx-15)(2x-m)}{(x^2-mx-3)^2} \text{ أي}$$

$$f'_m(x) = \frac{24x-12m}{(x^2-mx-3)^2} = \frac{12(2x-m)}{(x^2-mx-3)^2} \text{ حيث من أجل كل } x \in D_{f_m} \text{ فإن } (x^2-mx-3)^2 > 0$$

بالتالي إشارة $f'_m(x)$ من إشارة $2x-m$:

$$\text{إذا كان } 2x-m \leq 0 \text{ أي } x \in]-\infty, x_1[\cup]x_1, \frac{m}{2}] \text{ فإن } f'_m(x) \leq 0 \text{ و بالتالي الدالة } f_m$$

$$\text{متناقصة تماما على كل من المجالين }]-\infty, x_1[\text{ و }]x_1, \frac{m}{2}]$$

$$\text{إذا كان } 2x-m \geq 0 \text{ أي } x \in [\frac{m}{2}, x_2[\cup]x_2, +\infty[\text{ فإن } f'_m(x) \geq 0 \text{ و بالتالي الدالة } f_m$$

$$\text{متزايدة تماما على كل من المجالين } [\frac{m}{2}, x_2[\text{ و }]x_2, +\infty[$$

جدول تغيرات الدالة f_m :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

x	$-\infty$	x_1	$m/2$	x_2	$+\infty$
$f'_m(x)$	-		- 0 +		+
$f_m(x)$	1 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $f_m(m/2)$ ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ 1

(ب) نبين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m) :

نفرض أنه توجد نقطة وحيدة $A(x_0; y_0)$ تنتمي إلى جميع المنحنيات (C_m) و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي

m فإنه ينتج : $\frac{x_0^2 - 2mx_0 - 15}{x_0^2 - 2mx_0 - 3} = y_0$ أي من أجل كل عدد حقيقي m فإن :

$$(2x_0y_0 - 2x_0)m - x_0^2y_0 + x_0^2 - 3y_0 - 15 = 0 \text{ أي } x_0^2 - 2mx_0 - 15 = y_0(x_0^2 - 2mx_0 - 3)$$

$$\begin{cases} 2x_0(y_0 - 1) = 0 \\ -x_0^2(y_0 - 1) + 3y_0 = 15 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 2x_0y_0 - 2x_0 = 0 \\ -x_0^2y_0 + x_0^2 + 3y_0 - 15 = 0 \end{cases} \text{ و منه ينتج :}$$

من المعادلة الأولى ينتج $x_0 = 0$ أو $y_0 = 1$ ؛ إذن نناقش الحالتين كلا على حدى :

✓ إذا كان $x_0 = 0$ و بالتعويض في المعادلة الثانية نتحصل على $3y_0 = 15$ و منه $y_0 = 5$

إذن $(x_0; y_0) = (0; 5)$

✓ إذا كان $y_0 = 1$ و بالتعويض في المعادلة الثانية نتحصل على $-x_0^2(1-1) + 3(1) = 15$ و منه ينتج

$3 = 15$ تناقض .

❖ **نتيجة :** جميع المنحنيات (C_m) تمر من نقطة وحيدة هي $A(0; 5)$.

(ج) تعيين المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(4; 1)$:

نفرض أنه يوجد عدد حقيقي m حيث المنحنى (C_m) يشمل النقطة التي إحداثياها $(4; 1)$ و بالتالي نتحصل

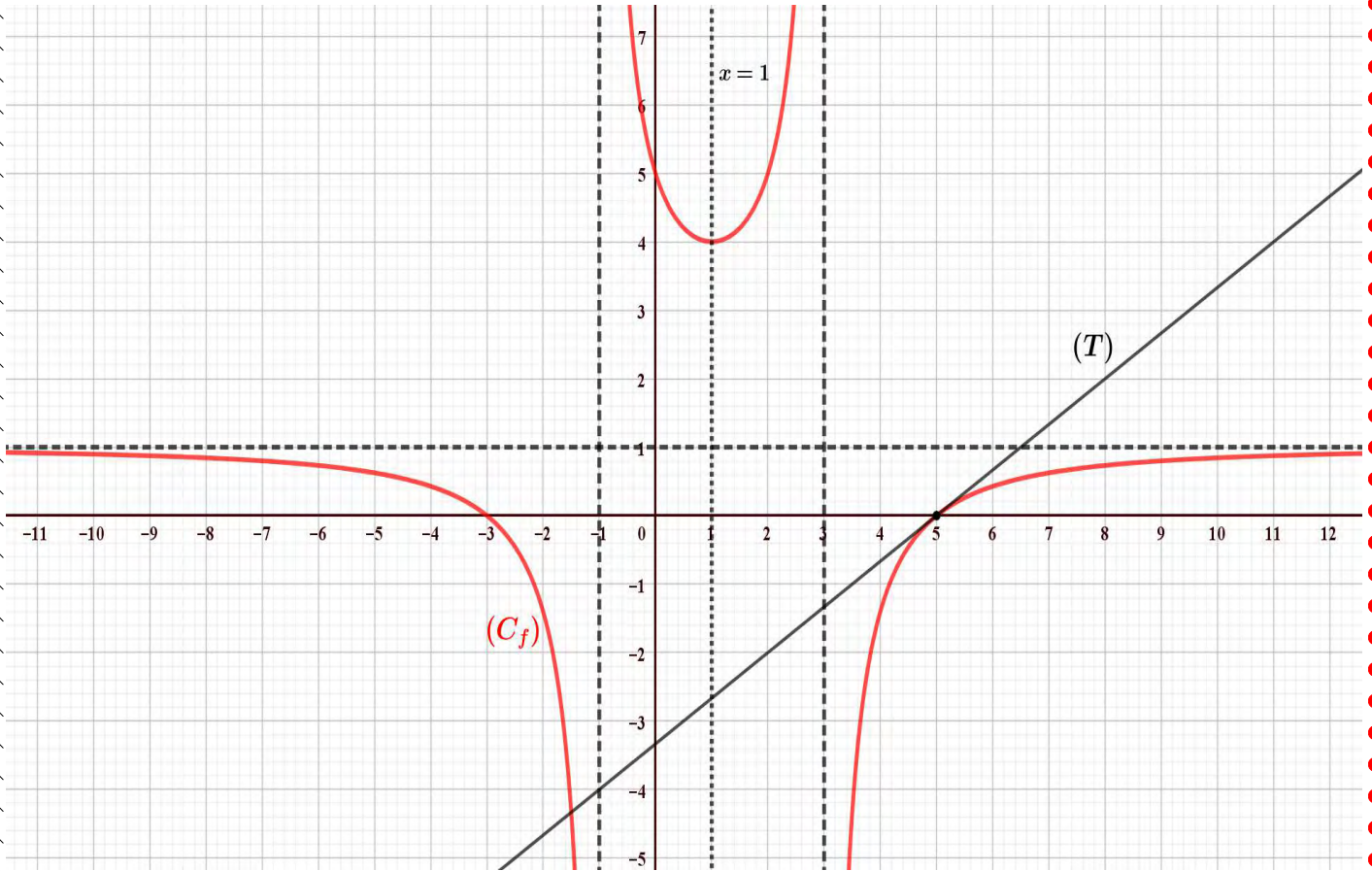
على المعادلة ذات المجهول m التالية :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$\frac{(4)^2 - 2(4)m - 15}{(4)^2 - 2(4)m - 3} = 1 \quad \text{أي} \quad \frac{1-8m}{13-8m} = 1 \quad \text{أي} \quad 1-8m = 13-8m \quad \text{أي} \quad 1=13 \quad \text{تناقض .}$$

و بالتالي لا يوجد $m \in \mathbb{R}$ يحقق المعادلة $f_m(4) = 1$.

نتيجة : لا يوجد عدد حقيقي m حيث المنحني (C_m) يشمل النقطة التي إحداثياتها $(4;1)$.



إنتهت حل المسألة...



الرياضيات في الثانوية - Mathematics for all

الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2- تحقق أن الدالة f و دورها هو 2π (الدور هو أصغر عدد حقيقي غير معدوم T يحقق : من أجل كل عدد $x \in D_f$ ، $x+T \in D_f$ و $f(x+T) = f(x)$) .

3- من أجل كل عدد حقيقي x قارن بين العددين $f(x)$ و $f(\pi - x)$ ؛ فسر النتيجة هندسيا .

4- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ؛ ثم أحسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $-\frac{\pi}{2}$

5- بالإعتماد على نتائج الدراسة السابقة أنشئ المنحنى (C_f) .

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2- برر أن الدالة f قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها .

3- من أجل كل عدد حقيقي x ، أحسب $f(x+2\pi)$ و $f(-x)$. ماذا يمكن القول عن المنحنى الممثل

للدالة f ؟ إستنتج أنه يمكن إقتصار دراسة الدالة f على المجال $[0, \pi]$ من أجل إنشاء المنحنى (C_f) .

4- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$

5- أدرس حسب قيم x إشارة $f'(x)$ على المجال $[0, \pi]$.

6- إستنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, \pi]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

7- أنشئ المنحنى (C_f) .



الرياضيات في الثانوية - Mathematics for all -



f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- تحديد D_f مجموعة تعريف الدالة f :

f معرفة إذا و فقط إذا كان $1 + \sin x \neq 0$ أي $\sin x \neq -1$ و بالاعتماد على الدائرة المثلثية نعلم أن $\sin x = -1$ إذا و فقط إذا كان $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و منه نستنتج أن :

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2- التحقق أن الدالة f و دورها هو 2π (الدور هو أصغر عدد حقيقي غير معدوم T يحقق : من أجل كل عدد $x \in D_f$ ، $x + T \in D_f$ و $f(x + T) = f(x)$) :

ليكن $x \in D_f$ ؛ معناه $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و منه $x + 2\pi \neq -\frac{\pi}{2} + (k+1)2\pi$ أي

$x + 2\pi \in D_f$ و منه يكون $x + 2\pi \in D_f$ ؛ و من جهة أخرى :

$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{1 + \sin(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{1 + \sin x} = f(x)$$

مكتسبات السنة أولى ثانوي) ؛ إذن الدالة f دورية و دورها هو 2π .

3- من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ المقارنة بين العددين $f(x)$ و $f(\pi - x)$:

$$f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{1 + \sin(\pi - x)} = \frac{\sin x}{1 + \sin x} = f(x) \quad : x \in D_f$$

نعلم أن : $\sin(\pi - x) = \sin x$ (أنظر الدائرة المثلثية) و بالتالي يكون من أجل كل عدد $x \in D_f$:

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$f\left(2\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x)$ (من الشكل $f(2a-x)=f(x)$ حيث $a=\frac{\pi}{2}$) ؛ إذن نستنتج أن المستقيم الذي

$x=\frac{\pi}{2}$ (مستقيم عمودي يوازي محور الترتيب) هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

4- دراسة تغيرات الدالة f على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ؛ ثم حساب $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$:

f معرفة و تقبل الاشتقاق على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ و لدينا من أجل كل $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f'(x) = \frac{\cos x(1+\sin x) - \sin x \cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \quad \text{فإن } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$(1+\sin x)^2 > 0$ و من أجل كل $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\cos x > 0$ و $\cos x = 0$ من أجل $x = \frac{\pi}{2}$ ؛ إذن من

أجل كل $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ يكون $\cos x \geq 0$ و بالتالي تكون $f'(x) \geq 0$ أي أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{لأن } 1+\sin x \rightarrow 0^+ \text{ عندما } x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{1+\sin x} = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$

كتابة الأستاذ : جناش نبيل

5- بالاعتماد على نتائج الدراسة السابقة شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_f) :

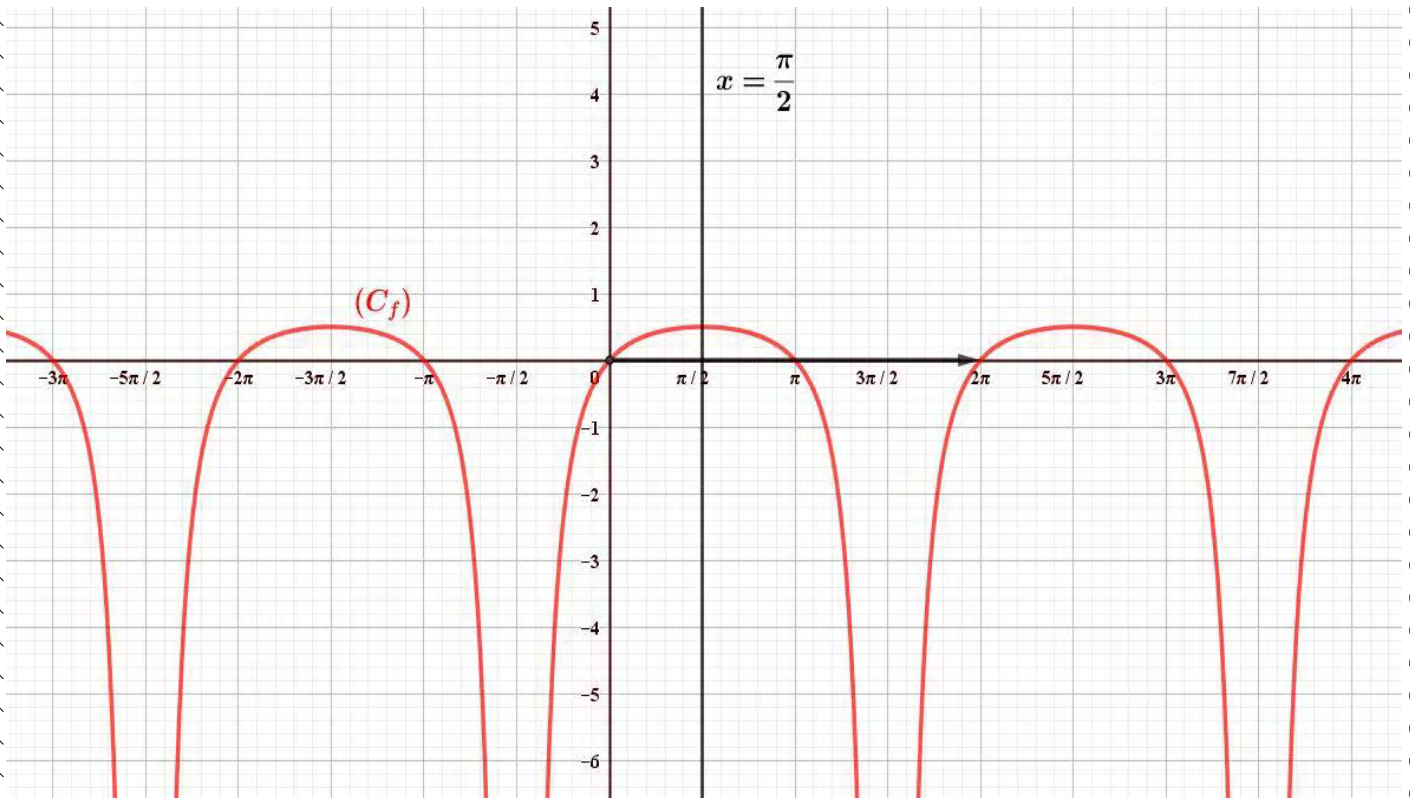
بالاعتماد فقط على النتائج السابقة ننشئ المنحنى (C_f) على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ثم نستنتج (C_f) على

المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بالتناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي $x = \frac{\pi}{2}$ معادلة له .

و بما أن الدالة f دورية و دورها هو 2π نستطيع أن نستنتج على $\mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ المنحنى

(C_f) عن طريق إجراء إنسحابات متتالية أشعتها $2k\pi i$ (أي إنسحابات أشعتها من الشكل $\vec{v}_k \begin{pmatrix} 2\pi k \\ 0 \end{pmatrix}$ حيث

$(k \in \mathbb{Z})$.



انتهى على القسم الأول ...

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- تحديد D_f مجموعة تعريف الدالة f :

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $2 + \cos x \neq 0$ ؛ لكن نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $-1 \leq \cos x \leq 1$ و منه يكون $2 - 1 \leq 2 + \cos x \leq 2 + 1$ أي $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$ و بالتالي من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $2 + \cos x \neq 0$ ؛ إذن نستنتج أن : $D_f = \mathbb{R}$

2- تبرير أن الدالة f قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها :

الدالة f هي حاصل قسمة الدالتين u و v حيث : $u: x \mapsto u(x) = \sin x$ معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $v: x \mapsto v(x) = 2 + \cos x$ معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن $v(x) \neq 0$ و بالتالي الدالة $f = \frac{u}{v}$ معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

3- من أجل كل عدد حقيقي x ، حساب $f(x + 2\pi)$ و $f(-x)$:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$ لأن الدالتين $\sin$ و $\cos$ دوريتين و دورهما هو 2π .

و كذلك : $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$ لأنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ نعلم أن

$\sin(-x) = -\sin x$ (الدالة $\sin$ فردية) و $\cos(-x) = \cos x$ (الدالة $\cos$ زوجية) .

بما أن $f(-x) = -f(x)$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن الدالة f هي دالة فردية و بالتالي المنحنى

(C_f) في معلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم ، و من جهة أخرى و بما أنه من أجل كل

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$x \in \mathbb{R}$ لدينا $f(x+2\pi) = f(x)$ فإن الدالة f دورية و دورها هو 2π ؛ إذن يمكن إقتصار دراسة الدالة f على مجال طوله 2π ثم إستنتاج المنحنى البياني (C_f) على $\mathbb{R}$ بإجراء إنسحابات أشعتها $2\pi k\vec{i}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن يكفي دراسة الدالة f على المجال $[0, \pi]$ ثم إنشاء المنحنى (C_f) على هذا المجال و من ثم إستنتاج المنحنى على المجال $[-\pi, 0]$ بالتناظر إلى مبدأ المعلم ، و أخيرا إستنتاج إنشاء المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$ بإجراء إنسحابات أشعتها $2\pi k\vec{i}$ حيث $k \in \mathbb{R}$ لأن الدالة f دورية و دورها هو 2π .

4- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$

الدالة f معرفة و تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{\cos x(2+\cos x) - \sin x(0-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

عدد حقيقي x ؛ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ و بالتالي نجد

$$f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$$

5- دراسة حسب قيم x إشارة $f'(x)$ على المجال $[0, \pi]$:

إشارة المقدار $f'(x)$ من إشارة البسط $1+2\cos x$ لأنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $(2+\cos x)^2 > 0$.

ليكن $x \in [0, \pi]$ ؛ نضع $f'(x) = 0$ تكافئ $\frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2} = 0$ تكافئ $1+2\cos x = 0$ و

$2+\cos x \neq 0$ (محققة) تكافئ $\cos x = -\frac{1}{2}$ تكافئ $\cos x = -\cos \frac{\pi}{3}$ تكافئ

$\cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3})$ لأننا نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي α لدينا $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ و منه

نجد $x = \pi - \frac{\pi}{3}$ أي $x = \frac{2\pi}{3}$.

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-

6- إستنتاج إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, \pi]$:

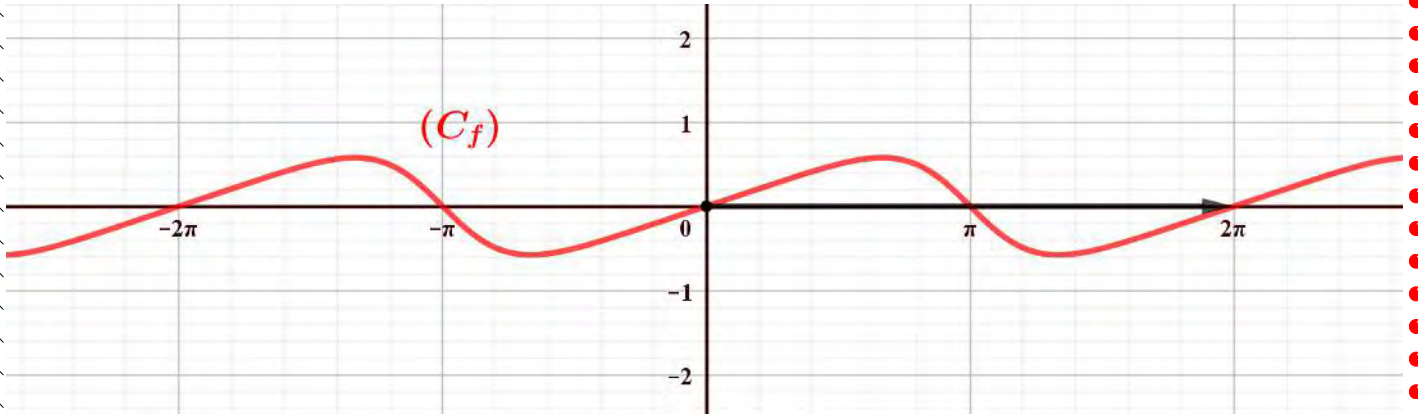
✓ بما أن $f'(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

✓ بما أن $f'(x) \leq 0$ من أجل كل $x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

7- إنشاء المنحنى (C_f) :

ننشئ المنحنى (C_f) بالإعتماد على نتائج السؤال (3) و كذلك جدول تغيرات الدالة f .



انتهى عمل القلم الثاني...



الرياضيات في الثانوية

- Mathematics for all -



الجزء الأول :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f) في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$: مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(-2; 2)$ (أنظر الشكل أدناه) .

بقراءة بيانية أجب على الأسئلة التالية :

(1) عين $f(-1)$ ، $f(-3)$ ، $f'(-3)$ ، $f'(-2)$ ، $f''(-2)$.

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) \times f'(x) = 0$ ثم المتراجحة $f(x) \times f'(x) \leq 0$.

(3) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x)}{x^2 - 16}$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f'(x) + 6}{x + 2}$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 2}{x + 2}$.

(4) حدد اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها .

(5) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(-2; 2)$.

(6) إستنتج أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(-2+h)$ عندما يؤول h إلى 0 ؛ ثم إستنتج قيمة مقربة للعدد $f(-1,999)$.

(7) حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

(8) نقبل أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية

✓ عين الأعداد a ، b و c اعتمادا على المنحنى البياني (C_f) و الأسئلة السابقة .

(9) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = |m| - 1$.

(10) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$.

الجزء الثاني :

نقبل فيما يلي أن : $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

(1) أحسب $f(-1)$ ثم إستنتج تحليلا لـ $f(x)$.

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم شكل جدول إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثالث :

نعتبر الدالة g المعرفة من أجل كل $x \neq -3$ بـ : $g(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 35}{x+3} \right)$

(1) بين أنه من أجل كل $x \in D_g$ فإن : $g'(x) = \frac{1}{4} \frac{f(x)}{(x+3)^2}$

(2) إستنتج إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) إستنتج أن (C_g) منحنى الدالة g يقبل مماسين (T_1) و (T_2) كل منهما يوازي حامل محور الفواصل يطلب كتابة معادلة لكل منهما .

