

المسألة رقم 01 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ يكون :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1}$$

(2) عين الدالتين u و v بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ يكون : $f(x) = (v \circ u)(x)$

(3) إستنتج إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $]-1, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) برهن أن النقطة $\Omega(-1; 3)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_f) .

(5) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = |f(x)|$

أ- أكتب عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة .

ب- إشرح كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني (C_g) للدالة g إنطلاقاً من التمثيل البياني (C_f) للدالة f .

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $h(x) = f(|x|)$

أ- عين مجموعة تعريف الدالة h .

ب- أثبت أن الدالة h زوجية .

ج- إشرح كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني (C_h) للدالة h إنطلاقاً من التمثيل البياني (C_f) للدالة f .

حل مقترح :

(1) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ يكون :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1}$$

بتوحيد المقامات نجد : $f(x) = \frac{ax+a+b}{x+1}$ و منه بالمطابقة مع عبارة الدالة f نحصل على :

$$f(x) = 3 - \frac{5}{x+1} \quad \text{و عليه تكون :} \quad \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} a=3 \\ a+b=-2 \end{cases}$$

طريقة أخرى : بكتابة : $f(x) = \frac{3x-2}{x+1} = \frac{3x+3-5}{x+1} = \frac{3x+3}{x+1} - \frac{5}{x+1}$ أي :

$$\begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases} \quad \text{و منه نجد :} \quad f(x) = 3 - \frac{5}{x+1} \quad \text{ينتج :} \quad f(x) = \frac{3(x+1)}{x+1} - \frac{5}{x+1}$$

(2) تعيين الدالتين u و v بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ يكون : $f(x) = (v \circ u)(x)$

من السؤال (1) نعلم أن : $f(x) = 3 - \frac{5}{x+1}$ و منه نفكك الدالة f على النحو الآتي :

$$x \xrightarrow{u} x+1 \xrightarrow{v} 3 - \frac{5}{x+1}$$

$$v(x) = 3 - \frac{5}{x} \quad \text{و} \quad u(x) = x+1 \quad \text{بحيث :} \quad f = v \circ u$$

(3) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $]-1, +\infty[$:

• على المجال $]-\infty, -1[$: الدالة u تآلفية متزايدة تماما على المجال $]-\infty, -1[$ لأن $1 > 0$ بحيث من أجل كل

$x \in]-\infty, -1[$ فإن $x < -1$ و منه يكون $x+1 < 0$ أي من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty, -1[$ فإن

$u(x) < 0$ و بالتالي : $u(x) \in]-\infty, 0[$ و بما أن الدالة $x \mapsto -\frac{5}{x}$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty, 0[$ لأن

الدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0[$ و $-5 < 0$ فإن الدالة $v: x \mapsto 3 - \frac{5}{x}$ متزايدة تماما

على المجال $]-\infty, 0[$ لأن للدالتين $x \mapsto -\frac{5}{x}$ و v نفس إتجاه التغير .

نتيجة : للدالتين u و v نفس إتجاه التغير ؛ إذا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty, -1[$.

• على المجال $]-1, +\infty[$: الدالة u تآلفية متزايدة تماما على المجال $]-1, +\infty[$ لأن $1 > 0$ بحيث من أجل كل

$x \in]-1, +\infty[$ فإن $x > -1$ و منه يكون $x+1 > 0$ أي من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1, +\infty[$ فإن

$u(x) > 0$ و بالتالي : $u(x) \in]0, +\infty[$ و بما أن الدالة $x \mapsto -\frac{5}{x}$ متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$ لأن

الدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]0, +\infty[$ و $-5 < 0$ فإن الدالة $v: x \mapsto 3 - \frac{5}{x}$ متزايدة تماما

على المجال $]0, +\infty[$ لأن للدالتين $x \mapsto -\frac{5}{x}$ و v نفس إتجاه التغير .