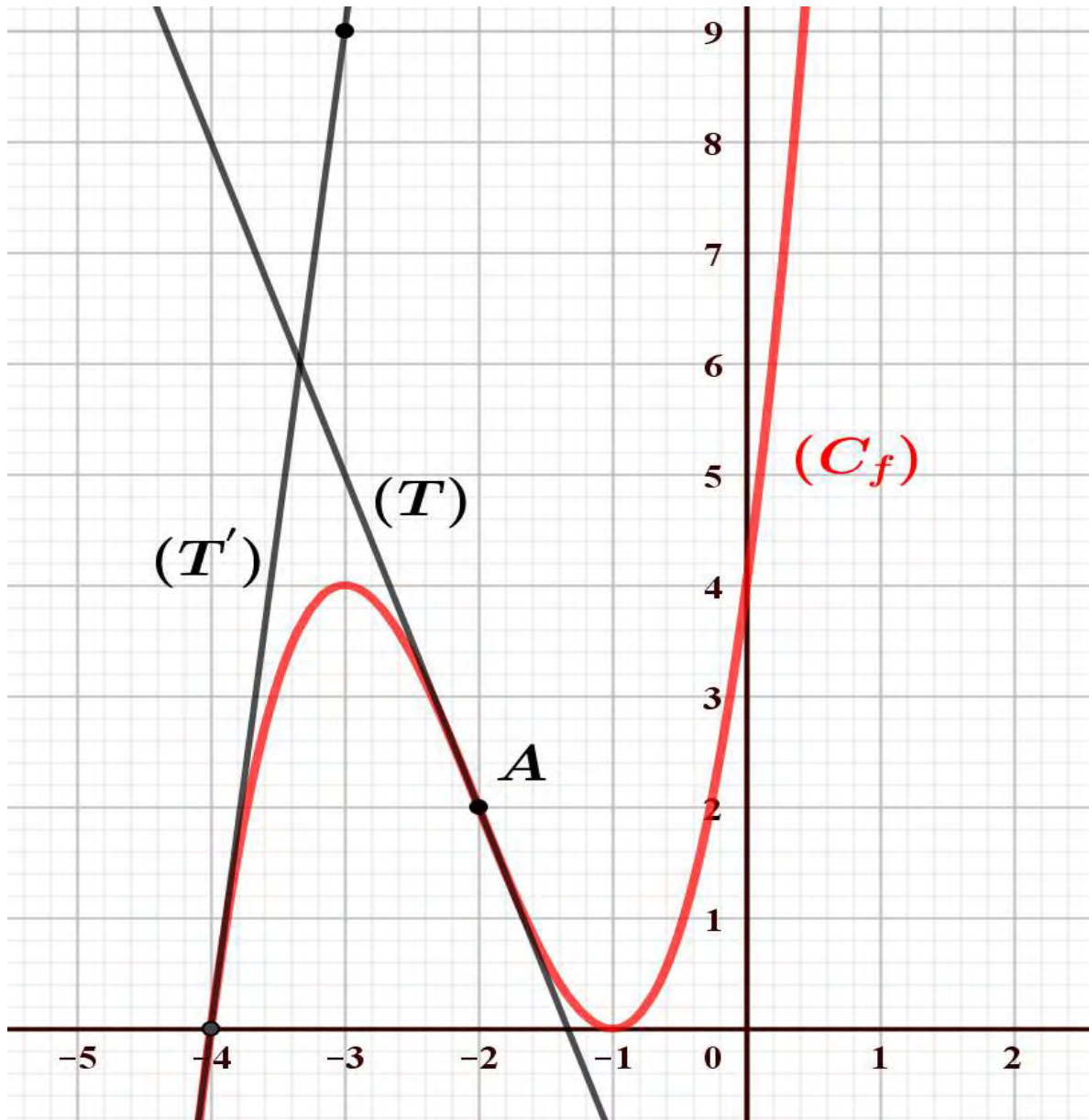
(4) أعط حصر لـ $g(x)$ علما أن $x \in [-2, 5]$ (تعطى النتائج بالتدوير إلى 10^{-1})



الرياضيات في الثانوية



- Mathematics for all -



الجزء الأول :

(1) تعيين $f(-1)$ ، $f(-3)$ ، $f'(-3)$ ، $f'(-2)$ ، $f''(-2)$:

المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة -1 و منه ينتج أن : $f(-1)=0$

و من الشكل نقرأ : $f(-3)=4$

$f'(-3)$ يمثل معامل توجيه المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -3$ حيث أن المنحني

(C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الإحداثيات $(-3,4)$ و منه $f'(-3)=0$

$f'(-2)$ يمثل معامل توجيه المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -2$ و لحساب معامل

توجيه المستقيم (T) نختار نقطتين من هذا المستقيم و هما $A(-2,2)$ و $B(-3,5)$ حيث :

$$f'(-2) = -3 \quad \text{أي} \quad f'(-2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{-3-(-2)}$$

النقطة $A(-2,2)$ هي نقطة إنعطاف لأن المنحني (C_f) يغير عندها من تحدبه (من التحذب إلى التقعر) و

كنتيجة فإن المماس (T) يخترق المنحني (C_f) عند النقطة A و منه نستنتج أن : $f''(-2)=0$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) \times f'(x) = 0$ ثم المتراجحة $f(x) \times f'(x) \leq 0$:

$f(x) \times f'(x) = 0$ إذا و فقط إذا كان $f(x) = 0$ أو $f'(x) = 0$:

حلول المعادلة $f(x) = 0$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل و من الشكل

نجد : $x = -4$ أو $x = -1$

على المجال $]-\infty, -3[$ الدالة f متزايدة تماما و منه من أجل كل $x \in]-\infty, -3[$ فإن $f'(x) > 0$

على المجال $]-3, -1[$ الدالة f متناقصة تماما و منه من أجل كل $x \in]-3, -1[$ فإن $f'(x) < 0$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

الدالة f تقبل قيمة حدية محلية عند النقطة ذات الفاصلة $c = -3$ و منه ينتج $f'(-3) = 0$

بنفس الكيفية نبين أن : $f'(-1) = 0$ ؛ إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) \times f'(x) = 0$ هي

$$S = \{-4, -3, -1\}$$

تكون المتراجحة $f(x) \times f'(x) \leq 0$ محققة إذا و فقط إذا العدان $f(x)$ و $f'(x)$ من إشارتين مختلفتين

أو كان أحدهما على الأقل معدوما ، على المجال $]-\infty, -4]$ الدالة f متزايدة تماما و بالتالي من أجل كل

$x \in]-\infty, -4]$ فإن $f'(x) > 0$ و (C_f) يقع تحت حامل محور الفواصل أو يقطعه و بالتالي فإنه من أجل

كل $x \in]-\infty, -4]$ يكون $f(x) \leq 0$ و منه ينتج أن : $f(x) \times f'(x) \leq 0$

على المجال $[-3, -1]$ لدينا $f(x) \geq 0$ لأن (C_f) يقع فوق حامل محور الفواصل أو يقطعه و الدالة f

متناقصة تماما و منه من أجل كل $x \in [-3, -1]$ فإن $f'(x) \leq 0$ و عليه يكون $f(x) \times f'(x) \leq 0$

إذن مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \times f'(x) \leq 0$ هي : $S' =]-\infty, -4] \cup [-3, -1]$

(3) حساب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x)}{x^2 - 16}$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f'(x) + 6}{x + 2}$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 2}{x + 2}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = f'(-2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f'(x) + 6}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(f'(x) - (-3))}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(f'(x) - f'(-2))}{x - (-2)} = 2f''(-2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x)}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x) - f(-4)}{(x - 4)(x + 4)} = \frac{1}{-4 - 4} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} = -\frac{1}{8} f'(-4) = -\frac{9}{8} \end{cases}$$

نتيجة : $f'(-4)$ يمثل معامل توجيه المماس (T') للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -4 و يمكن

حسابه كالآتي : $f'(-4) = \frac{0 - 9}{-4 - (-3)} = 9$ لأن المماس (T') يشمل النقطتين $(-4, 0)$ و $(-3, 9)$.

(4) تحديد اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

✓ الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -3]$ و $[-1, +\infty[$.

✓ الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-3, -1]$.

(5) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(-2; 2)$:

حيث $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ و $f'(-2) = -3$ و $f(-2) = 2$ و منه ينتج :

$y = -3x - 4$ هي معادلة للمماس (T) عند النقطة $A(-2, 2)$ للمنحنى (C_f) .

(6) إستنتاج أحسن تقريب تالفي للعدد $f(-2+h)$ عندما يؤول h إلى 0 : ثم إستنتاج قيمة مقربة للعدد

$f(-1,999)$:

من أجل h قريب من 0 يكون : $f(-2+h) \approx f(-2) + f'(-2) \times h$ أي $f(-2+h) \approx 2 - 3h$

و بكتابة $-1,999 = -2 + 0,001$ (أي $h = 0,001$ قريب من 0) نتحصل على :

$f(-1,999) \approx 1,997$ أي $f(-1,999) = f(-2 + 0,001) \approx 2 - 3 \times 0,001$

(7) تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) :

✓ إذا كان $x \in]-\infty, -2[$ فإن المنحنى (C_f) يقع تحت المماس (T) .

✓ إذا كان $x = -2$ فإن المماس (T) يخرق (يقطع) المنحنى (C_f) .

✓ إذا كان $x \in]-2, +\infty[$ فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المماس (T) .

(8) نقبل أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية

تعيين الأعداد a ، b و c إعتماذا على المنحنى البياني (C_f) و الأسئلة السابقة :

من المنحنى لدينا : $f(0) = 4$ و بحساب صورة العدد 0 وفق الدالة f نجد $f(0) = c$ و منه $c = 4$

و كذلك $\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 4a - b = 15 \\ a - b = -3 \end{cases}$ و بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نتحصل

على : $3a = 18$ أي $a = 6$

و بتعويض قيمة a في المعادلة $a - b = -3$ نجد : $b = 9$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

(9) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = |m| - 1$:

حلول المعادلة $f(x) = |m| - 1$ بيانيا تمثل فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات (Δ_m) التي لها معادلات من الشكل $y = |m| - 1$ و هي مستقيمات توازي حامل محور الفواصل (نوع المناقشة أفقية) .

إذا كان $|m| - 1 = 0$ أي $|m| = 1$ أي $m = 1$ أو $m = -1$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y = 0$ معادلة له (حامل محور الفواصل) في نقطتين متميزتين فاصلة إحداهما هي -4 و الأخرى هي -1 و بالتالي المعادلة $f(x) = |m| - 1$ تقبل حلين متميزين سالبين تماما هما -4 و -1 .

إذا كان $|m| - 1 < 0$ أي $|m| < 1$ أي $m \in]-1, 1[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y = |m| - 1$ معادلة له في نقطة وحيدة و فاصلتها هي عدد سالب تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = |m| - 1$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل سالب تماما .

إذا كان $|m| - 1 < 4$ أي $0 < |m| < 5$ أي $m \in]-5, -1[\cup]1, 5[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y = |m| - 1$ في ثلاث نقاط متميزة مثنى مثنى و كل واحدة منها ذات فاصلة سالبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = |m| - 1$ تقبل ثلاث حلول متميزة مثنى مثنى و هذه الحلول سالبة تماما .

إذا كان $|m| - 1 = 4$ أي $|m| = 5$ أي $m = 5$ أو $m = -5$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y = 4$ معادلة له في نقطتين متميزتين إحداهما ذات الفاصلة -3 و الأخرى فاصلتها معدومة و بالتالي المعادلة $f(x) = |m| - 1$ تقبل حلين متميزين أحدهما سالب تماما هو -3 (بعض الكتب تسميه حلا مضاعفا) و الآخر معدوم .

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

إذا كان $|m| - 1 > 4$ أي $|m| > 5$ أي $m > 5$ أو $m < -5$ أي $m \in]-\infty, -5[\cup]5, +\infty[$ فإن

المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي $y = |m| - 1$ معادلة له في نقطة وحيدة ذات فاصلة

موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = |m| - 1$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

(10) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$:

حلول المعادلة $f(x) = f(m)$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات الأفقية التي لها

معادلات من الشكل $y = f(m)$ و هي مستقيمات أفقية توازي حامل محور الفواصل (نوع المناقشة أفقية) .

إذا كان $f(m) < 0$ أي $m \in]-\infty, -4[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي

$y = f(m)$ معادلة له في نقطة وحيدة ذات فاصلة سالبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = f(m)$

تقبل حلا وحيدا و هذا الحل سالب تماما .

إذا كان $f(m) = 0$ أي $m = -4$ أو $m = -1$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي

$y = 0$ معادلة له (حامل محور الفواصل) في نقطتين متميزتين إحدهما ذات الفاصلة -4 و الأخرى

ذات الفاصلة -1 و بالتالي المعادلة $f(x) = f(m)$ تقبل حلين متميزين سالبين تماما هما -4 و

-1 .

إذا كان $0 < f(m) < 4$ أي $m \in]-4, -1[\cup]-1, 0[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم

(Δ_m) الذي $y = f(m)$ معادلة له في ثلاث نقط متميزة كل منها ذات فاصلة سالبة تماما و بالتالي

المعادلة $f(x) = f(m)$ تقبل ثلاث حلول متميزة مثنى مثنى سالبة تماما .

إذا كان $f(m) = 4$ أي $m = -3$ أو $m = 0$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي

$y = 4$ معادلة له في نقطتين متميزتين إحدهما ذات الفاصلة -3 و الأخرى ذات فاصلة معدومة و

بالتالي المعادلة $f(x) = f(m)$ تقبل حلين متميزين هما -3 (يمكن تسميته حلا مضاعفا) و 0 .

إذا كان $f(m) > 4$ أي $m \in]0, +\infty[$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ_m) الذي

$y = f(m)$ معادلة له في نقطة وحيدة ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = f(m)$

تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

نقبل فيما يلي أن : $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

(1) حساب $f(-1)$ ثم إستنتاج تحليل $f(x)$:

. $f(x)$ جذرا لكثير الحدود $f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-1) + 4 = 0$ و منه نستنتج أن -1 جذرا لكثير الحدود $f(x)$.

بما أن -1 جذرا لكثير الحدود $f(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ من الدرجة الثانية حيث :

$f(x) = (x+1)g(x)$ و بالقسمة الإقليدية مثلا نجد :

إذن $g(x) = x^2 + 5x + 4$ و منه ينتج التحليل :

$$f(x) = (x+1)(x^2 + 5x + 4)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 + 9x + 4 & x + 1 \\ \hline - & x^3 + x^2 \\ \hline & 5x^2 + 9x + 4 \\ - & 5x^2 + 5x \\ \hline & 4x + 4 \\ - & 4x + 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$:

$f(x) = 0$ يكافئ $(x+1)(x^2 + 5x + 4) = 0$ يكافئ $x+1=0$ أو $x^2 + 5x + 4 = 0$

حيث $x+1=0$ يكافئ $x=-1$ و لحل المعادلة $x^2 + 5x + 4 = 0$ نعلم على إشارة المميز Δ حيث

$\Delta = (5)^2 - 4(1)(4) = 9 > 0$ و بالتالي المعادلة $x^2 + 5x + 4 = 0$ تقبل حلين متمايزين في $\mathbb{R}$ هما :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 3}{2} = -4 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 3}{2} = -1$$

$$f(x) = 0 \text{ هي } -1 \text{ (صفر مضاعف للدالة } f \text{) و } -4 \text{ و نكتب : } \boxed{f(x) = (x+1)^2(x+4)}$$

• جدول إشارة $f(x)$ حسب قيم x :

✓ يكون $f(x) > 0$ لما (C_f) يقع فوق حامل محور الفواصل (xx') أي لما

$$x \in]-4, -1[\cup]-1, +\infty[$$

✓ يكون $f(x) < 0$ لما (C_f) يقع تحت حامل محور الفواصل (xx') أي لما $x \in]-\infty, -4[$

✓ يكون $f(x) = 0$ لما (C_f) يقطع حامل محور الفواصل (xx') أي لما $x = -1$ أو $x = -4$

ثم نلخص الإشارة في جدول حسب قيم x :

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

الجزء الثالث :

نعتبر الدالة g المعرفة من أجل كل $x \neq -3$ بـ :

$$g(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 35}{x+3} \right)$$

(1) نبين أنه من أجل كل $x \in D_g$ فإن :

$$g'(x) = \frac{1}{4} \frac{f(x)}{(x+3)^2}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty, -3[$ و $]-3, +\infty[$ و لدينا :

$$g'(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{(3x^2 + 6x - 9)(x+3) - (x^3 + 3x^2 - 9x - 35) \times 1}{(x+3)^2} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{2x^3 + 12x^2 + 18x + 8}{(x+3)^2} \right)$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$g'(x) = \frac{2}{8} \left(\frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}{(x+3)^2} \right) = \frac{1}{4} \frac{f(x)}{(x+3)^2} \text{ و هو المطلوب إثباته .}$$

(2) إستنتاج إتجاه تغير الدالة g :

من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$ فإن $(x+3)^2 > 0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $f(x)$:

إذا كان $x \in]-\infty, -4]$ فإن $f(x) \leq 0$ و منه $g'(x) \leq 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على

المجال $]-\infty, -4]$.

إذا كان $x \in [-4, -3[\cup]-3, +\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$ و منه $g'(x) \geq 0$ و بالتالي الدالة g

متزايدة تماما على كل من المجالين $[-4, -3[$ و $] -3, +\infty[$.

حساب نهايات الدالة g على أطراف مجموعة تعريفها :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 35}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{8x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{8} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 35}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{8} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{8} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 35}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow -3^-} -\frac{8}{x+3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{8} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 35}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow -3^+} -\frac{8}{x+3} = -\infty \end{array} \right.$$

جدول تغيرات الدالة g :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

x	$-\infty$	-4	-3	-1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$

لاحظ أن الدالة المشتقة الأولى g' تنعدم عند $x_0 = -1$ ولا تغير من إشارتها و منه فالنقطة ذات الفاصلة -1 هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_g) .

(3) إستنتاج أن (C_g) منحنى الدالة g يقبل مماسين (T_1) و (T_2) كل منهما يوازي حامل محور الفواصل يطلب كتابة معادلة لكل منهما :

من أجل كل $x \neq -3$ لدينا : $g'(x) = \frac{1}{4} \frac{f(x)}{(x+3)^2}$ حيث $f(-4) = 0$ و $f(-4) = 0$ و عليه يكون

$g'(-4) = 0$ و كذلك $g'(-1) = 0$ و منه نستنتج أن المنحنى (C_g) يقبل مماسين (T_1) عند النقطة ذات الفاصلة -4 و (T_2) عند النقطة ذات الفاصلة -1 كل منهما يوازي حامل محور الفواصل :

$$(T_1): y = \frac{15}{8} \quad \text{أي} \quad (T_1): y = g(-4) \quad \text{أي} \quad (T_1): y = g'(-4)(x+4) + g(-4)$$

$$(T_2): y = -\frac{3}{2} \quad \text{أي} \quad (T_2): y = g(-1) \quad \text{أي} \quad (T_2): y = g'(-1)(x+1) + g(-1)$$

(4) إعطاء حصر لـ $g(x)$ علما أن $x \in [-2, 5]$ (تعطى النتائج بالتدوير إلى 10^{-1})

الدالة g قابلة للإشتقاق (و بالتالي فهي مستمرة) و متزايدة تماما على المجال $I = [-2, 5]$ ؛ إذن :

$x \in I$ معناه $-2 \leq x \leq 5$ و منه ينتج : $g(-2) \leq g(x) \leq g(5)$ (نحافظ على نفس الترتيب) أي

$-1,6 \leq g(x) \leq 1,9$ حسب المطلوب في السؤال .

انتهى عمل التمرين...



الرياضيات في الثانوية

- Mathematics for all -



f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(D) هو المستقيم الذي يشمل النقطتين $A(0;3)$ و $B(-3;0)$. (أنظر الشكل أدناه)

بقراءة بيانية أجب على الأسئلة من (1 إلى 4) الآتية :

(1) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) - x = 3$.

(3) عين شعاع الإنسحاب الذي يسمح بالانتقال من (P) منحنى الدالة " مربع " إلى (C_f) التمثيل البياني لدالة f .

(4) جد عبارة $f(x)$ بدلالة x بالنسبة إلى المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(5) تحقق أنه من أجل كل $x \in D_f$ فإن $-4 - x \in D_f$ و $f(-4 - x) = f(x)$ ؛ فسر النتيجة هندسيا .

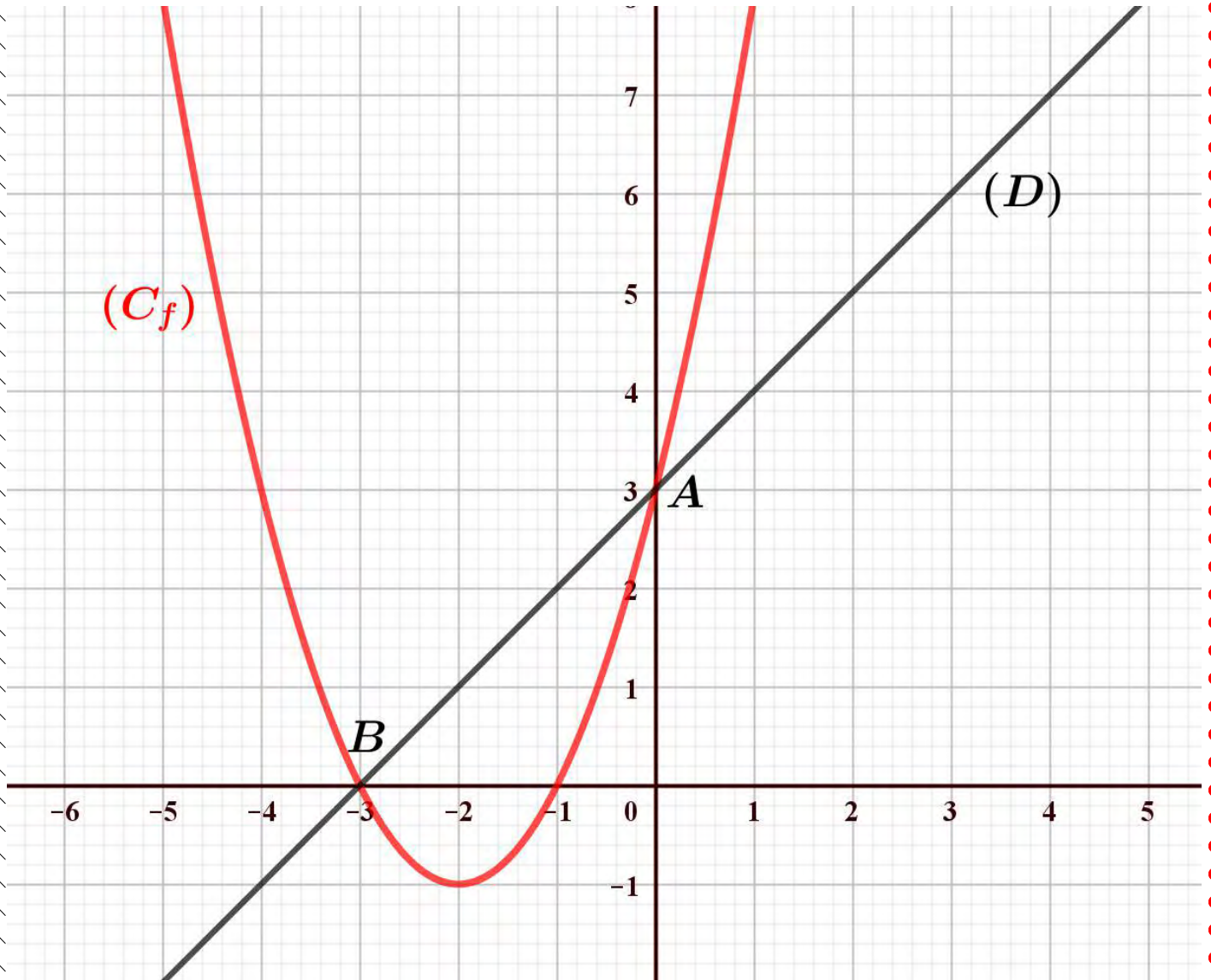
(6) نعتبر الدوال g ، h و k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$k(x) = f(x-1) + 1 \quad , \quad h(x) = f(-|x|) \quad , \quad g(x) = |f(x)|$$

➤ اشرح كيف يمكن إنشاء المنحنيات (C_g) ، (C_h) ، (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f)

➤ أنشئ المنحنيات السابقة كل في شكل مستقل عن الآخر .

(7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = m^2 - 5$.





f تقبل الاشتقاق عند X_0 ؟

f الدالة المعرفة على المجال $[0, 4]$ كما يلي : $f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) برر قابلية اشتقاق الدالة f على $]0, 4[$ و أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0, 4[$:

$$f'(x) = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$$

(2) أ- هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟ فسر النتيجة المتحصل عليها هندسيا .

ب- هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 4 ؟ فسر النتيجة المتحصل عليها هندسيا .

(3) أدرس اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أنشئ المنحنى (C_f) .

تعيين الأعداد الحقيقية α ، β و γ :

في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر المنحنى (C) ذو المعادلة

$$y = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{2(x - \gamma)^2} \text{ حيث } \alpha, \beta \text{ و } \gamma \text{ أعداد حقيقية .}$$

➤ عين الأعداد α ، β و γ التي من أجلها يكون لهذا المنحنى مستقيمان مقاربان (Δ) حيث $x=1$

معادلة له و (Δ') حيث $y = \frac{3}{2}$ معادلة له و يقبل مماسا (T) عند النقطة O حيث $y = -2x$ معادلة له .



الرياضيات في الثانوية - Mathematics for

- all



(1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) - x = 3$:

$f(x) - x = 3$ تكافئ $f(x) = x + 3$ و منه حلول المعادلة بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى

(C_f) مع المستقيم الذي $y = x + 3$ معادلة له ، حيث نعلم أن المستقيم (D) يشمل النقطتين $A(0;3)$ و

$B(-3;0)$ ، المستقيم (D) له معادلة من الشكل $y = ax + b$ حيث : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 0}{0 - 3} = 1$

أي $y = x + b$ ، و بما أن $A \in (D)$ فإن $y_A = x_A + b$ أي $3 = 0 + b$ و منه $b = 3$.

إذن $y = x + 3$ هي معادلة للمستقيم (D) ، و منه حلول المعادلة $f(x) = x + 3$ بيانيا تمثل فواصل نقط

تقاطع (C_f) مع (D) ، إذن نستنتج من الشكل أدناه أن مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{-3, 0\}$

(3) تعيين شعاع الإنسحاب الذي يسمح بالانتقال من (P) منحنى الدالة " مربع " إلى (C_f) التمثيل البياني

لدالة f :

مركبتنا شعاع الإنسحاب الذي يسمح بالانتقال من (P) إلى (C_f) هما إحداثيا ذروة المنحنى (C_f) أي

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

إحداثيا النقطة التي يقبل فيها (C_f) قيمة حدية ، إذن شعاع الإنسحاب هو $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(4) إيجاد عبارة $f(x)$ بدلالة x بالنسبة إلى المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

بما أن (C_f) صورة (P) منحنى الدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي

x : $f(x) = (x+2)^2 - 1$ (في الحالة العامة إذا كان شعاع الإنسحاب هو $\vec{v} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ مع $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ فإن

$f(x) = (x+a)^2 + b$) .

(5) التحقق أنه من أجل كل $x \in D_f$ فإن $-4-x \in D_f$ و $f(-4-x) = f(x)$:

ليكن $x \in D_f$ معناه $x \in \mathbb{R}$ أي $-\infty < x < +\infty$ و منه $-\infty < -x < +\infty$ و منه $-\infty < 4-x < +\infty$ أي

$4-x \in \mathbb{R}$ و منه $4-x \in D_f$ ، و من جهة أخرى من أجل كل $x \in D_f$:

$$\text{أي } f(-4-x) = (-4-x+2)^2 - 1 = (-2-x)^2 - 1 = [-(x+2)]^2 - 1$$

$$\cdot f(2 \times (-2) - x) = f(x) \text{ تكافئ } f(-4-x) = (x+2)^2 - 1 = f(x)$$

التفسير الهندسي : المستقيم الذي $x = -2$ معادلة له هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

(6) نعتبر الدوال g ، h و k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$k(x) = f(x-1) + 1 \quad , \quad h(x) = f(-|x|) \quad , \quad g(x) = |f(x)|$$

➤ شرح كيف يمكن إنشاء المنحنيات (C_g) ، (C_h) ، (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) :

من أجل كل عدد حقيقي x نكتب $g(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$ و من التمثيل البياني للدالة f :

$$g(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 1, & x \in]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[\\ 1 - (x+2)^2, & x \in]-3, -1[\end{cases}$$

(C_g) منطبقا على (C_f) و بالتالي يكون (C_g) منطبقا على (C_f)

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

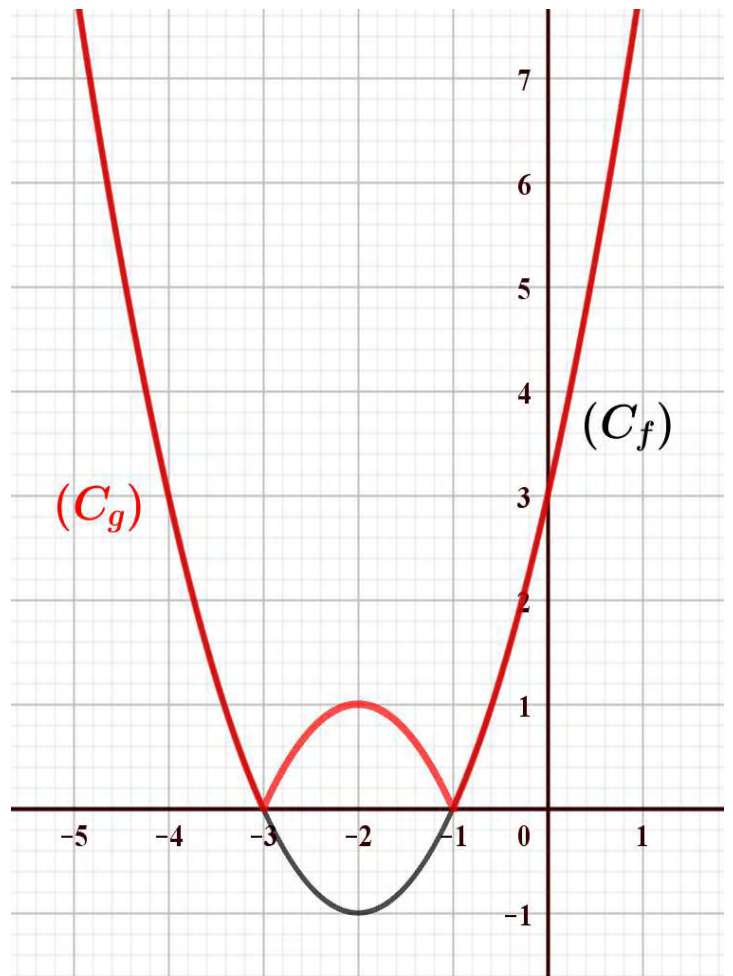
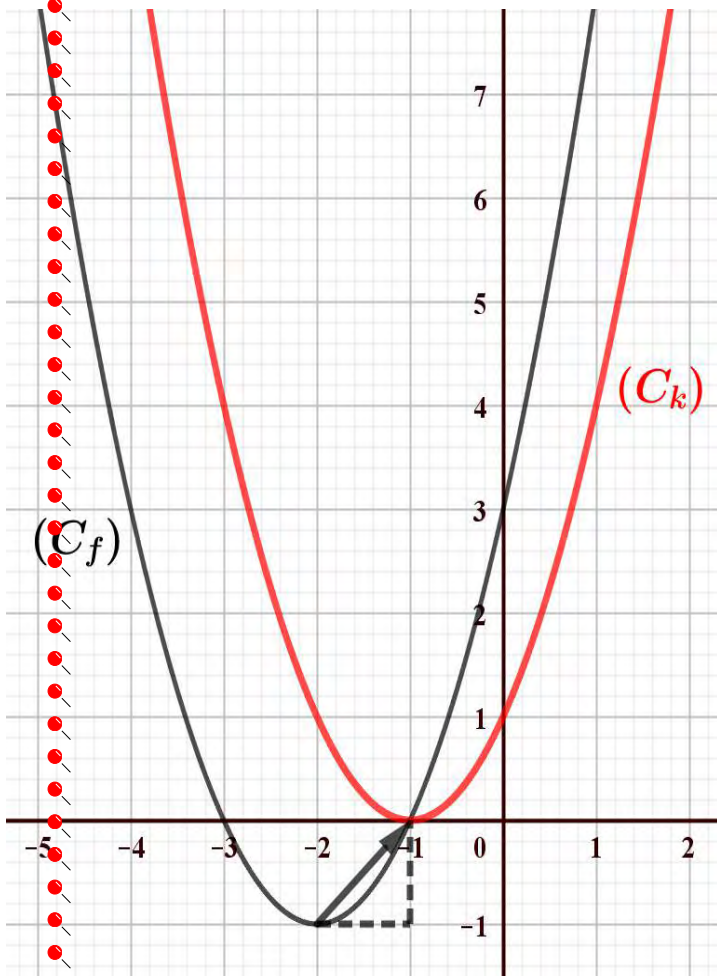
لما $f(x) \geq 0$ أي لما $x \in]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$ و يكون (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل لما $f(x) < 0$ أي لما $x \in]-3, -1[$.

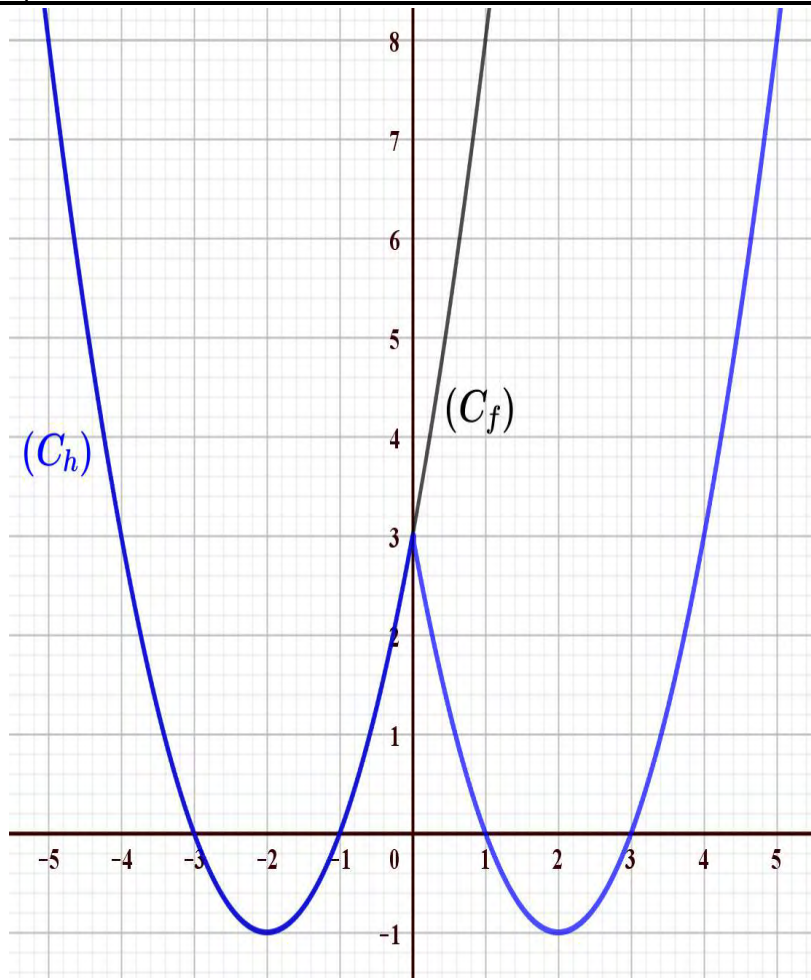
إذا كان $x \leq 0$ فإن $|x| = -x$ و منه $-|x| = x$ ؛ إذن يكون $h(x) = f(x)$ لما $x \leq 0$ و بالتالي يكون (C_h) منطبقا على (C_f) في المجال $]-\infty, 0]$.

و بما أن الدالة h زوجية (لأن $D_h = \mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر و من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $h(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = h(x)$) فإنه لما يكون $x < 0$ فإن (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب.

$k(x) = f(x-1)+1$ أي أن كتابة $k(x)$ من الشكل $k(x) = f(x+a)+b$ حيث $a = -1$ و $b = 1$

و بالتالي (C_k) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ أي $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.





(7) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = m^2 - 5$:

حلول المعادلة بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الأفقية (Δ_m) الموازية لحامل محور الفواصل التي معادلاتها من الشكل $y = m^2 - 5$ (نوع المناقشة أفقية) .

• إذا كان $m^2 - 5 < -1$ أي $m^2 < 4$ أي $-2 < m < 2$ أي $m \in]-2, 2[$ فإن المستقيم الذي (Δ_m) لا

يتقاطع مع المنحنى (C_f) و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2 - 5$ لا تقبل حولا .

• إذا كان $m^2 - 5 = -1$ أي $m^2 = 4$ أي $m = -2$ أو $m = 2$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى

(C_f) في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0 = -2$ و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2 - 5$ تقبل حلا وحيدا

$x_0 = -2$ (هناك بعض الكتب تسمي هذا النوع من الحلول بالحل المضاعف لوجود ذروة في المنحنى)

• إذا كان $-1 < m^2 - 5 < 0$ أي $4 < m^2 < 5$ أي $-\sqrt{5} < m < -2$ أو $2 < m < \sqrt{5}$ أي

$m \in]-\sqrt{5}, -2[\cup]2, \sqrt{5}[$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطتين

متمايزتين فاصلة كل منهما عدد سالب و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2 - 5$ تقبل حلين متمايزين

- إذا كان $m^2 - 5 = 0$ أي $m^2 = 5$ أي $m = -\sqrt{5}$ أو $m = \sqrt{5}$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطتين متميزتين فاصلة إحداهما $x_1 = -3$ و الأخرى $x_2 = -1$ و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2 - 5$ تقبل حلين متميزين سالبين تماما $x_1 = -3$ و $x_2 = -1$.
- إذا كان $0 < m^2 - 5 < 3$ أي $5 < m^2 < 8$ أي $-2\sqrt{2} < m < -\sqrt{5}$ أو $\sqrt{5} < m < 2\sqrt{2}$ أي $m \in]-\infty, -2\sqrt{2}[\cup]\sqrt{5}, 2\sqrt{2}[$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطتين متميزتين فاصلة كل منهما عدد سالب و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2 - 5$ تقبل حلين متميزين سالبين تماما .

- إذا كان $m^2 - 5 = 3$ أي $m^2 = 8$ أي $m = -2\sqrt{2}$ أو $m = 2\sqrt{2}$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطتين متميزتين فاصلة إحداهما هي $x_3 = -4$ و الأخرى $x_4 = 0$ و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2 - 5$ تقبل حلين متميزين هما $x_3 = -4$ (حل سالب تماما) و $x_4 = 0$ (حل معدوم) .

- إذا كان $m^2 - 5 > 3$ أي $m^2 > 8$ أي $m > 2\sqrt{2}$ أو $m < -2\sqrt{2}$ أي $m \in]-\infty, -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}, +\infty[$ فإن المستقيم (Δ_m) يتقاطع مع المنحنى (C_f) في نقطتين متميزتين إحداهما ذات فاصلة موجبة تماما و الأخرى ذات فاصلة سالبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x) = m^2 - 5$ تقبل حلين متميزين أحدهما موجب تماما و الآخر سالب تماما .

انتهى حل المسألة الأولى...



f تقبل الاشتقاق عند x_0 ؟

f الدالة المعرفة على المجال $[0, 4]$ كما يلي : $f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تبرير قابلية اشتقاق الدالة f على $]0, 4[$ و إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0, 4[$:

$$f'(x) = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$$

بما أن الدالة $u: x \mapsto 4x - x^2$ تقبل الاشتقاق على $]0, 4[$ (دالة كثير حدود) و من أجل كل $x \in]0, 4[$

فإن $4x - x^2 > 0$ (u موجبة تماما على المجال $]0, 4[$) ؛ إذن الدالة f حيث $f(x) = x\sqrt{u(x)}$ تقبل

الاشتقاق على $]0, 4[$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0, 4[$:

$$\text{أي } f'(x) = 1 \times \sqrt{u(x)} + x \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \sqrt{4x-x^2} + x \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \sqrt{4x-x^2} + \frac{x(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}} \text{ أي } f'(x) = \frac{\sqrt{4x-x^2}^2 + x(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{4x-x^2+2x-x^2}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{-2x^2+6x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

(2) أ- دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 :

الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 إذا و فقط إذا كانت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = l \in \mathbb{R}$ حيث :

$$0 \text{ تقبل الاشتقاق عند } 0 \text{ ؛ إذن الدالة } f \text{ تقبل الاشتقاق عند } 0 \text{ : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\sqrt{4h-h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{4h-h^2} = 0$$

(في حدود مفاهيم الرياضيات المقررة في الطور الثانوي) و لدينا $f'(0) = 0$.

التفسير الهندسي : $f'(0)$ يمثل معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، إذن المماس للمنحنى

(C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 أي عند المبدأ O (لأن $f(0) = 0$) يكون موازيا لحامل محور الفواصل

الدالة f تقبل الاشتقاق عند 4 إذا و فقط إذا كانت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = l \in \mathbb{R}$ حيث :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)\sqrt{4(4+h) - (4+h)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)\sqrt{-h(4+h)}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(4+h)^2}{h\sqrt{-h(4+h)}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(4+h)^2}{\sqrt{-h(4+h)}} = -\infty$$

عندما $h \rightarrow 0^+$ و $\sqrt{-h(4+h)} \rightarrow 0^+$ و $-(4+h)^2 \rightarrow -16$ وبالتالي الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 4 .

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي (موازي لحامل محور الترتيب) عند النقطة ذات

الفاصلة 4 .

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ثم تشكيل جدول تغيراتها :

من أجل كل عدد $x \in]0, 4[$ لدينا : $f'(x) = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$ حيث من أجل كل $x \in]0, 4[$ فإن

$\sqrt{4x-x^2} > 0$ و بالتالي إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $2x(3-x)$ على المجال $]0, 4[$:

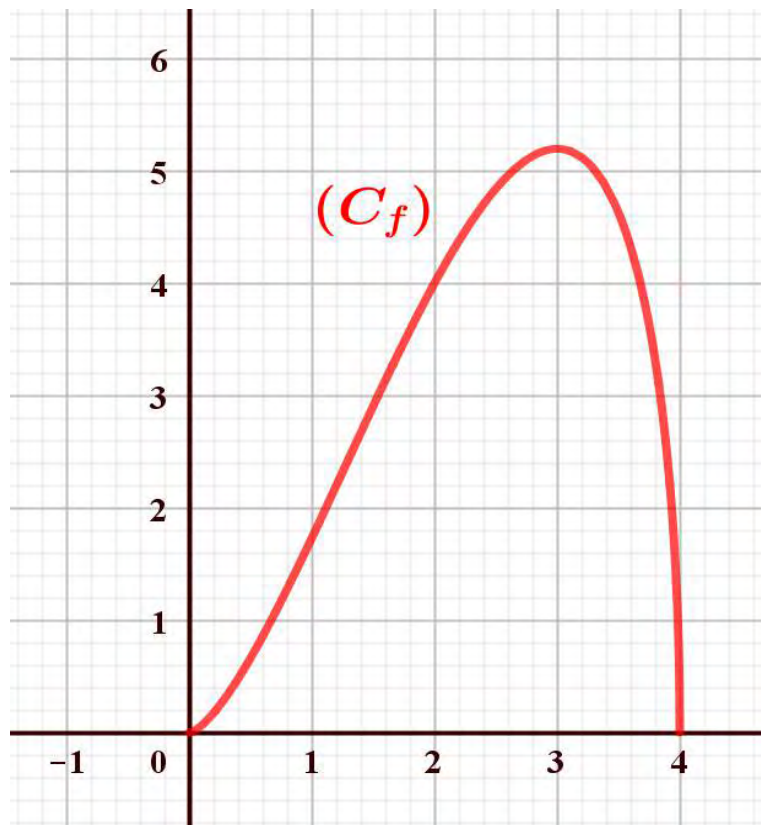
x	0	3	4
$2x$	0	+	+
$3-x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

بما أنه من أجل كل $x \in]0, 3[$ لدينا $f'(x) \geq 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0, 3]$

بما أنه من أجل كل $x \in]3, 4[$ لدينا $f'(x) \leq 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[3, 4]$

x	0	3	4
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	0	$3\sqrt{3}$	0

(4) إنشاء المنحنى (C_f) :



انتهى عمل التمرين الثاني...

تعيين الأعداد الحقيقية α ، β و γ :

في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر المنحنى (C) ذو المعادلة

$$y = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{2(x - \gamma)^2} \text{ حيث } \alpha, \beta, \gamma \text{ أعداد حقيقية.}$$

➤ تعيين الأعداد α ، β و γ التي من أجلها يكون لهذا المنحنى مستقيمان مقاربان (Δ) حيث $x=1$

معادلة له و (Δ') حيث $y = \frac{3}{2}$ معادلة له و يقبل مماسا (T) عند النقطة O حيث $y = -2x$ معادلة له :

✚ يكون المستقيم (Δ) الذي $x=1$ معادلة له مقاربا عموديا للمنحنى (C) إذا و فقط إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha + \beta}{2(x - \gamma)^2} = \infty \text{ أي } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + \beta x}{2(x - \gamma)^2} = \infty \text{ و منه نستنتج أن } \alpha + \beta \neq 0$$

$$(x - \gamma)^2 \rightarrow 0 \text{ عندما } x \rightarrow 1 \text{ و منه نستنتج أن } 1 - \gamma = 0 \text{ و بالتالي نجد : } \gamma = 1$$

✚ يكون المستقيم (Δ') الذي $y = \frac{3}{2}$ معادلة له مقارب أفقي للمنحنى (C) إذا و فقط إذا كان

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^2}{2x^2} = \frac{3}{2} \text{ أي } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x}{2(x - 1)^2} = \frac{3}{2} \text{ أي } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \frac{3}{2} \text{ (نهاية دالة ناطقة}$$

$$\text{بجوار } (\pm\infty) \text{ أي } \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2} \text{ و منه نستنتج أن : } \alpha = 3$$

✚ المنحنى (C) يقبل مماسا (T) عند النقطة $O(0;0)$ حيث $y = -2x$ معادلة له معناه أن معامل

$$\text{توجيه هذا المماس يساوي } -2 \text{ حيث نعلم أن } f'(0) \text{ (بوضع } f(x) = \frac{3x^2 + \beta x}{2(x - 1)^2} \text{ مع } x \neq 1 \text{)}$$

يمثل معامل توجيه المماس (T) f تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها و لدينا :

$$f'(0) = \frac{2\beta}{4} = \frac{\beta}{2} \text{ و } f'(x) = \frac{2(6x + \beta)(x - 1)^2 - 4(3x^2 + \beta x)(x - 1)}{4(x - 1)^4}$$

إذن بوضع $\frac{\beta}{2} = -2$ ينتج $\beta = -4$.

هي معادلة للمنحنى (C) .

$$y = \frac{3x^2 - 4x}{2(x-1)^2}$$

نتيجة :

إنتهى على القمرين الثالث ...



الرياضيات في الثانوية - Mathematics for

- all



1- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن الدالة f فردية .

2- أثبت أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

3- أدرس إتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها .

4- أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) .

5- إستنتج أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيينها .

6- بين أن المستقيم (Δ) الذي $y = x + 1$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ثم إستنتج معادلة (Δ') المستقيم المقارب الآخر .

7- أرسم المستقيمات (T) ، (Δ) و (Δ') ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

8- دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ) بين أن الدالة g زوجية .

ب) أنشئ المنحنى (C_g) إنطلاقاً من (C_f) .

ج) ناقش بيانياً و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $g(x) = m^2 - 1$.

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x-2}$ و γ و β و α وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أوجد الأعداد الحقيقية α ، β و γ بحيث المنحنى (C_f) يقبل كمقارب المستقيم (Δ) الذي $y = x - 1$ معادلة له و يقبل قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة 3 .

2- أحسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f .

3- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي 3- يطلب كتابة معادلة لكل منهما .

4- أرسم المستقيمت (Δ) ، (T) و (T') ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

5- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم الذي $y + 3x - m = 0$ معادلة له .

6- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ علما أن المنحنى (C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

➤ عين عبارة $g(x)$ بدلالة x ثم أنشئ المنحنى (C_g) في نفس المعلم السابق .

الشكل أسفله هو المنحنى البياني (C_f) للدالة f المعرفة و القابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ و f' دالتها المشتقة ؛ نعلم أن :

✓ المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة هي المبدأ O

✓ محور الفواصل مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

✓ المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة A

✓ المماس لـ (C_f) عند النقطة B يشمل النقطة ذات الإحداثيات $(-\frac{1}{2}; 0)$

1- إنطلاقا من المنحنى (C_f) :

(أ) عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) عين $f'(1)$ و $f'(\frac{3}{2})$

(ج) حل في المجال $[0, 4]$: المعادلة $f'(x) \geq 0$ و المتراجحة $f(x) \leq 2$

(د) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = 2m - 1$

2- نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

(أ) حدد مجموعة تعريف الدالة g ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

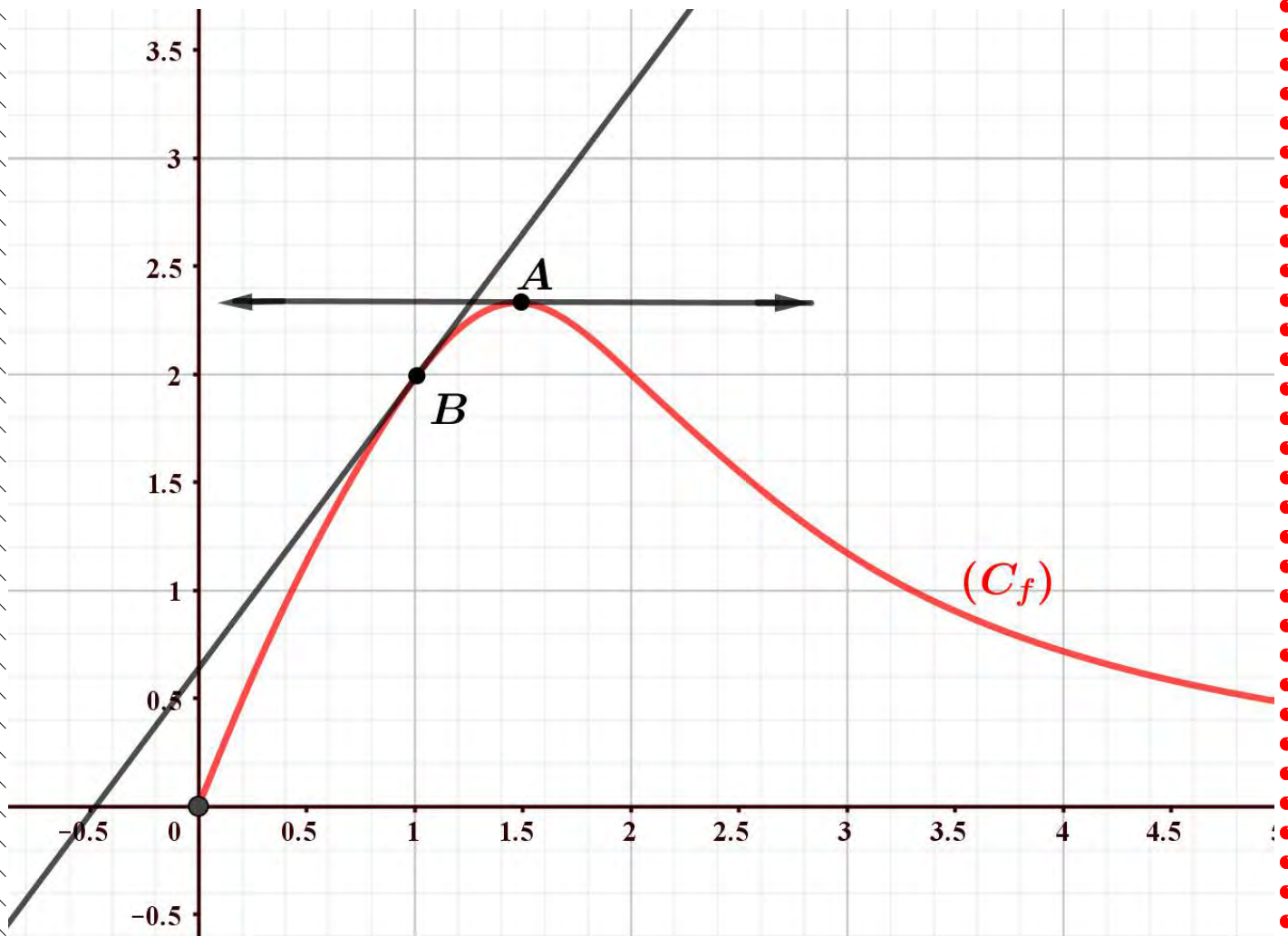
(ب) أدرس إتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها بالإعتماد على إشارة الدالة المشتقة g' .

(3) نعتبر الدالة k التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x : $k(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

(أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} k(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ ؛ ماذا تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة k ؟

(ب) أحسب $k'\left(\frac{2}{3}\right)$.

كتابة الأستاذ : حناش نبيل



الرياضيات في الثانوية - Mathematics for all



1- نبين أن الدالة f هي دالة فردية :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و هي مجموعة متناظرة بالنسبة إلى 0 : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

و من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) = -x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} \right)$ ، لكن $(-x)^2 = x^2$ و منه ينتج

$$f(-x) = -x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = -f(x) \text{ ؛ إذن } f \text{ دالة فردية .}$$

2- إثبات أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

تمرين 01 : مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و لا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u}$ تقبل الإشتقاق على I و

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2} \text{ : لدينا}$$

تمرين 02 : مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و كانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الإشتقاق

$$\left(\sqrt{u} \right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ : لدينا}$$

f معرفة و تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = 1 \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) + x \left(0 - \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}^2} \right)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \quad \text{أي} \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + x \left(-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \right)$$

$$\cdot \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \quad \text{أي} \quad f'(x) = 1 + \frac{x^2+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

-3 من أجل كل عدد $x \in \mathbb{R}$: $x^2 > 0$ ؛ $x^2 + 1 > 0$ ؛ و كذلك $\sqrt{x^2+1} > 0$ ؛ إذن من أجل كل عدد

حقيقي x فإن $f'(x) > 0$ ؛ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

✓ حساب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها :

$$x \rightarrow -\infty \quad \text{لما} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad \text{لما} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

-4 كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$:

$$\text{حيث} \quad y = f'(0)(x-0) + f(0) \quad \text{و} \quad f'(0) = 1 + \frac{1}{(0^2+1)\sqrt{0^2+1}} = 2$$

$$\cdot \quad f(0) = 0 \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{0^2+1}} \right) = 0 \quad \text{؛ إذن} \quad y = 2x \quad \text{هي معادلة للمماس} \quad (T) .$$

دراسة الوضع النسبي للمماس (T) مع المنحنى (C_f) (يستحسن رسم جدول ملخص)

$$\text{نحسب الفرق} \quad f(x) - y = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) - 2x = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

أي $f(x) - y = \frac{x - x\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ؛ و بما أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 + 1} > 0$ فإن إشارة المقدار من

إشارة البسط $x - x\sqrt{x^2 + 1}$ أي من إشارة $x(1 - \sqrt{x^2 + 1})$:

المعادلة $x(1 - \sqrt{x^2 + 1}) = 0$ تكافئ $x = 0$ أو $1 - \sqrt{x^2 + 1} = 0$ تكافئ $x = 0$ أو $\sqrt{x^2 + 1} = 1$

تكافئ $x = 0$ أو $x^2 + 1 = 1$ تكافئ $x = 0$ أو $x = 0$ ؛ إذن $x(1 - \sqrt{x^2 + 1}) = 0$ إذا و فقط إذا كان $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$1 - \sqrt{x^2 + 1}$	-	0	-
$x(1 - \sqrt{x^2 + 1})$	+	0	-

✓ إذا كان $x < 0$ فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المماس (T) .

✓ إذا كان $x > 0$ فإن المنحنى (C_f) يقع تحت المماس (T) .

✓ إذا كان $x = 0$ فإن المماس (T) يقطع (يخترق) المنحنى (C_f) .

5- المماس (T) يخترق المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ و بالتالي فالنقطة $O(0; f(0))$ أي

$O(0; 0)$ هي نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة f .

6- إثبات أن المستقيم (Δ) الذي $y = x + 1$ هو مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$ ثم إستنتاج معادلة لـ

(Δ') المستقيم المقارب الآخر :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - x - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right]$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 \right] = 1 - 1 = 0$$

و بالتالي نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي $y = x + 1$ معادلة له مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

نعلم أن الدالة f هي دالة فردية و بالتالي منحناها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ متناظر بالنسبة

إلى مبدأ المعلم O ؛ إذن يكون المستقيم (Δ') الذي $y = x - 1$ مقاربا مائلا لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$.

(8-أ) إثبات أن الدالة g هي دالة زوجية :

$D_g = \mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى الصفر لأنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$.

$$g(-x) = |-x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} \right) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = g(x) \quad : x \in \mathbb{R}$$

خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي $|-x| = |x|$ ؛ إذن g هي دالة زوجية .

(ب) شرح طريقة إنشاء (C_g) بالإعتماد على (C_f) :

✓ إذا كان $x \geq 0$ فإن $|x| = x$ و عليه يكون $g(x) = f(x)$ ؛ إذن (C_g) ينطبق على (C_f) .

✓ إذا كان $x < 0$ و بما أن الدالة g هي دالة زوجية ؛ فإن (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب .

(ج) المناقشة البيانية و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $g(x) = m^2 - 1$:

حلول المعادلة $g(x) = m^2 - 1$ بيانيا تمثل فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_g) مع المستقيم الأفقي الموازي لحامل

محور الفواصل (مناقشة أفقية) الذي $y = m^2 - 1$ معادلة له :

✓ إذا كان $m^2 - 1 = 0$ أي $m^2 = 1$ أي $m \in \{-1, 1\}$ فإن المعادلة $g(x) = m^2 - 1$ تقبل حلا وحيدا

معدوما .

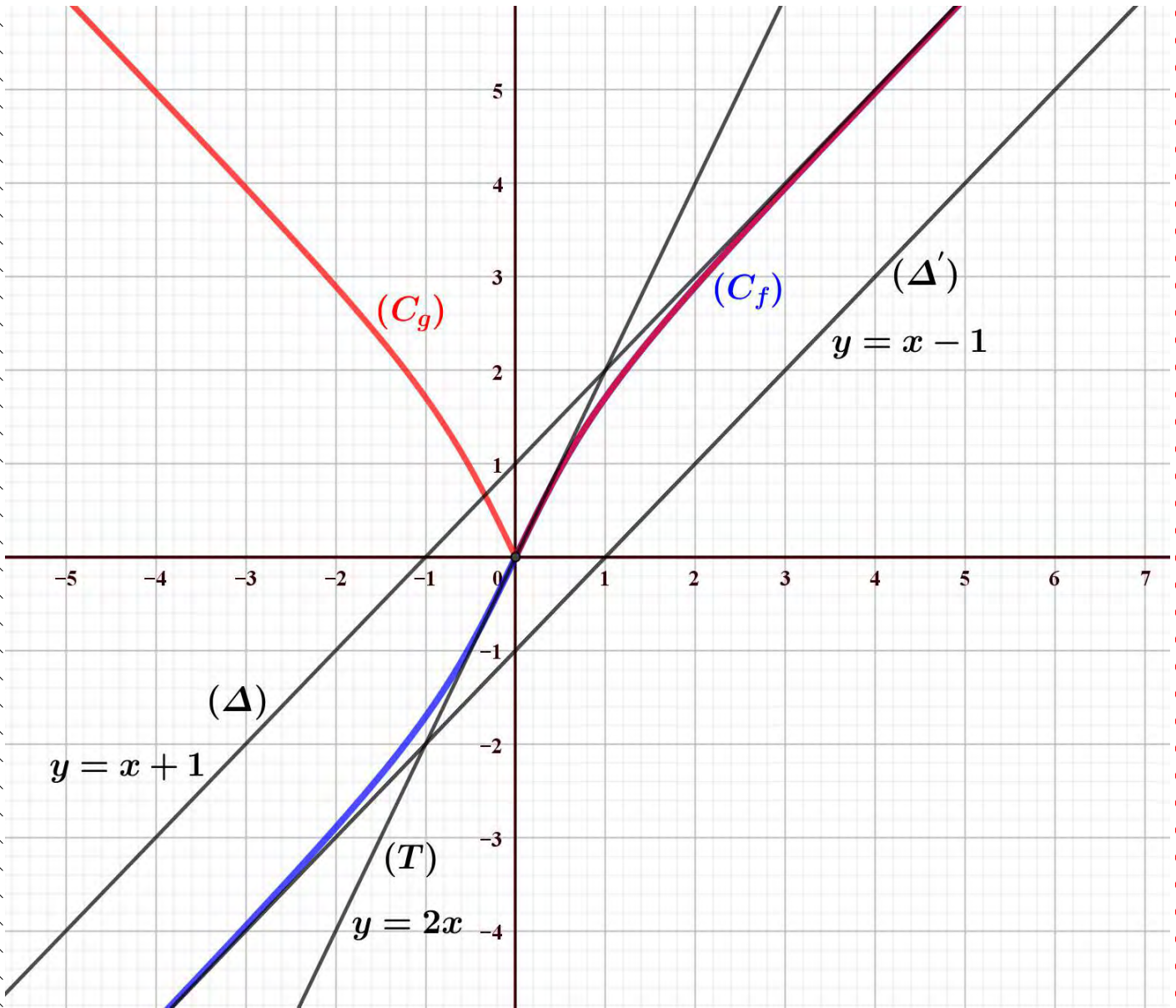
كتابة الأستاذ : حناش نبيل

✓ إذا كان $m^2 - 1 < 0$ أي $m^2 < 1$ أي $m \in]-1, 1[$ فإن المعادلة $g(x) = m^2 - 1$ لا تقبل حولا لأنه لا

توجد نقاط تقاطع بين (C_g) و المستقيم الذي $y = m^2 - 1$ معادلة له .

✓ إذا كان $m^2 - 1 > 0$ أي $m^2 > 1$ أي $m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإن المعادلة $g(x) = m^2 - 1$ تقبل

حليين متمايزين في الإشارة .



انتهى عمل القلم الأول...

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x-2}$ و α و β و γ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- إيجاد الأعداد الحقيقية α ، β و γ بحيث المنحنى (C_f) يقبل كمقارب المستقيم (Δ) الذي $y = x - 1$ معادلة له و يقبل قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة 3 :

يكون المستقيم (Δ) الذي $y = x - 1$ معادلة له مقاربا مائلا لمنحنى f بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$ إذا و فقط إذا

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0 \text{ معناه } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x-2} - x + 1 \right] = 0 \text{ أي}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[(\alpha-1) \frac{x^2}{x-2} + (\beta+3) \frac{x}{x-2} + \frac{\gamma-2}{x-2} \right] = 0 \text{ أي } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\alpha-1)x^2 + (\beta+3)x + \gamma-2}{x-2} \right] = 0$$

$$\text{حيث نعلم أن : } \frac{\gamma-2}{x-2} \rightarrow 0 \text{ و } (\beta+3) \frac{x}{x-2} \rightarrow \beta+3 \text{ لما } |x| \rightarrow +\infty \text{ لأن } \frac{x}{x-2} \rightarrow 1$$

$$\text{و } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ ؛ إذن تكون } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0 \text{ إذا و فقط إذا كان } \alpha-1=0$$

$$\text{و } \beta+3=0 \text{ و بالتالي نستنتج أن : } \alpha=1 \text{ و } \beta=-3 .$$

(C_f) يقبل قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة 3 إذن ينتج $f'(3)=0$ حيث من أجل القيم السابقة لـ α و β

$$\text{تكون } f(x) = \frac{x^2 - 3x + \gamma}{x-2} \text{ حيث أن الدالة } f \text{ تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها و لدينا من أجل كل } x \in D_f$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 6 - \gamma}{(x-2)^2} \text{ ؛ إذن } f'(3)=0 \text{ تكافئ } \frac{3^2 - 4 \times 3 + 6 - \gamma}{(3-2)^2} = 0 \text{ تكافئ } 3 - \gamma = 0$$

$$\text{تكافئ } \gamma = 3 \text{ ؛ و منه نستنتج أنه من أجل كل } x \neq 2 \text{ فإن : } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-2} .$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

-2 حساب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} : D_f \text{ تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل عدد حقيقي } D_f$$

✓ دراسة إتجاه تغير الدالة f :

من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ فإن : $(x-2)^2 > 0$ و بالتالي إشارة المشتقة من إشارة البسط أي من إشارة

$x^2 - 4x + 3$ و هو ثلاثي حدود من الدرجة الثانية مميزه $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4 > 0$ و عليه فهو يقبل

جذرين متمايزين هما : $x_1 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$ و $x_2 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$ ؛ نلخص إشارة ثلاثي الحدود $x^2 - 4x + 3$

في جدول :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
إشارة $x^2 - 4x + 3$	+	-	+	

➤ بما أن $f'(x) \geq 0$ على كل من المجالين $]-\infty, 1]$ و $[3, +\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال

$]-\infty, 1]$ و متزايدة تماما على المجال $[3, +\infty[$.

➤ بما أن $f'(x) \leq 0$ على كل من المجالين $[1, 2[$ و $]2, 3]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال

$[1, 2[$ و متناقصة تماما على المجال $]2, 3]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		-1		$+\infty$	$+\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$-\infty$	$-\infty$	3	

كيفية حساب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها : $D_f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

f دالة ناطقة و بالتالي نهاية الدالة f عند ∞ هي نهاية حددها الأعلى درجة في البسط على حددها الأعلى درجة في

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

المقام و منه نجد :

و من أجل حساب نهاية الدالة f عند 2 بقيم أكبر و بقيم أصغر ندرس إشارة المقام $x - 2$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
إشارة $x - 2$	-	0	+

✓ لما $x \xrightarrow{<} 2$ فإن $x - 2 \rightarrow 0^-$ و لما $x \xrightarrow{>} 2$ فإن $x - 2 \rightarrow 0^+$ ؛ إذن نستنتج أن :

$$\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{1}{x - 2} = -\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{1}{x - 2} = +\infty \end{cases}$$

3- إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي -3 يطلب كتابة معادلة

لكل منهما :

نعلم أن العدد $f'(x_0)$ يمثل معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0 ؛ إذن نبحت عن

حلول المعادلة $f'(x) = -3$ في $\mathbb{R} - \{2\}$:

$$f'(x) = -3 \text{ تكافئ } \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = -3 \text{ تكافئ } x^2 - 4x + 3 = -3x^2 + 12x - 12 \text{ تكافئ}$$

$$4x^2 - 16x + 15 = 0 \text{ ؛ مميز ثلاثي الحدود هو } \Delta = (-16)^2 - 4(4)(15) = 16 > 0$$

$$\text{إذن المعادلة } 4x^2 - 16x + 15 = 0 \text{ تقبل حلين متمايزين هما : } x_1 = \frac{16 + \sqrt{16}}{8} = \frac{5}{2} \text{ و}$$

$$x_2 = \frac{16 - \sqrt{16}}{8} = \frac{3}{2}$$

؛ إذن نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما

$$\left\{ \begin{array}{l} (T): y = -3x + 11 \\ (T'): y = -3x + 3 \end{array} \right. \text{ و منه } \left\{ \begin{array}{l} (T): y = -3\left(x - \frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) \\ (T'): y = -3\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) \end{array} \right.$$

بعد حساب $f\left(\frac{5}{2}\right)$ و $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

5- المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم الذي

$$y + 3x - m = 0 \text{ معادلة له :}$$

$y + 3x - m = 0$ معناه $y = -3x + m$ ؛ علما أن جميع المستقيمات التي لها معادلة من الشكل $y = -3x + m$

توازي كل من المماس (T) و المماس (T') لأن لها نفس معامل التوجيه و هو 3- و في هذه الحالة تكون

المناقشة ماثلة .

✓ إذا كان $m = 11$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y = -3x + 11$ معادلة له و هو المماس

(T) في نقطة وحيدة فاصلتها $\frac{5}{2}$.

✓ إذا كان $m = 3$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y = -3x + 3$ معادلة له و هو المماس

(T') في نقطة وحيدة فاصلتها $\frac{3}{2}$.

✓ إذا كان $3 < m < 11$ أي $m \in]3, 11[$ فإنه لا توجد نقاط تقاطع بين المنحنى (C_f) و المستقيم الذي

$$y = -3x + m \text{ معادلة له .}$$

✓ إذا كان $-\frac{3}{2} < m < 3$ أي $m \in \left]-\frac{3}{2}, 3\right[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع في نقطتين كل منهما ذات فاصلة

موجبة تماما مع المستقيم الذي $y = -3x + m$ معادلة له .

✓ إذا كان $m = -\frac{3}{2}$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع في نقطتين إحداها ذات فاصلة موجبة تماما و الأخرى ذات

فاصلة معدومة مع المستقيم الذي $y = -3x + m$ معادلة له .

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

✓ إذا كان $m < -\frac{3}{2}$ أي $m \in]-\infty, -\frac{3}{2}[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع في نقطتين إحداها ذات فاصلة

موجبة تماما و الأخرى ذات فاصلة سالبة تماما مع المستقيم الذي $y = -3x + m$ معادلة له .

✓ إذا كان $m > 11$ أي $m \in]11, +\infty[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع في نقطتين كل منهما ذات فاصلة موجبة

تماما مع المستقيم الذي $y = -3x + m$ معادلة له .

6- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ علما أن المنحنى (C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

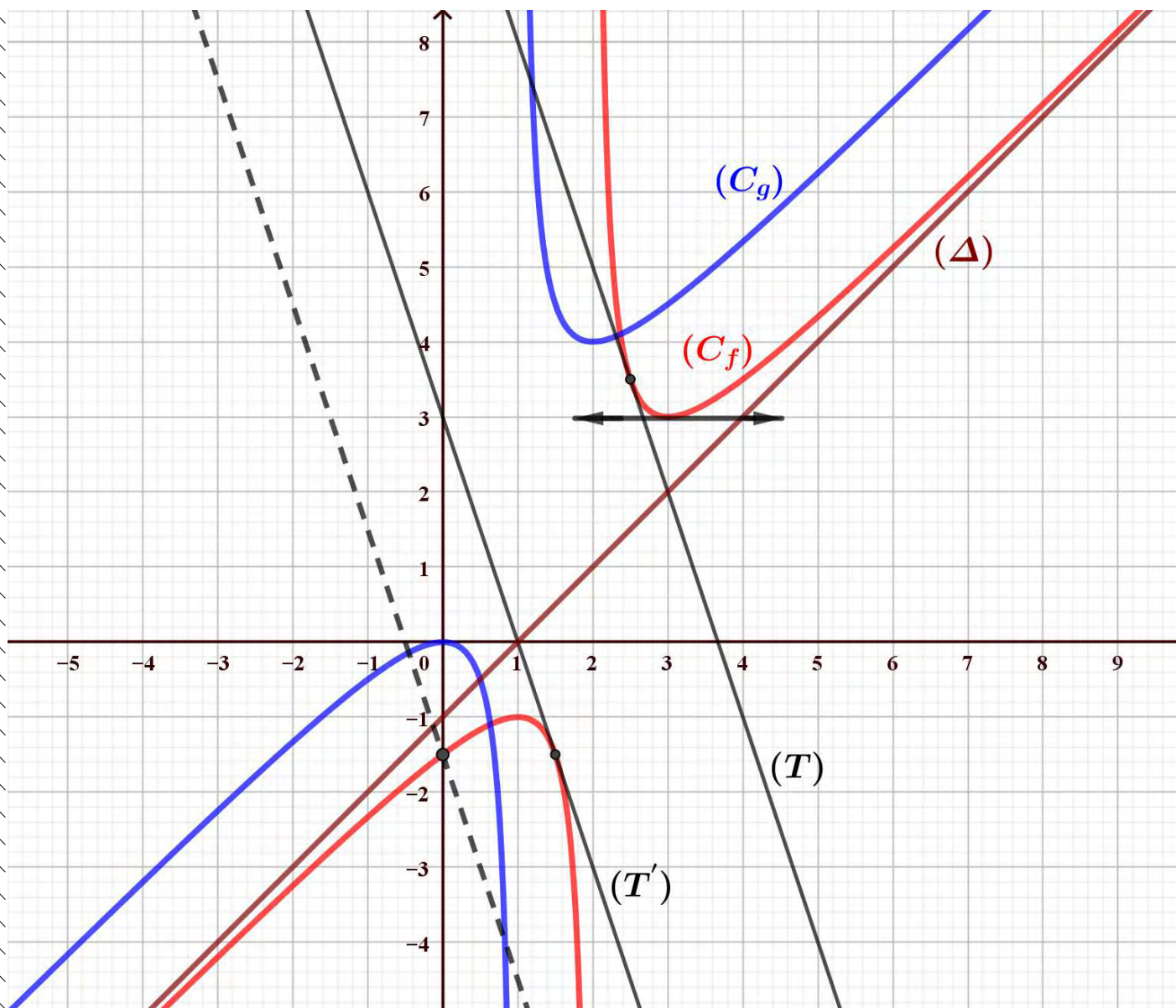
تنبيه: إذا كانت $g(x) = f(x+a) + b$ حيث $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ فإن (C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب

الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$.

بما أن $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع الإنسحاب الذي يسمح بالانتقال من المنحنى (C_f) إلى المنحنى (C_g) فإن :

$$: x \in D_g \text{ حقيقي } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} -a=-1 \\ b=1 \end{cases} ; \text{ إذن من أجل كل عدد حقيقي } x \in D_g :$$

$$. \boxed{g(x) = \frac{x^2}{x-1}} \text{ أي } g(x) = f(x+1) + 1 = \frac{(x+1)^2 - 3(x+1) + 3}{(x+1) - 2} + 1 = \frac{x^2 - x + 1}{x-1} + 1$$



انتهى عمل القلم الثاني...

1- القراءة البيانية :

✓ بما أن حامل محور الفواصل الذي نعلم أن $y = 0$ هي معادلة له مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

✓ $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ يمثل معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) (أو الميل للأب المعلم متعامد و متجانس) عند

النقطة ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$ حيث أن هذا المماس هو مستقيم يوازي حامل محور الفواصل (أفقي) و بالتالي

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ ميله يكون معدوما أي}$$

✓ $f'(1)$ يمثل معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 حيث أن هذا المماس هو

المستقيم الذي يشمل النقطتين $A(1; f(1))$ و $B\left(-\frac{1}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ؛ إذن يكون :

$$f'(1) = \frac{f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(1)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{0 - 2}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{4}{3}$$

✓ تكون $f'(x) \geq 0$ على المجالات التي تكون فيها الدالة f متزايدة تماما و على المجال الجزئي $\left[0, \frac{3}{2}\right]$

من $[0, 4]$ تكون الدالة f متزايدة تماما ؛ إذن حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$ هي : $S = \left[0, \frac{3}{2}\right]$.

✓ حلول المتراجحة $f(x) \leq 2$ تمثل فواصل نقط المنحنى (C_f) الواقعة تحت المستقيم الأفقي الذي $y = 2$

معادلة له أو المنطبقة عليه في المجال $[0, 4]$ و من الشكل نجد : $S = [0, 1] \cup [2, 4]$.

✓ المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = 2m - 1$:

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

حلول المعادلة $f(x) = 2m - 1$ بيانها تمثل فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي الموازي لحامل محور الفواصل الذي $y = 2m - 1$ معادلة له (نوع المناقشة أفقية) .

▪ إذا كان $2m - 1 < 0$ أي $m < \frac{1}{2}$ أي $m \in]-\infty, \frac{1}{2}[$ فإنه لا توجد نقاط تقاطع بين (C_f) و بين

المستقيم الذي $y = 2m - 1$ معادلة له ؛ إذن المعادلة $f(x) = 2m - 1$ لا تقبل حولا .

▪ إذا كان $2m - 1 = 0$ أي $m = \frac{1}{2}$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y = 2m - 1$ معادلة له

في نقطة وحيدة فاصلتها هي 0 (مبدأ المعلم) .

▪ إذا كان $0 < 2m - 1 < \frac{12}{5}$ أي $\frac{1}{2} < m < \frac{17}{10}$ أي $m \in]\frac{1}{2}, \frac{17}{10}[$ فإن المنحنى (C_f)

يتقاطع مع المستقيم الذي $y = 2m - 1$ معادلة له في نقطتين كل منهما ذات فاصلة موجبة تماما ؛ إذن

المعادلة $f(x) = 2m - 1$ تقبل حلين متمايزين موجبين تماما .

▪ إذا كان $2m - 1 = \frac{12}{5}$ أي $m = \frac{17}{10}$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y = 2m - 1$

معادلة له في نقطة وحيدة فاصلتها هي $\frac{3}{2}$ ؛ إذن المعادلة $f(x) = 2m - 1$ تقبل حلا وحيدا هو $\frac{3}{2}$.

▪ إذا كان $2m - 1 > \frac{12}{5}$ أي $m > \frac{17}{10}$ أي $m \in]\frac{17}{10}, +\infty[$ فإنه لا توجد نقاط تقاطع بين (C_f) و

بين المستقيم الذي $y = 2m - 1$ معادلة له ؛ إذن المعادلة $f(x) = 2m - 1$ لا تقبل حولا .

2- نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

✓ تكون الدالة g إذا و فقط إذا كان $f(x) \neq 0$ ؛ حيث نعلم من المعطيات أن (C_f) يقطع (xx') فقط عند

المبدأ O ؛ إذن تكون $f(x) \neq 0$ إذا و فقط إذا كان $x \neq 0$ و منه نستنتج أن : $D_g =]0, +\infty[$

لأن : $f(x) \rightarrow 0^+$ لما $x \rightarrow 0^+$ و $f(x) \rightarrow 0^+$ لما $x \rightarrow +\infty$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty \end{array} \right.$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

✓ الدالة g تقبل الاشتقاق على $]0, +\infty[$ و من أجل كل عدد $x \in]0, +\infty[$ لدينا : $g'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

على المجال $]0, 3/2]$ الدالة f متزايدة تماما و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0, 3/2]$ فإن

$f'(x) \geq 0$ و عليه يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0, 3/2]$ ؛ $g'(x) \leq 0$ ؛ إذن الدالة g

متناقصة تماما على المجال $]0, 3/2]$.

على المجال $[3/2, +\infty[$ الدالة f متناقصة تماما و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي $x \in [3/2, +\infty[$

فإن $f'(x) \leq 0$ و عليه يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \in [3/2, +\infty[$ ؛ $g'(x) \geq 0$ ؛ إذن الدالة g

متزايدة تماما على المجال $[3/2, +\infty[$.

3- من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما نعتبر الدالة : $k(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

(أ) نهاية الدالة k عند أطراف مجموعة تعريفها :

** f متصلة مستمرة على مجموعة تعريفها ** و منه $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0$ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$

** f متصلة مستمرة على مجموعة تعريفها ** و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \end{cases}$

الاستنتاج : (C_k) يقبل حامل محور الفواصل (xx') كمقارب أفقي بجوار $+\infty$.

مبرهنة : مشتقة الدالة $v \circ u$

إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

الإشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I : $(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$

k تقبل الإشتقاق على $]0, +\infty[$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $k'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

لأن k هي مركب الدالة مقلوب $u: x \mapsto \frac{1}{x}$ متبوعة بالدالة f .

إذن نستنتج أن : $k'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ لأنه من السؤال -1 ب) فإن : $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

انتهى عمل التمرين الثالث...



الرياضيات في الثانوية - Mathematics for all -



دالة وسيطة:

f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x-1}$ حيث m وسيط حقيقي .

و ليكن (C_{f_m}) المنحنى الممثل للدالة f_m في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن جميع المنحنيات (C_{f_m}) حيث $m \neq 1$ تشترك في مستقيم مقارب ثابت يطلب تعيين معادلة له .

2- بين أن جميع المنحنيات (C_{f_m}) تشترك في نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

3- عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f_m(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ مع $m \neq 1$.

4- برهن أن النقطة $\Omega_m(1; 2-m)$ مركز تناظر للمنحنى (C_{f_m}) حيث $m \neq 1$.

✓ ما هي مجموعة النقط Ω_m لما m يسمح المجموعة $\mathbb{R} - \{1\}$.

5- أحسب $f'_m(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ ثم استنتج :

✓ قيم m و التي من أجلها تحافظ الدالة f_m على اتجاه تغيرها على مجموعة تعريفها .

✓ قيم m و التي من أجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين عظمى و صغرى .

1- نبين أن جميع المنحنيات (C_{f_m}) حيث $m \neq 1$ تشترك في مستقيم مقارب ثابت يطلب تعيين معادلة له :

نبين أن المستقيم الذي $x=1$ مقارب عمودي لجميع المنحنيات (C_{f_m}) حيث $m \neq 1$:

لدينا :
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - mx}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-m}{x-1} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - mx}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-m}{x-1} = \infty \end{array} \right.$$
 لأن $1-m \neq 0$ لأن $m \neq 1$

و منه نستنتج أن المستقيم الذي $x=1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f_m من أجل كل $m \neq 1$.

2- نبين أن جميع المنحنيات (C_{f_m}) تشترك في نقطة ثابتة يطلب تعيينها :

نفرض أنه توجد نقطة ثابتة $A(x_0; y_0) \in (C_{f_m})$ من أجل كل عدد حقيقي m معناه :

من أجل كل عدد حقيقي m فإن :
$$\frac{x_0^2 - mx_0}{x_0 - 1} = y_0$$

معناه من أجل كل عدد حقيقي m فإن :
$$x_0^2 - mx_0 = (x_0 - 1)y_0$$

معناه من أجل كل عدد حقيقي m فإن :
$$mx_0 + (x_0 - 1)y_0 - x_0^2 = 0$$

إذن ينتج :
$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ -y_0 = 0 \end{array} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ (x_0 - 1)y_0 - x_0^2 = 0 \end{array} \right.$$
 و منه نستنتج أن :

$O(0;0) \in (C_{f_m})$ من أجل كل عدد حقيقي m .

3- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f_m(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ مع

$m \neq 1$:

من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ لدينا : $f_m(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ أي $f_m(x) = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

أي $f_m(x) = \frac{ax^2 + (b-a)x + c-b}{x-1}$ ، حيث نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ فإن :

$$f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x-1} \text{ و بالتالي ينتج : } \begin{cases} a=1 \\ b-a=-m \\ c-b=0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} a=1 \\ b=1-m \\ c-b=0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} a=1 \\ b=1-m \\ c=1-m \end{cases} \text{ و منه نستنتج}$$

أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ فإن : $f_m(x) = x+1-m + \frac{1-m}{x-1}$ حيث m وسيط حقيقي .

4- البرهان أن النقطة $\Omega_m(1; 2-m)$ مركز تناظر للمنحنى (C_{f_m}) حيث $m \neq 1$:

ليكن $x \in D_{f_m}$ معناه $x \neq 1$ و بالتالي يكون $-x \neq -1$ و منه $2-x \neq 2-1$ أي $2-x \neq 1$ أي

$2-x \in D_{f_m}$ ، و من جهة أخرى من أجل كل عدد $x \in D_{f_m}$ نحسب $f_m(2-x) + f_m(x)$ فنجد :

$$f_m(2-x) + f_m(x) = \frac{(2-x)^2 - m(2-x)}{(2-x)-1} + \frac{x^2 - mx}{x-1} = \frac{x^2 - 4x + 4 + mx - 2m}{1-x} + \frac{x^2 - mx}{x-1}$$

$$f_m(2-x) + f_m(x) = \frac{4(x-1) - 2m(x-1)}{x-1} \text{ أي } f_m(2-x) + f_m(x) = \frac{4x - 2mx + 2m - 4}{x-1}$$

$$f_m(2-x) + f_m(x) = \frac{(x-1)(4-2m)}{x-1} \text{ و منه من أجل } x \neq 1 \text{ ينتج :}$$

$$f_m(2-x) + f_m(x) = 2(2-m) \text{ و هي من الشكل : } f_m(2a-x) + f_m(x) = 2b \text{ حيث } a=1 \text{ و}$$

$b=2-m$ و بالتالي النقطة $\Omega_m(1; 2-m)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f_m حيث $m \neq 1$.

✓ تعيين مجموعة النقط Ω_m لما m يسمح المجموعة $\mathbb{R} - \{1\}$:

النقط $\Omega_m(1; 2-m)$ من المستوي هي نقط ذات فاصلة ثابتة و تساوي 1 و ترتيب يتغير لما يتغير m في

المجموعة $\mathbb{R} - \{1\}$ و بالتالي مجموعة النقط Ω_m لما يسمح المجموعة $\mathbb{R} - \{1\}$ هي المستقيم (Δ) الذي

$x=1$ معادلة له باستثناء النقطة Ω_1 .

5- حساب $f'_m(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

الدالة f_m تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ حيث :

$$f'_m(x) = \frac{(2x-m)(x-1) - (x^2 - mx) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + m}{(x-1)^2}$$

تعيين في كل حالة :

✓ قيم m و التي من أجلها تحافظ الدالة f_m على اتجاه تغيرها على مجموعة تعريفها :

الدالة f_m تحافظ على اتجاه تغيرها على مجموعة تعريفها معناه $f'_m(x)$ ذات إشارة على $\mathbb{R} - \{1\}$ و بما أن

$$(x-1)^2 > 0 \text{ من أجل كل عدد حقيقي } x \neq 1 \text{ فإن إشارة } f'_m(x) \text{ من إشارة ثلاثي الحدود } x^2 - 2x + m$$

بحيث يكون ثلاثي الحدود $x^2 - 2x + m$ ذو إشارة ثابتة على المجموعة $\mathbb{R} - \{1\}$ إذا و فقط إذا كان

$$\Delta_m = (-2)^2 - 4(1)(m) \text{ سالبا أي } \Delta_m = 4(1-m) \text{ سالبا .}$$

نضع : $\Delta_m \leq 0$ يكافئ $4(1-m) \leq 0$ يكافئ $m \geq 1$ أي $m \in [1, +\infty[$

إذن من أجل كل عدد حقيقي $m \in [1, +\infty[$ فإن الدالة f_m تحافظ على اتجاه تغيرها على مجموعة تعريفها .

✓ قيم m و التي من أجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين عظمى و صغرى :

f_m تقبل قيمتين حديتين عظمى و صغرى إذا و فقط إذا كانت $f'_m(x)$ تنعدم و تغير من إشارتها على المجموعة

$\mathbb{R} - \{1\}$ أي إذا و فقط إذا كان ثلاثي الحدود $x^2 - 2x + m$ ينعدم و يغير من إشارته على المجموعة

$\mathbb{R} - \{1\}$ أي إذا و فقط إذا كان $\Delta_m > 0$ أي $1-m > 0$ يكافئ $m < 1$ أي $m \in]-\infty, 1[$

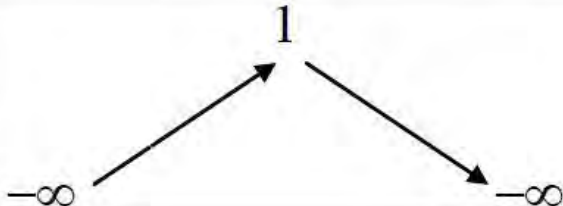
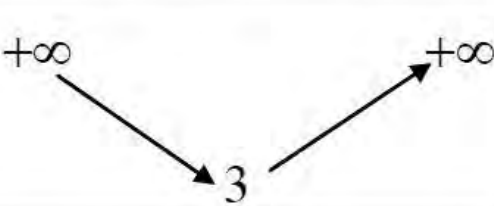
و في هذه الحالة تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين عظمى و صغرى هما :

$$f_m\left(\frac{2 + \sqrt{4(1-m)}}{2}\right) \text{ و } f_m\left(\frac{2 - \sqrt{4(1-m)}}{2}\right)$$

$$f_m\left(\frac{2 - \sqrt{4(1-m)}}{2}\right) \text{ أي } f_m(1 + \sqrt{1-m}) \text{ و } f_m(1 - \sqrt{1-m}) .$$

انتهى عمل القلم...

f دالة عددية جدول تغيراتها كالاتي :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	$-\infty$					

نفرض أن الدالة f تكتب من الشكل : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة .

1- أحسب $f'(x)$ بدلالة a و c .

2- بالإعتماد على جدول تغيرات الدالة f :

أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c .

ب) عين $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ ؛ ثم أعط تفسيرا للنتيجتين بيانيا .

ج) قارن بين $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{4}{5}\right)$ معللا إجابتك .

3- نعتبر فيما يلي أن : $a=1$ ، $b=1$ و $c=\frac{1}{4}$ ؛ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي $y = x + 1$ معادلة له مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

كتابة الأستاذ : جناش نبيل

(ج) أثبت أن النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(د) حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .

تمرن في القراءة البيانية

(C_f) التمثيل البياني لدالة f معرفة على المجال $] -\infty, 2[$.

المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما يوازي حامل محور الفواصل ؛ $y=1$ معادلة له و الآخر يوازي حامل محور الترتيب ؛ $x=2$ معادلة له .

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين $A(-2;0)$ و $B(1;0)$.

1- بقراءة بيانية ، عين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2- بقراءة بيانية عين : $f(-2)$ ، $f(1)$.

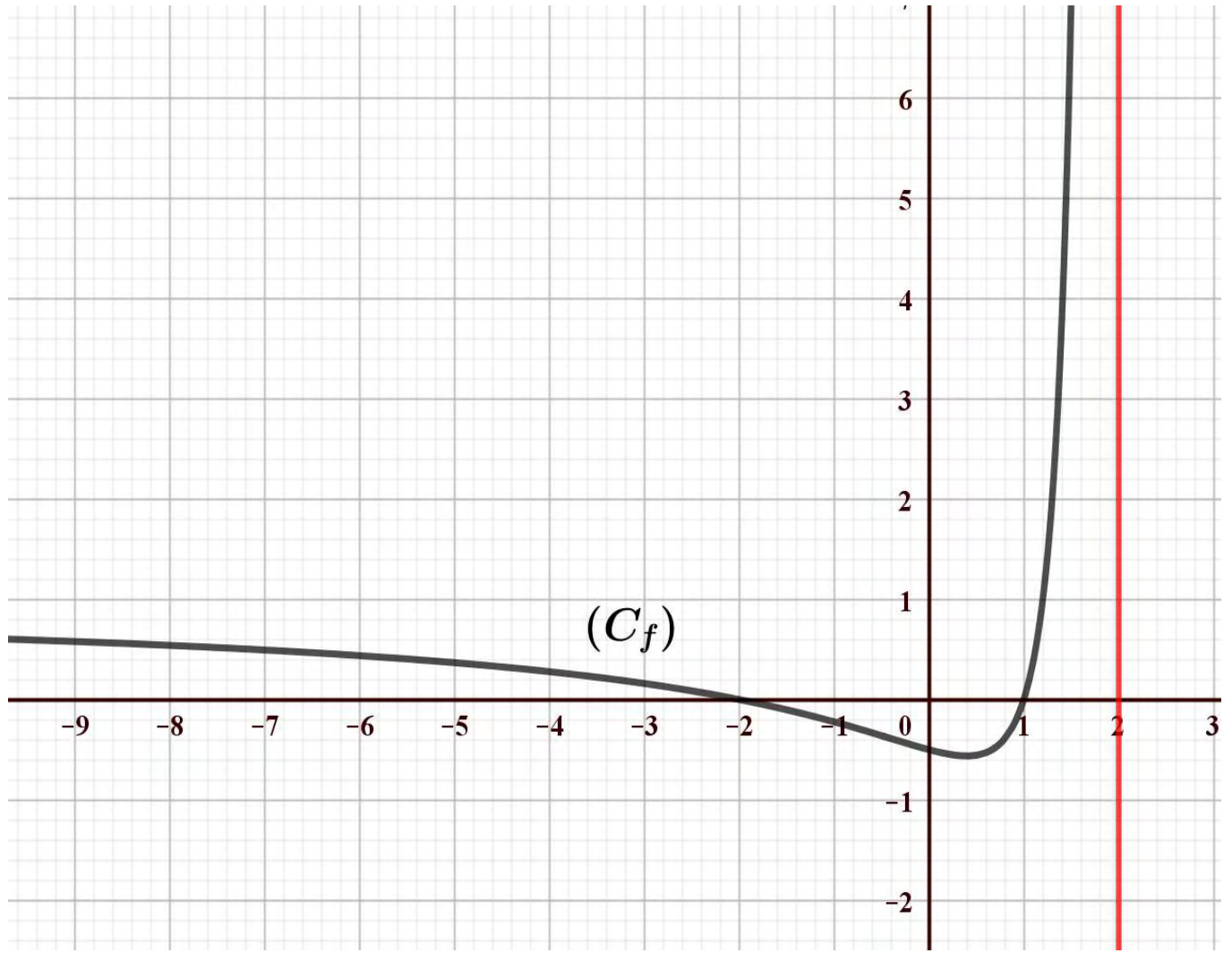
3- نفرض أن : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{(x-2)^2}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة .

✓ باستعمال المعطيات السابقة ؛ عين الأعداد a ، b و c .

4- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $] -\infty, 2[$ كما يلي : $g(x) = f(x) - 2$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

✓ إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أنشئه .



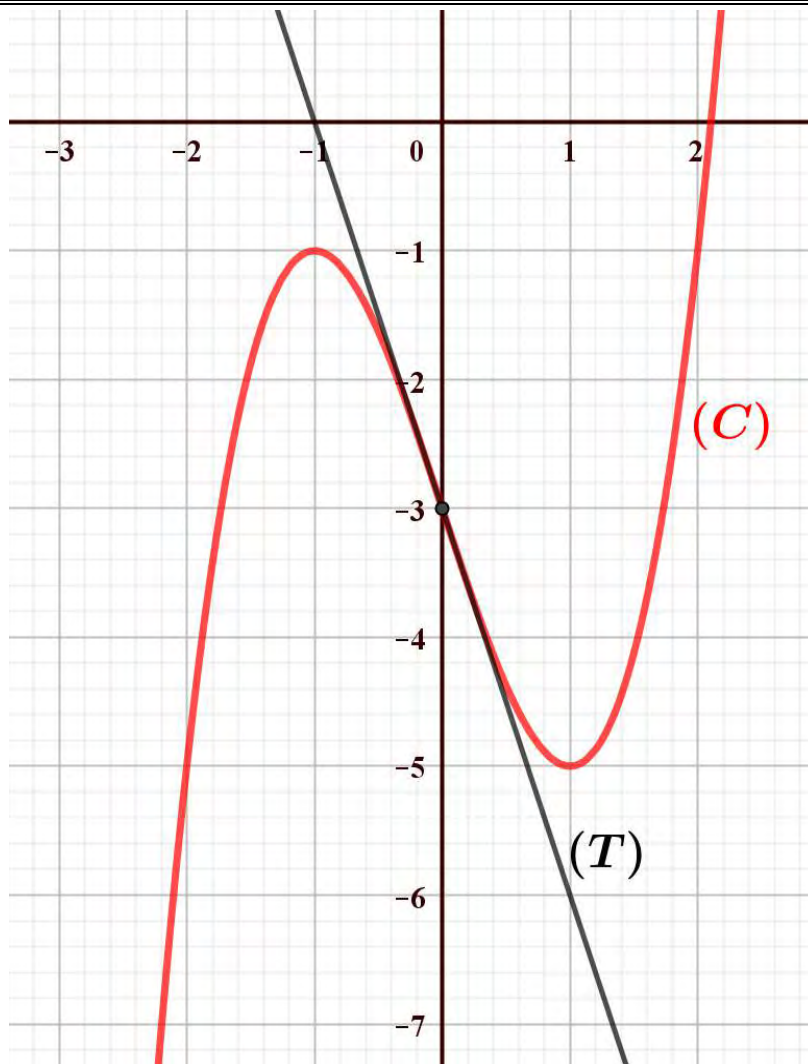
دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة

الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نفرض أن الدالة f معرفة بـ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية .

✓ بقراءة بيانية : حدد $f(0)$ ، $f'(-1)$ ، $f'(0)$.

✓ أوجد الأعداد a, b, c, d .



الرياضيات في الثانوية - Mathematics for all -



1- حساب $f'(x)$ بدلالة a و c :

الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ ولدينا :

$$f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2} \quad : x \in D_f \text{ من أجل كل}$$

2- أ) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بالإعتماد على جدول تغيرات الدالة f :

يوجد ثلاث ثوابت يطلب تعيينها ؛ إذن يمكن تشكيل على الأقل ثلاث معادلات ذات المجاهيل a ، b و c :

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ :} \begin{cases} \frac{1}{2}a + b - 2c = 1 \\ \frac{3}{2}a + b + 2c = 3 \\ a - 4c = 0 \end{cases} \quad ; \text{ و من المعادلة الثالثة ينتج } a = 4c$$

$$\text{إذن بالتعويض في المعادلتين الأولى و الثانية نتحصل على :} \begin{cases} b = 1 \\ b + 8c = 3 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 2c + b - 2c = 1 \\ 6c + b + 2c = 3 \end{cases}$$

$$\text{و منه } \begin{cases} b = 1 \\ c = \frac{2}{8} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} b = 1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases} ; \text{ و بما أن } a = 4c \text{ فإن } a = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$\text{نتيجة : من أجل كل عدد حقيقي } x \neq 1 \text{ فإن : } f(x) = x + 1 + \frac{1}{4(x-1)}$$

$$\text{ب) من جدول التغيرات يكون : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

الضمير الهندسي : المستقيم الذي $x = 1$ معادلة له مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\text{ج) المقارنة بين } f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ و } f\left(\frac{4}{5}\right) : \text{ كل من العددين } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{4}{5} \text{ عنصران من المجال } \left[\frac{1}{2}, 1\right[\text{ مع } \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

حيث أن الدالة f متناقصة تماما على هذا المجال ؛ إذن يكون $f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{4}{5}\right)$.

3- أ) نبين أن المستقيم (Δ) الذي $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$f(x)$ هي من الشكل $f(x) = x + 1 + g(x)$ حيث : $g(x) = \frac{1}{4(x-1)}$ ؛ و بما أن :

$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(x-1)} = 0$ ؛ إذن نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى

(C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{1}{4(x-1)}$ هي من إشارة المقدار $x - 1$ بحيث الفرق $f(x) - y$ لا يندم على

$\mathbb{R} - \{1\}$ و بالتالي فالمنحنى (C_f) لا يتقاطع مع المستقيم المقارب (Δ) .

✓ إذا كان $x < 1$ فإن $x - 1 < 0$ و منه $f(x) - y < 0$ ؛ إذن على المجال $]-\infty, 1[$: (C_f) يقع تحت

المقارب المائل (Δ) .

✓ إذا كان $x > 1$ فإن $x - 1 > 0$ و منه $f(x) - y > 0$ ؛ إذن على المجال $]1, +\infty[$: (C_f) يقع فوق

المقارب المائل (Δ) .

ملاحظة : يستحسن دائما تلخيص دراسة الوضع النسبي في جدول .

ج) إثبات أن النقطة $\Omega(2;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

نذكر : حتى تكون النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لمنحنى دالة f يكفي أن يتحقق الشرطين :

✓ من أجل كل $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$

$$f(2a-x) + f(x) = 2b \quad : x \in D_f \quad \checkmark \text{ من أجل كل}$$

ليكن $x \in D_f$ معناه $x \neq 1$ و منه $-x \neq -1$ و منه $2 \times 1 - x \neq 2 \times 1 - 1$ أي $2 \times 1 - x \neq 1$ و بالتالي يكون

$2 \times 1 - x \in D_f$ و منه فالشرط الأول محقق .

$$\text{نحسب الآن } f(2-x) + f(x) = 2-x+1 + \frac{1}{4(2-x-1)} + x+1 + \frac{1}{4(x-1)} : f(2-x) + f(x)$$

$$\text{أي } f(2-x) + f(x) = 4 + \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(x-1)} \text{ أي}$$

$$f(2-x) + f(x) = 4 = 2 \times 2 \text{ و منه } f(2-x) + f(x) = 4 - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)}$$

إذن الشرط الثاني محقق و بالتالي نستنتج أن النقطة $\Omega(1;2)$ هي مركز تناظر لمنحنى الدالة f .

(د) نحل في المجموعة $\mathbb{R} - \{1\}$ المعادلة $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } x+1 + \frac{1}{4(x-1)} = 0 \text{ تكافئ } \frac{4(x+1)(x-1)+1}{4(x-1)} = 0 \text{ تكافئ}$$

$$4(x+1)(x-1)+1=0 \text{ تكافئ } 4(x^2-1)+1=0 \text{ تكافئ } 4x^2-3=0 \text{ تكافئ}$$

$$x^2 = \frac{3}{4} \text{ تكافئ } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أو } x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ؛ إذن } S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

نتيجة : حلول المعادلة $f(x) = 0$ تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل ؛

إذن (C_f) يتقاطع مع حامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ و في النقطة B ذات الفاصلة $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1- المستقيم الذي $y=1$ معادلة له هو مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$ ؛ إذن نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ وكذلك المستقيم الذي $x=2$ معادلة له هو مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) ؛ و منه نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ (من التمثيل البياني) .

2- تعيين $f(-2)$ و $f(1)$: المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة -2 و كذلك في النقطة ذات الفاصلة 1 و منه نستنتج أن $f(-2)=0$ و $f(1)=0$.

3- نفرض أنه من أجل كل عدد حقيقي $x < 2$: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{(x-2)^2}$ حيث a, b, c أعداد حقيقية .

نستعمل المعطيات السابقة : $f(-2) = \frac{4a - 2b + c}{16} = 0$ و منه $4a - 2b + c = 0 \dots (1)$

$f(1) = 0$ تكافئ $a + b + c = 0 \dots (2)$ ؛ و كذلك باستعمال قانون نهاية دالة ناطقة بجوار $-\infty$ فإن

حيث أن المستقيم الذي $y=1$ هو مقارب أفقي للمنحنى (C_f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a \cancel{x^2} + b \cancel{x} + c}{\cancel{x^2} - 4 \cancel{x} + 4} = a$

و منه تكون $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ؛ إذن نستنتج أن $a = 1$.

و بتعويض قيمة a في المعادلتين (1) و (2) نتحصل على الجملة $\begin{cases} 2b - c = 4 \\ b + c = -1 \end{cases}$ ؛ و بالجمع طرفا لطرف نجد

$3b = 3$ و بالتالي $b = 1$ ؛ و لإيجاد قيمة c نعوض قيمة b في المعادلة الثانية مثلا فنجد $c = -2$.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x-2)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ فإن :

نتيجة :

4- من أجل كل عدد حقيقي $x \in]-\infty, 2[$: $g(x) = f(x) - 2$

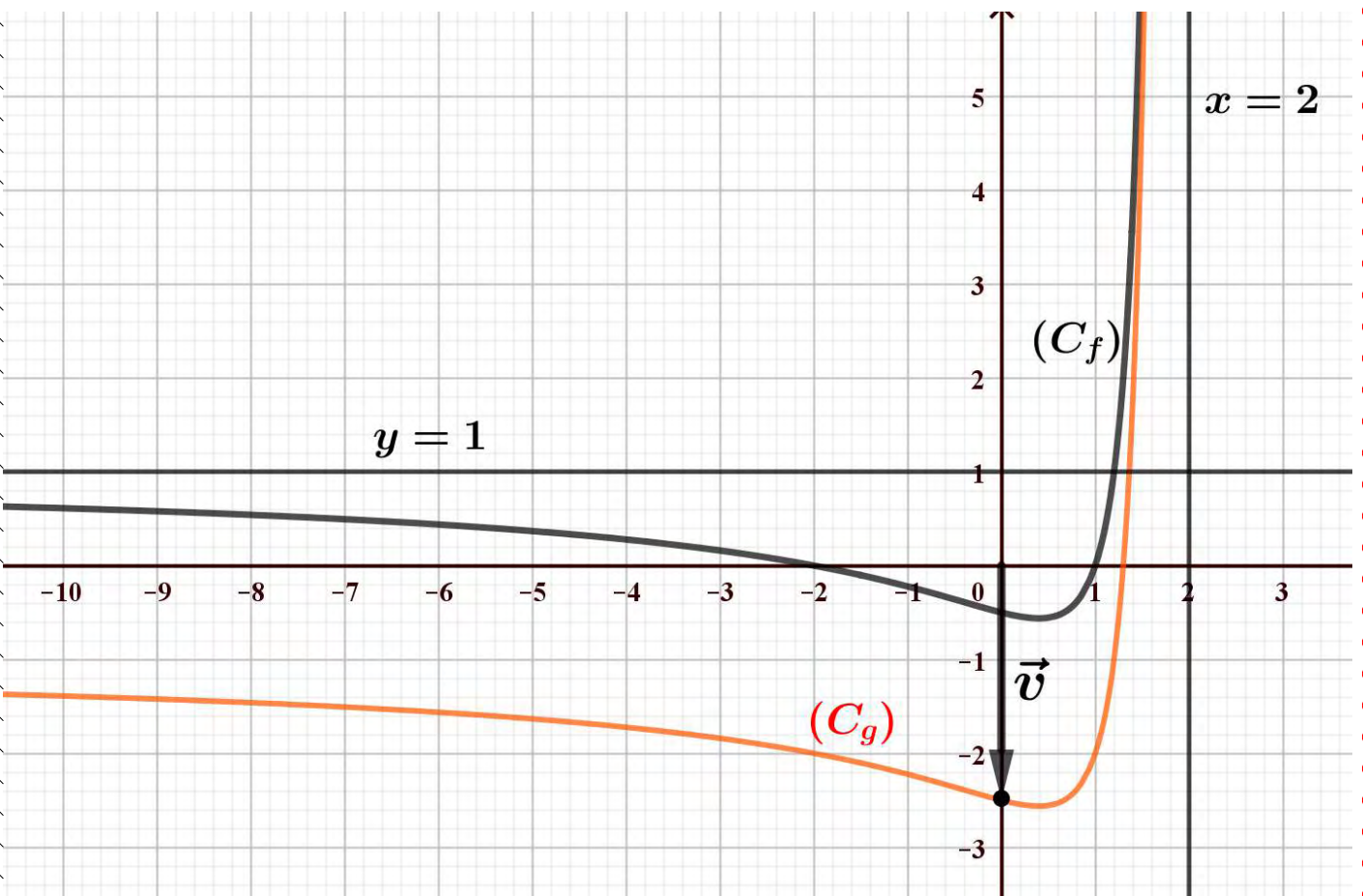
كتابة الأستاذ : حناش نبيل

و هي الكتابة من الشكل $g(x) = f(x + \alpha) + \beta$ حيث : $\alpha = 0$ و $\beta = -2$

تذكير : إذا كان دستور دالة g من الشكل : $g(x) = f(x + \alpha) + \beta$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

فإن (C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

نتيجة : (C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.



انتهى عمل القلم الثاني...

f هي دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة (3) تكتب من الشكل : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقية ثابتة يطلب تعيينها .

✓ $f(0)$ هي صورة العدد 0 بالدالة f و تمثل ترتيب نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الترتيب ؛

من الشكل السابق ينتج أن : $f(0) = -3$

✓ $f'(-1)$ يمثل معامل توجيه (ميل لأل المعلم متعامد و متجانس) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة

التي فاصلتها -1 ؛ لكن نلاحظ أن المنحنى (C_f) يقبل ذروة في النقطة ذات الفاصلة -1 و منه فالمماس يكون أفقيا

موازيا لحامل محور الفواصل و بالتالي ميله يكون **معدوما** ؛ إذن نستنتج أن $f'(-1) = 0$.

✓ $f'(0)$ يمثل معامل توجيه أو ميل المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 ؛ إذن نحسب معامل

توجيه المماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$\text{المماس } (T) \text{ يشمل النقطتين } E(0; -3) \text{ و } F(-1; 0) \text{ مثلا ؛ إذن ينتج : } f'(0) = \frac{0 - (-3)}{-1 - 0} = -3$$

2- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بالإعتماد على النتائج السابقة :

الدالة f هي كثير حدود معرفة و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\begin{cases} d = -3 \\ 3a - 2b = 3 \\ c = -3 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} d = -3 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} f(0) = -3 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(0) = -3 \end{cases}$$

لإيجاد العددين a و b يمكن مثلا ملاحظة أن المنحنى (C_f) يقبل ذروة في النقطة ذات الفاصلة 1 و منه

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$f'(1) = 0$ ؛ و منه ينتج : $3a + 2b + c = 0$ أي $3a + 2b = 3$ لأن $c = -3$

من الجملة $\begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ 3a + 2b = 3 \end{cases}$ و بجمع المعادلتين طرفا لطرف نجد $6a = 6$ ؛ إذن ينتج $a = 1$

و بتعويض قيمة a في المعادلة الأولى مثلا نجد $3 - 2b = 3$ تكافئ $-2b = 0$ تكافئ $b = 0$

نتيجة : من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = 3x^3 - 3x - 3$

انتهى عمل الشرح الثالث...



الرياضيات للجميع في الثانوية - Mathematics for all -



دالة ناطقة و مناقشة وسيطية من الشكل $f(x) = f(m)$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أدرس تغيرات الدالة f .

2- أوجد ثلاث أعداد حقيقية α ، β ، γ حيث من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$:

$$f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

3- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

4- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المقارب المائل (Δ) .

5- أوجد إحداثيي نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل (xx') .

6- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 ثم أكتب معادلة (T) .

7- أرسم (Δ) ، (T) ثم أنشئ (C_f) .

8- نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = f(-|x|)$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) حدد D_g مجموعة تعريف الدالة g .

(ب) اشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) بالاعتماد على المنحنى (C_f) (لا يطلب إنشاء (C_g)) .

(ج) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $y - x - 2m - 1 = 0$

9- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$



1- دراسة تغيرات الدالة f :

(أ) حساب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$:

بتطبيق قاعدة نهاية دالة ناطقة بجوار $\pm\infty$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

لأن $(x+1)^2 \rightarrow 0^+$ عندما $x \rightarrow -1$ و

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty \end{cases}$$

كذلك $(x+1)^2 \rightarrow 0^+$ عندما $x \rightarrow -1$.

التفسير الهندسي : بما أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم الموازي لحامل محور الترتيب الذي $x = -1$

معادلة له مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

(ب) حساب $f'(x)$ بدلالة x : الدالة f تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل عدد حقيقي

$x \in D_f$ لدينا :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 2x^2)}{(x+1)^4}$$

أي $f'(x) = \frac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3}$ أي $f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x+1) - 2(x^3 + 2x^2)}{(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x+1)^3}$

دراسة إشارة الدالة المشتقة :

من أجل $x \neq -1$ نضع : $f'(x) = 0$ تكافئ $\frac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3} = 0$ تكافئ $x(x^2 + 3x + 4) = 0$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

تكافئ $x=0$ أو $x^2+3x+4=0$ حيث $\Delta=(3)^2-4(1)(4)=-7<0$ و بالتالي المعادلة

$x^2+3x+4=0$ لا تقبل حلولاً حقيقية و من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -1$ يكون $x^2+3x+4>0$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x				
$(x+1)^3$	-	0	+	+
x^2+3x+4	+	+	+	+
$f'(x)$	+	-	0	+

إذا كان $x \in]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$ فإن $f'(x) \geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماماً على كل

من المجالين $]-\infty, -1[$ و $[0, +\infty[$.

إذا كان $x \in]-1, 0]$ فإن الدالة $f'(x) \leq 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماماً على المجال

$]-1, 0]$.

(ج) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

2- تعيين الأعداد الحقيقية α ، β و γ حيث من أجل كل عدد $x \in D_f$:

$$f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

نكتب : $f(x) = \frac{\alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma}{(x+1)^2} = \frac{\alpha x^3 + 2\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta + \gamma}{(x+1)^2}$ و بالمطابقة

مع العبارة $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$ نتحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \\ \beta = -\alpha \\ \gamma = -\beta \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 :

$$f(x) = x - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

3- نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له :

نكتب : $f(x) = x + k(x)$ حيث $k(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$ ، من الواضح أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} k(x) = 0$

إذن نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$.

4- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المقارب المائل (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y]$ حيث $f(x) - y = x - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - x = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}$

أي $f(x) - y = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2} = -\frac{x}{(x+1)^2}$ حيث من أجل كل عدد $x \neq -1$ فإن $(x+1)^2 > 0$

و بالتالي إشارة الفرق هي من إشارة $-x$:

إذا كان $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$ فإن $x < 0$ و بالتالي $-x \geq 0$ إذن يكون $f(x) - y > 0$ و منه

ينتج أن المنحنى (C_f) يقع فوق المقارب المائل (Δ) .

إذا كان $x \in]0, +\infty[$ فإن $x > 0$ و بالتالي $-x < 0$ إذن يكون $f(x) - y < 0$ و منه ينتج أن

المنحنى (C_f) يقع تحت المقارب المائل (Δ) .

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

إذا كان $x=0$ فإن $f(x)-y=-\frac{0}{(x+1)^2}=0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم

المقارب المائل (Δ) في مبدأ المعلم $O(0;0)$.

5- إيجاد إحداثيي نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل (xx') :

فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل تمثل حسابيا حلول المعادلة $f(x)=0$:

$$f(x)=0 \text{ تكافئ } \frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}=0 \text{ تكافئ } x^3+2x^2=0 \text{ مع } x \neq -1 \text{ تكافئ } x^2(x+2)=0 \text{ مع } x \neq -1$$

و منه حلول المعادلة $f(x)=0$ هي $S=\{0,-2\}$.

المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل (xx') في المبدأ $O(0;0)$ و النقطة $A(-2;0)$.

6- نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 مع كتابة معادلة له :

المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 معناه المعادلة $f'(x)=1$ تقبل على الأقل حلا في

$$\mathbb{R}-\{-1\} \text{ حيث } f'(x)=1 \text{ تكافئ : } \frac{x^3+3x^2+4x}{(x+1)^3}=1 \text{ تكافئ}$$

$$x^3+3x^2+4x=x^3+3x^2+3x+1 \text{ مع } x \neq -1 \text{ تكافئ } 4x=3x+1 \text{ تكافئ } \boxed{x=1}$$

إذن المعادلة $f'(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}-\{-1\}$ و المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1

عند النقطة ذات الفاصلة 1.

معادلة المماس (T) : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث $f'(1)=1$ و $f(1)=\frac{3}{4}$: إذن :

$$\boxed{(T): y=x-\frac{1}{4}}$$

8- نعتبر الدالة العددية g المعرفة بـ :

$$g(x)=f(-|x|)$$

(أ) تحديد مجموعة تعريف الدالة g :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد $x \in D_g$ فإن $-|x| \in D_f$ أي يكون $x \in D_g$ إذا كان

$$D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\} : \text{و بالتالي نستنتج أن } x \neq -1 \text{ و } x \neq 1 \text{ أي } |x| \neq 1 \text{ أي } -|x| \neq -1$$

(ب) شرح كيفية إنشاء (C_g) إنطلاقا من (C_f) :

إذا كان $x \leq 0$ أي $x \in]-\infty, 0]$ فإن $|x| = -x$ و عليه $-|x| = x$ و بالتالي نستنتج أنه من أجل كل

$$x \leq 0 \text{ فإن } g(x) = f(x) \text{ و بالتالي } (C_g) \text{ ينطبق على } (C_f) \text{ لما } x \in]-\infty, 0]$$

يمكن بسهولة إثبات أن الدالة g هي دالة زوجية و ذلك لأن : $D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ متناظرة بالنسبة إلى

$$\text{الصفر لأن } x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \text{ معناه } x \neq -1 \text{ إذن } -x \neq 1 \text{ و } x \neq 1 \text{ إذن } -x \neq -1 \text{ أي } -x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

و من أجل كل $x \in D_g$: $g(-x) = f(-|x|) = f(-|x|) = g(x)$ لأن من خواص القيمة المطلقة لعدد

حقيقي x نعلم أن $-x = |x|$ و بالتالي نستنتج أن الدالة g هي دالة زوجية .

إذن بما أن الدالة g زوجية فإنه إذا كان $x \geq 0$ يكون (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب .

(ج) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) - x - 2m - 1 = 0$

تكافئ $f(x) = x + 2m + 1$ و بالتالي حلول المعادلة $f(x) = x + 2m + 1$ بيانيا تمثل فواصل نقط

تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المائل الذي $y = x + 2m + 1$ معادلة له (نوع المناقشة ماثلة)

حيث أن جميع المستقيمات التي لها معادلة من الشكل $y = x + 2m + 1$ توازي المقارب المائل (Δ) و كذلك

التماس (T) لأن لها نفس معامل التوجيه 1 .

إذا كان $2m + 1 = -\frac{1}{4}$ أي $m = -\frac{5}{8}$ فإن المستقيم الذي $y = x - \frac{1}{4}$ معادلة له و هو التماس

(T) يقطع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة ذات الفاصلة 1 (نقطة التماس) و بالتالي المعادلة

$$f(x) = x + 2m + 1 \text{ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما هو } x_0 = 1 .$$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

إذا كان $2m+1=0$ أي $m=-\frac{1}{2}$ فإن المستقيم الذي $y=x$ معادلة له و هو المقارب المائل (Δ)

يقطع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة هي مبدأ المعلم ذات الفاصلة 0 و بالتالي المعادلة

$$f(x) = x + 2m + 1 \text{ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل معدوم هو } x_1 = 0.$$

إذا كان $-1/4 < 2m+1 < 0$ أي $-5/8 < m < -1/2$ أي $m \in]-\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}[$ فإن المستقيم الذي

$y = x + 2m + 1$ معادلة له يقطع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي

$$\text{المعادلة } f(x) = x + 2m + 1 \text{ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .}$$

إذا كان $2m+1 < -1/4$ أي $m < -5/8$ أي $m \in]-\infty, -5/8[$ فإن المستقيم الذي $y = x + 2m + 1$

معادلة له لا يتقاطع مع المنحنى (C_f) و بالتالي المعادلة $f(x) = x + 2m + 1$ لا تقبل حولا .

إذا كان $2m+1 > 0$ أي $m > -1/2$ أي $m \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$ فإن المستقيم الذي $y = x + 2m + 1$

معادلة له يقطع المنحنى (C_f) في نقطتين مختلفتين فاصلة كل منهما عدد سالب و بالتالي المعادلة

$$f(x) = x + 2m + 1 \text{ تقبل حلين متمايزين سالبين تماما .}$$

9- المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$:

حلول المعادلة $f(x) = f(m)$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الأفقي الموازي

لحامل محور الفواصل الذي $y = f(m)$ معادلة له (نوع المناقشة أفقية) .

إذا كان $f(m) = 0$ أي $m = 0$ أو $m = -2$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y = 0$

معادلة له (حامل محور الفواصل) في نقطتين مختلفتين الأولى ذات الفاصلة $x_0 = 0$ و الثانية ذات

الفاصلة $x_1 = -2$ ، إذن المعادلة $f(x) = f(m)$ تقبل حلين متمايزين أحدهما معدوم و الآخر سالب

تماما .

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

إذا كان $f(m) < 0$ أي $m \in]-\infty, -2[$ فإن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم الذي $y = f(m)$

معادلة له في نقطة وحيدة ذات فاصلة سالبة تماما ، إذن المعادلة $f(x) = f(m)$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل سالب تماما .

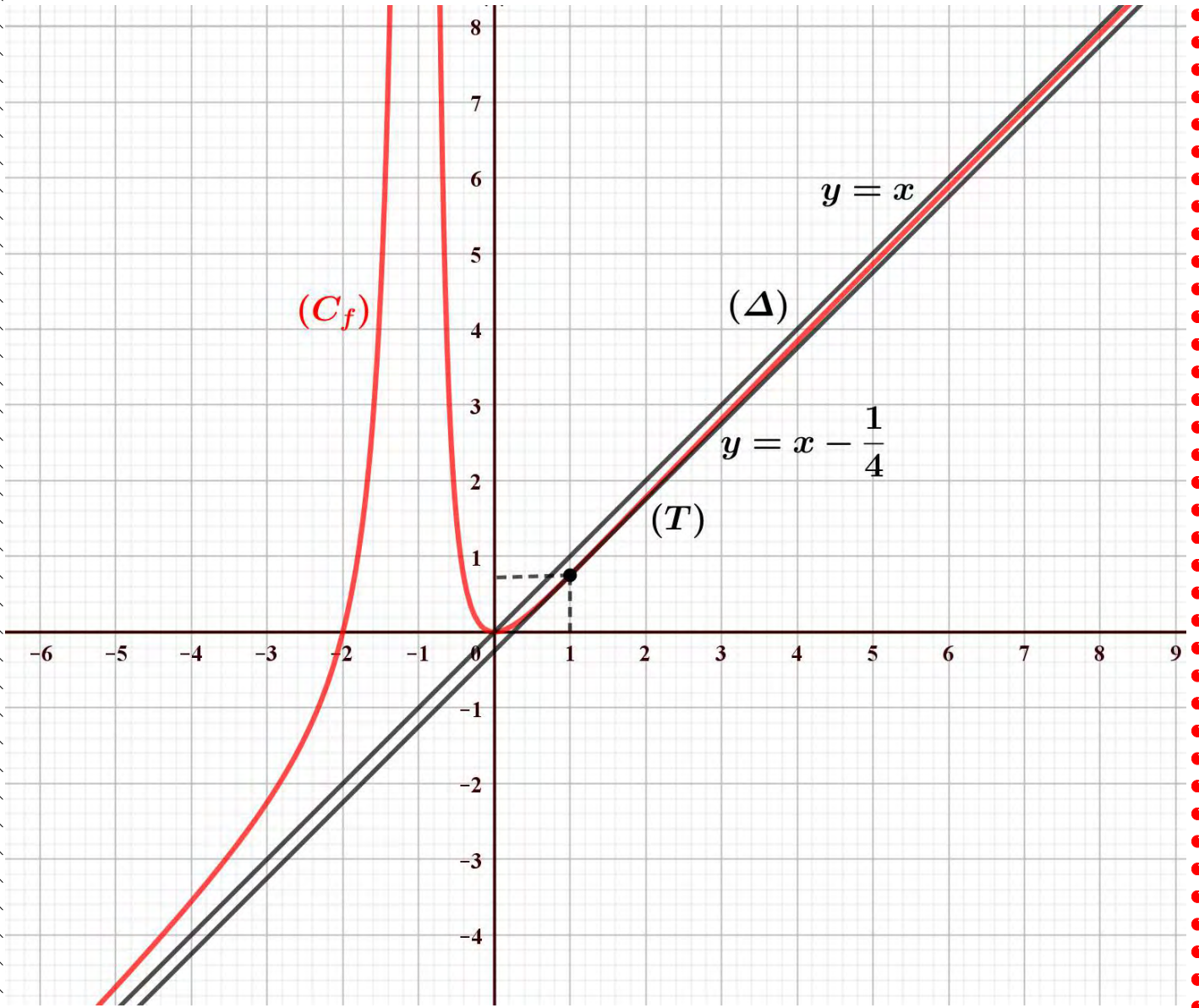
إذا كان $f(m) > 0$ أي $m \in]-2, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ فإن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم

الذي $y = f(m)$ معادلة له في ثلاث نقط مختلفة ، نقطتان كل منهما ذات فاصلة سالبة تماما و الأخرى

ذات فاصلة موجبة تماما ، إذن المعادلة $f(x) = f(m)$ تقبل ثلاث حلول متمايضة مثنى مثنى ؛ حلان

إشارتهما سالبة تماما و الحل الآخر موجب تماما .

كتابة الأستاذ : حناش نبيل



انتهى على التمرين ...



الرياضيات في الثانوية - Mathematics for all



دالة مع مناقشة وسيطية أفقية

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x-2} \quad : \mathbb{R} - \{2\}$$

نرمز بـ (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أدرس تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها .

2- أ) برر أن المستقيم (D) الذي $y = x + 3$ معادلة له هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل (D) .

ج) تحقق أنه من أجل كل $x \in D_f$ فإن $4 - x \in D_f$ ؛ ثم بين أن $f(4 - x) + f(x) = 10$. ماذا تستنتج ؟

د) أرسم المستقيم (D) و أنشئ المنحنى (C_f) .

3) ناقش بياننا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :



$$x^2 + (1 - m)x + 2m = 0$$

4) إستنتج حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة :



$$\theta \in [0, 2\pi[, \cos(2\theta) + 2(1 - m)\cos\theta + 4m + 1 = 0$$



الرياضيات في الثانوية - Mathematics for all



1- دراسة تغيرات الدالة f :

✓ حساب نهاية الدالة عند أطراف مجموعة التعريف :

نعلم أن نهاية دالة ناطقة بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$ تساوي إلى نهاية الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام و بالتالي نتحصل على :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

✓ من أجل إيجاد نهاية الدالة f لما يؤول x إلى 2 سواء بقيم أصغر أو بقيم أكبر ندرس إشارة المقام :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
إشارة $x-2$	-	0	+

إذن لما $x \xrightarrow{<} 2$ فإن $x-2 \rightarrow 0^-$ و لما $x \xrightarrow{>} 2$ فإن $x-2 \rightarrow 0^+$ و بالتالي نتحصل على :

$$\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{6}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{6}{x-2} = +\infty \end{cases}$$

✓ f تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x) \times 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$$

✓ إشارة الدالة المشتقة : من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ فإن $(x-2)^2 > 0$ ؛ و بالتالي إشارة $f'(x)$ من

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-2) = 24 > 0 : x^2 - 4x - 2 \text{ إشارة ثلاثي الحدود}$$

إذن ثلاثي الحدود $x^2 - 4x - 2$ يقبل جذرين متمايزين هما : $x_1 = \frac{4 + \sqrt{24}}{2} = 2 + \sqrt{6}$ و

$x_2 = \frac{4 - \sqrt{24}}{2} = 2 - \sqrt{6}$ و تكون إشارة ثلاثي الحدود $x^2 - 4x - 2$ كما في الجدول الآتي :

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{6}$	$2 + \sqrt{6}$	$+\infty$
إشارة $x^2 - 4x - 2$	+	0	0	+

على المجالين $]-\infty, 2 - \sqrt{6}[$ و $]2 + \sqrt{6}, +\infty[$ تكون $f'(x) \geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما

على كل من المجالين $]-\infty, 2 - \sqrt{6}[$ و $]2 + \sqrt{6}, +\infty[$.

على المجالين $]2 - \sqrt{6}, 2[$ و $]2, 2 + \sqrt{6}[$ تكون $f'(x) \leq 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما

على كل من المجالين $]2 - \sqrt{6}, 2[$ و $]2, 2 + \sqrt{6}[$.

✓ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{6}$	2	$2 + \sqrt{6}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$5 - 2\sqrt{6}$		$+\infty$	$5 + 2\sqrt{6}$	$+\infty$

التفسير الهندسي : بما أن $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم الذي $x = 2$

معادلة له هو مقارب عمودي (موازي لحامل محور الترتيب) للمنحنى (C_f) .

2- أ) تبرير أن المستقيم (D) الذي $y = x + 3$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $\mp\infty$:

يكفي أن نثبت أن : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+3)] = 0$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{x(x+1)}{x-2} - (x+3) \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + x - x^2 + 2x - 3x + 6}{x-2} \right]$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{6}{x-2} = 0$$

مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$.

(ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المقارب (D) :

$$f(x) - (x+3) = \frac{6}{x-2} \quad : \text{ فإن } x \neq 2 \text{ حقيقي}$$

إذن إشارة الفرق $[f(x) - (x+3)]$ من إشارة المقام $x-2$ مع $x \neq 2$.

إذا كان $x < 2$ فإن $x-2 < 0$ و بالتالي يكون $[f(x) - (x+3)] < 0$ ؛ إذن نستنتج أن المنحنى

(C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) .

إذا كان $x > 2$ فإن $x-2 > 0$ و بالتالي يكون $[f(x) - (x+3)] > 0$ ؛ إذن نستنتج أن المنحنى

(C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) .

بما أن الفرق $[f(x) - (x+3)]$ لا يعدم من أجل كل قيمة للمتغير x فإن المنحنى (C_f) لا يتقاطع مع

المستقيم المقارب المائل (D) .

(ج) من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ فإن $x \neq 2$ و عليه يكون $-x \neq -2$ أي $4-x \neq 4-2$ أي $4-x \neq 2$ و

عليه فإن $4-x \in D_f$ ؛ و من أجل كل عدد $x \in D_f$:

$$f(4-x) + f(x) = \frac{(4-x)(4-x+1)}{4-x-2} + \frac{x(x+1)}{x-2} = \frac{x^2 - 9x + 20}{2-x} + \frac{x^2 + x}{x-2}$$

$$f(4-x) + f(x) = \frac{-x^2 + 9x - 20}{x-2} + \frac{x^2 + x}{x-2} = \frac{10x - 20}{x-2} = \frac{10(x-2)}{x-2}$$

(من الشكل $f(2a-x) + f(x) = 2b$ حيث $a = 2$ ، $b = 5$) $f(4-x) + f(x) = 10 = 2 \times 5$

نبيذ: النقطة Ω ذات الإحداثيات $(2;5)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

3- المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$x^2 + (m-1)x + 2m = 0$$

إذا كان $x = 2$ نتحصل على : $4 + 2(1-m) + 2m = 0$ أي $6 - 2m + 2m = 0$ أي $6 = 0$

تتناقض و بالتالي المعادلة $x^2 + (1-m)x + 2m = 0$ ليس لها حلول .

إذا كان $x \neq 2$: دائما في هذا النوع من المعادلات نبحث أولا عن إظهار عبارة $f(x)$ عن طريق مجموعة

من العمليات الجبرية البسيطة كما يلي :

$$x^2 + (m-1)x + 2m = 0 \text{ تكافئ } x^2 + x - mx = -2m \text{ تكافئ } x^2 + x = mx - 2m \text{ تكافئ}$$

$x(x+1) = m(x-2)$ و بما أن $x \neq 2$ نقسم طرفي المعادلة الأخيرة على $x-2$ لننتحصل على المعادلة :

$$\boxed{\frac{x(x+1)}{x-2} = m} \text{ تكافئ } \boxed{f(x) = m}$$

حلول المعادلة $f(x) = m$ بيانيا تمثل فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الأفقي الموازي

لحامل محور الفواصل الذي $y = m$ معادلة له (نوع المناقشة أفقية) .

إذا كان $m = 0$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الذي $y = 0$ معادلة له (محور الفواصل)

في نقطتين مختلفتين فاصلتهما 0 و -1 ؛ إذن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين متمايزين 0 و -1 .

إذا كان $0 < m < 5 - 2\sqrt{6}$ أي $m \in]0, 5 - 2\sqrt{6}[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الأفقي

الذي $y = m$ معادلة له في نقطتين مختلفتين ؛ إذن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين متمايزين .

إذا كان $m = 5 - 2\sqrt{6}$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الأفقي الذي $y = 5 - 2\sqrt{6}$ معادلة له في

نقطة وحيدة ذات الفاصلة $x_1 = 2 - \sqrt{6}$ و بالتالي المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا هو $x_1 = 2 - \sqrt{6}$.

إذا كان $5 - 2\sqrt{6} < m < 5 + 2\sqrt{6}$ أي $m \in]5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6}[$ فإنه لا توجد نقاط تقاطع بين

المنحنى (C_f) و المستقيم الأفقي الذي $y = m$ معادلة له و بالتالي المعادلة $f(x) = m$ لا تقبل حولا .

إذا كان $m = 5 + 2\sqrt{6}$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الأفقي الذي $y = 5 + 2\sqrt{6}$ معادلة له في

نقطة وحيدة ذات الفاصلة $x_2 = 2 + \sqrt{6}$ و بالتالي المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا هو $x_2 = 2 + \sqrt{6}$.

إذا كان $m > 5 + 2\sqrt{6}$ أي $m \in]5 + 2\sqrt{6}, +\infty[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الأفقي الذي

$y = m$ معادلة له في نقطتين مختلفتين و بالتالي المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين متمايزين .

إذا كان $m < 0$ أي $m \in]-\infty, 0[$ فإن المنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم الأفقي الذي $y = m$ في

نقطتين مختلفتين و بالتالي المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين متمايزين .

4- إستنتاج عدد حلول المعادلة حسب قيم الوسيط الحقيقي m :

$$\theta \in [0, 2\pi[, \cos(2\theta) + 2(1-m)\cos\theta + 4m + 1 = 0$$

نعلم أنه من أجل كل عدد $\theta \in [0, 2\pi[$: $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ ؛ إذن المعادلة أعلاه تكافئ :

$$2\cos^2 \theta - 1 + 2\cos \theta - 2m\cos \theta + 4m + 1 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \cos^2 \theta + \cos \theta - m\cos \theta + 2m = 0$$

تكافئ $\cos \theta [\cos \theta + 1] = m [\cos \theta - 2]$ حيث $\cos \theta - 2 \neq 0$ من أجل كل عدد $\theta \in [0, 2\pi[$ لأن

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$ من أجل كل عدد حقيقي $\theta \in [0, 2\pi[$ ؛ إذن بقسمة طرفي المعادلة الأخيرة على

$$\cos \theta - 2 \quad \text{نتحصل على المعادلة :} \quad \boxed{\frac{\cos \theta (\cos \theta + 1)}{\cos \theta - 2} = m} \quad \text{تكافئ} \quad \boxed{f(\cos \theta) = m}$$

$\theta \in [0, 2\pi[$.

نضع $\cos \theta = y$ ($-1 \leq y \leq 1$) ؛ إذن المعادلة $f(\cos \theta) = m$ تصبح من الشكل : $f(y) = m$.

نستعمل الآن نتائج المناقشة البيانية في السؤال السابق :

إِذَا كَانَ $m=0$ فَإِنَّ $f(y)=m$ تقبل الحلين $y=0$ و $y=-1$...

المعادلة $\cos \theta = 0$ تقبل بالضبط حلين في المجال $[0, 2\pi[$ هما $\theta_1 = \pi/2$ و $\theta_2 = 3\pi/2$

المعادلة $\cos \theta = -1$ تقبل بالضبط حلاً وحيداً في المجال $[0, 2\pi[$ هو $\theta_3 = \pi$

و بالتالي إِذَا كَانَ $m=0$ المعادلة $f(\cos \theta) = m$ تقبل 3 حلول هي $\{\pi/2, 3\pi/2, \pi\}$

إِذَا كَانَ $0 < m < 5 - 2\sqrt{6}$ أي $m \in]0, 5 - 2\sqrt{6}[$ فَإِنَّ المعادلة $f(y) = m$ تقبل حلين

متمايزين كل منهما محصور بين -1 و 0 نرسم لهما y_1 و y_2 ...

كل من المعادلتين $\cos \theta = y_1$ و $\cos \theta = y_2$ تقبل حلين متمايزين في المجال $[0, 2\pi[$ ؛ إِذْ

المعادلة $f(\cos \theta) = m$ تقبل (4) حلول متمايزة في المجال $[0, 2\pi[$.

إِذَا كَانَ $m = 5 - 2\sqrt{6}$ فَإِنَّ المعادلة $f(y) = m$ تقبل حلاً وحيداً و هو $y_0 = 2 - \sqrt{6}$ محصور

بين -1 و 0 ...

المعادلة $\cos \theta = y_0$ تقبل حلين متمايزين في المجال $[0, 2\pi[$ ؛ إِذْ المعادلة $f(\cos \theta) = m$ تقبل

حلين متمايزين في المجال $[0, 2\pi[$.

إِذَا كَانَ $5 - 2\sqrt{6} < m < 5 + 2\sqrt{6}$ أي $m \in]5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6}[$ فَإِنَّ المعادلة $f(y) = m$

لا تقبل حلولاً و بالتالي المعادلة $f(\cos \theta) = m$ لا تقبل حلولاً في المجال $[0, 2\pi[$.

إِذَا كَانَ $m = 5 + 2\sqrt{6}$ فَإِنَّ المعادلة $f(y) = m$ تقبل حلاً وحيداً و هو $y_1 = 2 + \sqrt{6}$ لا ينتمي

إلى المجال $[-1, 1]$...

المعادلة $\cos \theta = y_1$ لا تقبل حلولاً ؛ إِذْ المعادلة $f(\cos \theta) = m$ لا تقبل حلولاً في المجال $[0, 2\pi[$.

إِذَا كَانَ $m > 5 + 2\sqrt{6}$ أي $m \in]5 + 2\sqrt{6}, +\infty[$ فَإِنَّ المعادلة $f(y) = m$ تقبل حلين

متمايزين y_1 ، y_2 كل منهما أكبر تماماً من 2 و بالتالي لا ينتميان إلى المجال $[-1, 1]$...

المعادلتان $\cos \theta = y_1$ و $\cos \theta = y_2$ لا تقبلان حلولاً ؛ إِذْ المعادلة $f(\cos \theta) = m$ لا تقبل حلولاً في

المجال $[0, 2\pi[$.

إِذَا كَانَ $-2 < m < 0$ أَيْ $m \in]-2, 0[$ فَإِنَّ الْمَعَادِلَةَ $f(y) = m$ تَقْبَلُ حَلَيْنِ مُتَمَايِزَيْنِ أَحَدُهُمَا

مَحْصُورٌ بَيْنَ 0 وَ 1 وَ الْآخَرُ أَصْغَرُ تَمَامًا مِنْ -1 نَرْمِزُ لَهُمَا عَلَى التَّرْتِيبِ بِـ y_1 وَ $y_2 \dots$

الْمَعَادِلَةُ $\cos \theta = y_1$ تَقْبَلُ حَلَيْنِ مُتَمَايِزَيْنِ فِي الْمَجَالِ $[0, 2\pi[$ أَمَّا الْمَعَادِلَةُ $\cos \theta = y_2$ لَا تَقْبَلُ حُلُولًا

لِأَنَّ $y_2 \notin [-1, 1]$ ؛ إِذْ الْمَعَادِلَةُ $f(\cos \theta) = m$ تَقْبَلُ حَلَيْنِ مُتَمَايِزَيْنِ فِي الْمَجَالِ $[0, 2\pi[$.

إِذَا كَانَ $m = -2$: الْمَعَادِلَةُ $f(y) = m$ تَقْبَلُ حَلَيْنِ مُتَمَايِزَيْنِ أَحَدُهُمَا $y_1 = 1$ وَ الْآخَرُ y_2 لَا

يَنْتَمِي إِلَى الْمَجَالِ $[-1, 1]$...

الْمَعَادِلَةُ $\cos \theta = y_1$ تَقْبَلُ حَلًّا وَحِيدًا فِي الْمَجَالِ $[0, 2\pi[$ وَ هُوَ $\theta = 0$ أَمَّا الْمَعَادِلَةُ $\cos \theta = y_2$ لَا

تَقْبَلُ حُلُولًا لِأَنَّ $y_2 \notin [-1, 1]$ ؛ إِذْ الْمَعَادِلَةُ $f(\cos \theta) = m$ تَقْبَلُ حَلًّا وَحِيدًا فِي الْمَجَالِ $[0, 2\pi[$ هُوَ

$\theta = 0$.

إِذَا كَانَ $m < -2$ أَيْ $m \in]-\infty, -2[$: الْمَعَادِلَةُ $f(y) = m$ تَقْبَلُ حَلَيْنِ مُتَمَايِزَيْنِ أَحَدُهُمَا

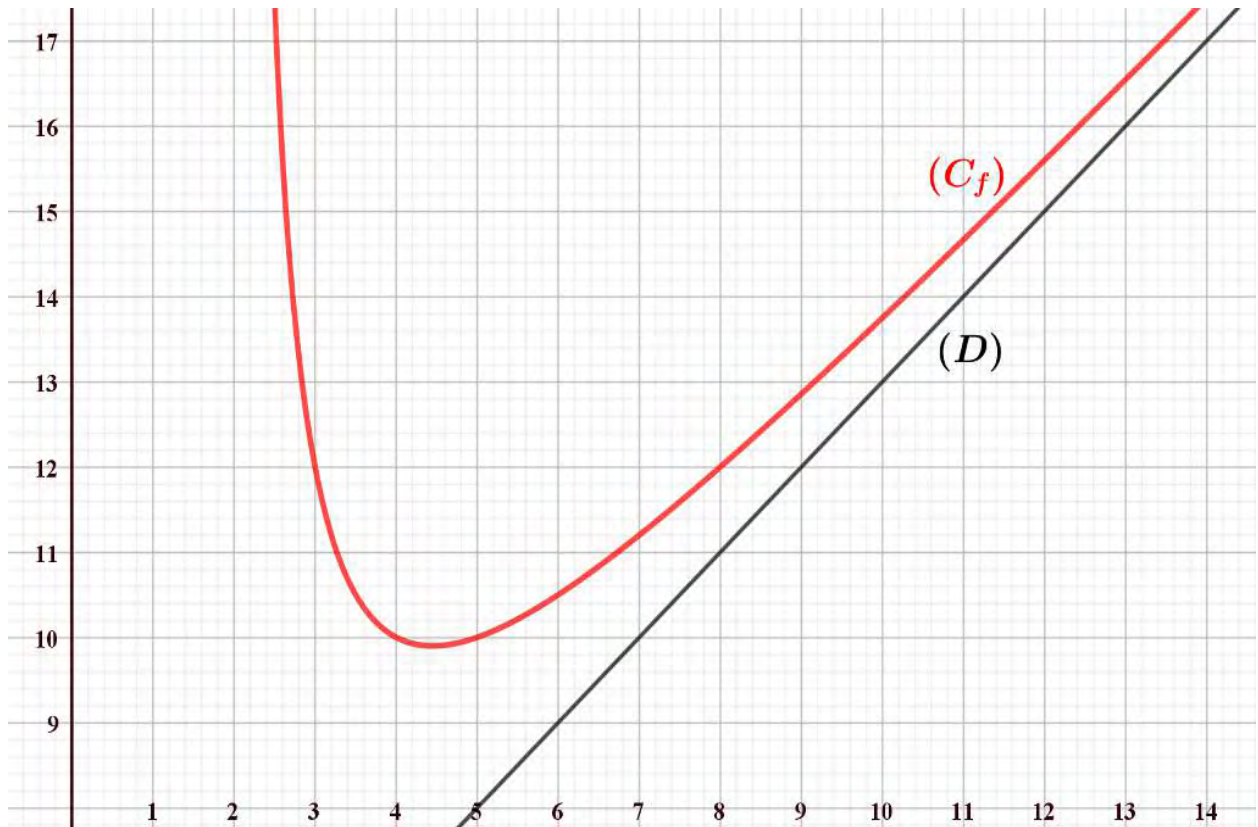
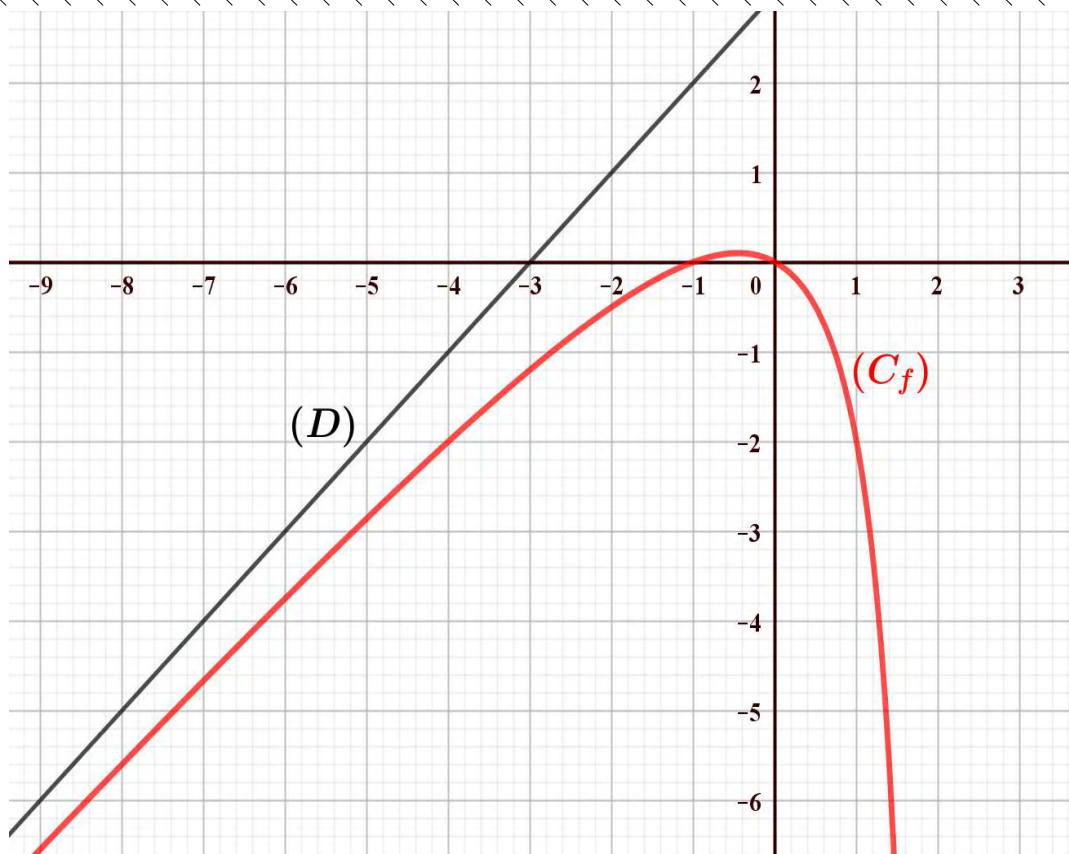
$y_1 > 1$ وَ الْآخَرُ $y_2 < -1$...

الْمَعَادِلَتَا $\cos \theta = y_1$ وَ $\cos \theta = y_2$ لَا تَقْبَلَانِ حُلُولًا ؛ إِذْ الْمَعَادِلَةُ $f(\cos \theta) = m$ لَا تَقْبَلُ حُلُولًا فِي

الْمَجَالِ $[0, 2\pi[$.

التَّمثِيلُ الْبَيَانِي (C_f) غَيْرُ مُتَنَاسِبٍ مَعَ أبعادِ الصَّفْحَةِ ، لِذَا حَتَّى يَظْهَرَ كَامِلًا نَقُومُ بِعَرْضِ جُزْئِهِ

السُّفْلِيِّ وَ جُزْئِهِ الْعُلَوِيِّ بِشَكْلِ مُنْفَصِلٍ عَنْ بَعْضِهِمَا الْبَعْضُ .



انتهى عمل القمص...

الرياضيات في الثانوية - Mathematics for all



دراسة دالة عددية :

الجزء الأول :

الف الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) حدد نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة ذات الفاصلة -1 ؟ و كذلك بالنسبة للنقطة ذات الفاصلة 1 .

(4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(5) أوجد الأعداد الحقيقية α ، β و γ حيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{3x^2+1}$

(6) بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$ ثم فسر النتائج هندسياً.

(7) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي $y = x - 3$ معادلة له.

(8) أرسم (T) ، (Δ) و أنشئ (C_f) .

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{3(\sin x - 1)^3}{3\sin^2 x + 1}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أثبت أن الدالة g دورية و دورها هو 2π .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x) = \cos x \times f'(\sin x)$

(3) أدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $[-\pi, \pi]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) اشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) ثم أنشئه.

صفحة : - الرياضيات في الثانوية -

حل مقترح لتمرين دراسة دالة عددية :

الجزء الأول :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تحديد نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

f هي دالة ناطقة و نعلم أن نهاية دالة ناطقة عند $\pm\infty$ تساوي إلى نهاية حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

الدالة f هي نسبة دالتين $x \mapsto 3(x-1)^3$ و $x \mapsto 3x^2+1$ تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن $3x^2+1 \neq 0$ و منه f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$f'(x) = \frac{3 \times 3(x-1)^2(3x^2+1) - 3(x-1)^3(6x)}{(3x^2+1)^2} = \frac{9(x-1)^2(3x^2+1) - 18x(x-1)^3}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9(x-1)^2(x^2+2x+1)}{(3x^2+1)^2} \text{ أي } f'(x) = \frac{9(x-1)^2[(3x^2+1) - 2x(x-1)]}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9(x-1)^2(x+1)^2}{(3x^2+1)^2}$$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) \geq 0$ حيث $f'(x) = 0$ إذا و فقط إذا كان

$9(x-1)^2(x+1)^2 = 0$ أي إذا و فقط إذا كان $x = -1$ أو $x = 1$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-6	0	$+\infty$

الإستنتاج : نلاحظ أن الدالة المشتقة الأولى f' تنعدم عند النقطة ذات الفاصلة $x = -1$ و لا تغير من إشارتها و كذلك تنعدم عند النقطة ذات الفاصلة $x = +1$ و لا تغير من إشارتها و بالتالي فإن كل من النقطة ذات الفاصلة $x = -1$ و النقطة ذات الفاصلة $x = +1$ هي نقطة انعطاف لمنحني الدالة f .

(4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$f'(0) = \frac{9(0-1)^2(0+1)^2}{(3(0)^2+1)^2} = 9 \text{ حيث } (T): y = f'(0)(x-0) + f(0) \text{ و } f(0) = -3 \text{ و منه}$$

$$(T): y = 9x - 3$$

(5) إيجاد الأعداد الحقيقية α ، β و γ حيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{3x^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{(\alpha x + \beta)(3x^2 + 1) + \gamma x}{3x^2 + 1} = \frac{3\alpha x^3 + 3\beta x^2 + (\alpha + \gamma)x + \beta}{3x^2 + 1} \text{ بتوحيد المقامات نجد :}$$

$$\text{و بالمطابقة مع العبارة : } f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2 + 1} = \frac{3x^3 - 9x^2 + 9x - 3}{3x^2 + 1} \text{ ينتج : } \begin{cases} 3\alpha = 3 \\ 3\beta = -9 \\ \alpha + \gamma = 9 \\ \beta = -3 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\text{إذن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ فإن : } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \\ \gamma = 8 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \\ 1 + \gamma = 9 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = x - 3 + \frac{8x}{3x^2 + 1}$$

(6) نبين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8x}{3x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{3x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x}{3x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{3x} = 0 \end{cases}$$

من السؤال السابق نجد :

التفسير الهندسي (البياني) : المستقيم (Δ) الذي $y = x - 3$ معادلة له مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$.

(7) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي $y = x - 3$ معادلة له :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ أي إشارة المقدار $\frac{8x}{3x^2+1}$ حسب قيم x :

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $3x^2 + 1 > 0$ و بالتالي إشارة الفرق من إشارة x :

✚ إذا كان $x = 0$ فإن $f(x) - y = \frac{8x}{3x^2+1} = 0$ و منه فالمنحنى (C_f) يتقاطع مع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

✚ إذا كان $x > 0$ فإن $f(x) - y = \frac{8x}{3x^2+1} > 0$ و منه فالمنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]0, +\infty[$.

✚ إذا كان $x < 0$ فإن $f(x) - y = \frac{8x}{3x^2+1} < 0$ و منه فالمنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على المجال $] -\infty, 0[$.

و منه المستحسن أن نلخص النتائج في جدول .

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{3(\sin x - 1)^3}{3\sin^2 x + 1}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) إثبات أن الدالة g دورية و دورها هو 2π :

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x+2\pi) = \frac{3(\sin(x+2\pi)-1)^3}{3\sin^2(x+2\pi)+1} = \frac{3(\sin x-1)^3}{3\sin^2 x+1} = g(x)$

لأن الدالة $\sin$ دورية و دورها هو 2π فيكون من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+2\pi) = \sin x$ و كذلك

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$\sin^2(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) \times \sin(x+2\pi) = \sin x \times \sin x = \sin^2 x$$

(2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x) = \cos x \times f'(\sin x)$

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) = f(\sin x)$ أي أن الدالة g هي مركب الدالة $\sin x$ متبوعة بالدالة f حيث أن كل من الدالتين $\sin$ و f تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و حسب مبرهنة الاشتقاق لدالة مركبة فإنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x) \quad \text{تذكير :} \quad g'(x) = \cos x \times f'(\sin x)$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $[-\pi, \pi]$ ثم تشكيل جدول تغيراتها :

بوضع $g'(x) = 0$ نجد : $\cos x \times f'(\sin x) = 0$ يكافئ $\cos x = 0$ أو $f'(\sin x) = 0$

$\cos x = 0$ يكافئ $x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = -\frac{\pi}{2}$ على المجال $[-\pi, \pi]$.

$f'(\sin x) = 0$ و حسب جدول إشارة f' فإن $\sin x = -1$ أي $x = \frac{\pi}{2}$ أو $\sin x = 1$ أي $x = -\frac{\pi}{2}$

و منه نستنتج أن $g'(x) = 0$ إذا و فقط إذا كان $x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = -\frac{\pi}{2}$

إذا كان $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ فإن $\cos x \leq 0$ و $-1 \leq \sin x \leq 1$ و نعلم أن f' موجبة على

المجال $[-1, 1]$ و منه $f'(\sin x) \geq 0$ و بالتالي $g'(x) \leq 0$ ، إذن الدالة g متناقصة تماما على

المجال $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ و كذلك على المجال $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

إذا كان $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\cos x \geq 0$ و $-1 \leq \sin x \leq 1$ و نعلم أن f' موجبة على المجال

$[-1, 1]$ و منه $f'(\sin x) \geq 0$ و بالتالي $g'(x) \geq 0$ ، إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-\pi, \pi]$:

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

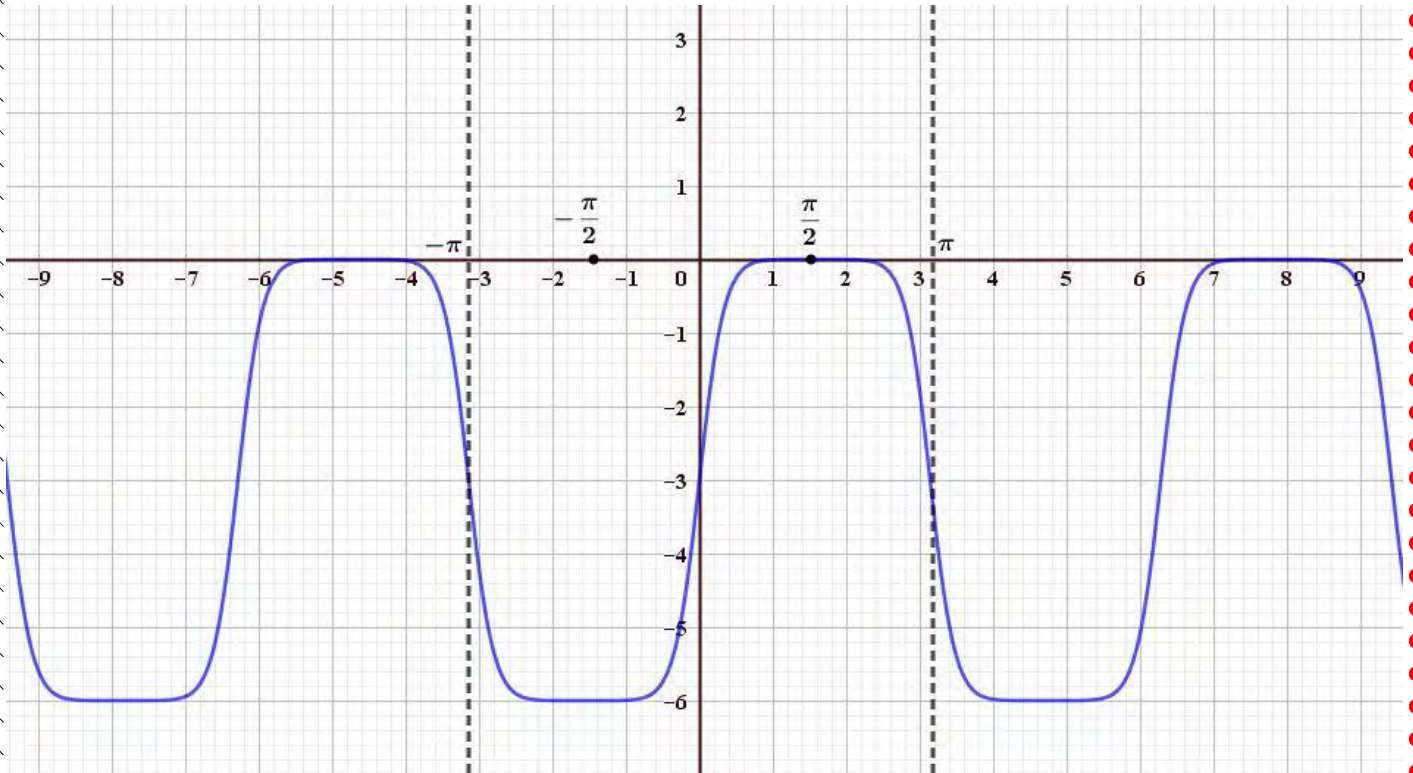
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	—	0	+	—
$g(x)$	—3	—6	0	—3

(4) شرح كيف يمكن إنشاء (C_g) :

إنطلاقاً من جدول تغيرات الدالة g ننشئ المنحني (C_g) على المجال $[-\pi, \pi]$ علماً أن الدالة g تقبل قيمة

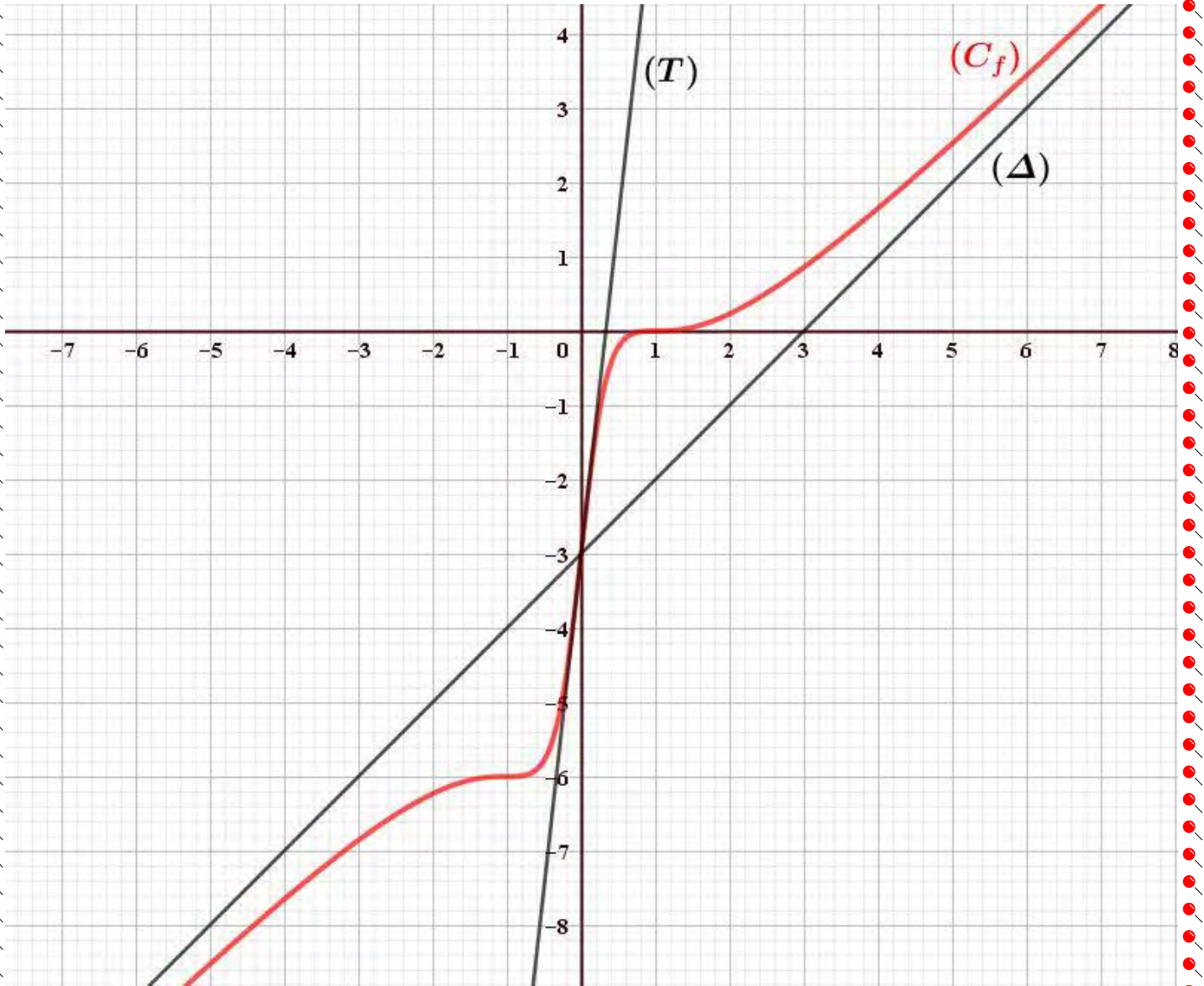
حدية صغرى هي -6 من أجل $x = -\frac{\pi}{2}$ و تقبل قيمة حدية عظمى هي 0 من أجل $x = \frac{\pi}{2}$.

و علماً أن الدالة g دورية و دورها 2π فإنه يمكن إكمال إنشاء المنحني (C_g) على $\mathbb{R}$ إنطلاقاً من إجراء انسحابات متتالية أشعتها $2k\pi i$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.



ملاحظة : الدالة g ليست ثابتة على بعض المجالات في التمثيل البياني أعلاه ، إنما يبدو ذلك فقط بالعين

المجردة لتقارب الصور بعضها من بعض في تلك المجالات .



انتهى عمل القلم...