نتيجة : للدالتين u و v نفس إتجاه التغير ؛ إذا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1, +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗		↗

(4) البرهان أن النقطة $\Omega(-1; 3)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_f) :

نستعمل قانونه مركز التناظر الآتي : $f(2 \times (-1) - x) + f(x) = 2 \times 3$ أي $f(-2 - x) + f(x) = 6$.

من أجل $x \in D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ فإن $x \neq -1$ و منه $-x \neq 1$ و منه $-2 - x \neq -1$ إذن $-2 - x \in D_f$

$$f(-2-x) + f(x) = \frac{3(-2-x)-2}{(-2-x)+1} + \frac{3x-2}{x+1}$$

$$f(-2-x) + f(x) = \frac{8+3x}{x+1} + \frac{3x-2}{x+1} \quad f(-2-x) + f(x) = \frac{-8-3x}{-1-x} + \frac{3x-2}{x+1}$$

$$f(-2-x) + f(x) = \frac{6x+6}{x+1} \quad f(-2-x) + f(x) = \frac{8+3x+3x-2}{x+1}$$

$$f(-2-x) + f(x) = 6 = 2 \times 3 : \text{ ومنه نتحصل على } f(-2-x) + f(x) = \frac{6(x+1)}{x+1}$$

نتيجة : النقطة Ω ذات الإحداثيات $(-1;3)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

$$(5) \quad g \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} - \{-1\} : g(x) = |f(x)|$$

أ- كتابة عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ g(x) = -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{نعلم أن :}$$

$$\frac{3x-2}{x+1} \quad g(x) = |f(x)| = \left| \frac{3x-2}{x+1} \right| \quad \text{و حتى نجد كتابة } g \text{ دون رمز القيمة المطلقة يجب دراسة إشارة النسبة}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$3x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$		$-$	$+$

في الجدول الآتي :

إذن يكون : $f(x) \geq 0$ على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $[\frac{2}{3}, +\infty[$ ويكون : $f(x) \leq 0$ على المجال

$]-1, \frac{2}{3}]$ ؛ ومنه نستنتج أن :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{3x-2}{x+1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[\\ g(x) = \frac{2-3x}{x+1} & \text{si } x \in \left]-1, \frac{2}{3}\right] \end{cases}$$

ب- شرح كيفية إستنتاج التمثيل البياني (C_g) للدالة g إنطلاقاً من التمثيل البياني (C_f) للدالة f :

إذا كان $x \in]-\infty, -1[\cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ فإن $g(x) = f(x)$ و منه فالتمثيل البياني (C_g) ينطبق على (C_f) .

إذا كان $x \in \left]-1, \frac{2}{3}\right]$ فإن $g(x) = -f(x)$ و منه فالتمثيل البياني (C_g) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور

الفواصل .

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $h(x) = f(|x|)$

أ- تعيين مجموعة تعريف الدالة h :

تكون الدالة h معرفة إذا و فقط إذا كان $|x| \in D_f$ معناه إذا و فقط إذا كان $|x| \neq -1$ وهذا الأمر محقق دوماً

لأن $|x| \geq 0$ و منه نستنتج أن : $D_h = \mathbb{R}$

ب- إثبات أن الدالة h زوجية :

من أجل كل $x \in D_h$ أي $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ أي $-x \in D_h$

و من جهة أخرى : من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_h$ فإن : $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$ لأن

من خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي نعلم أن : $|-x| = |x|$ ، و منه h دالة زوجية .

ج- شرح كيفية إستنتاج التمثيل البياني (C_h) للدالة h إنطلاقاً من التمثيل البياني (C_f) للدالة f :

• إذا كان $x \in [0, +\infty[$ فإن $|x| = x$ و منه يكون $h(x) = f(x)$ و بالتالي فالتمثيل البياني (C_h) للدالة h

ينطبق على التمثيل البياني (C_f) للدالة f .

• إذا كان $x \in]-\infty, 0]$ فإن $|x| = -x$ و منه يكون $h(x) = f(-x)$ و بالتالي فالتمثيل البياني (C_h) للدالة

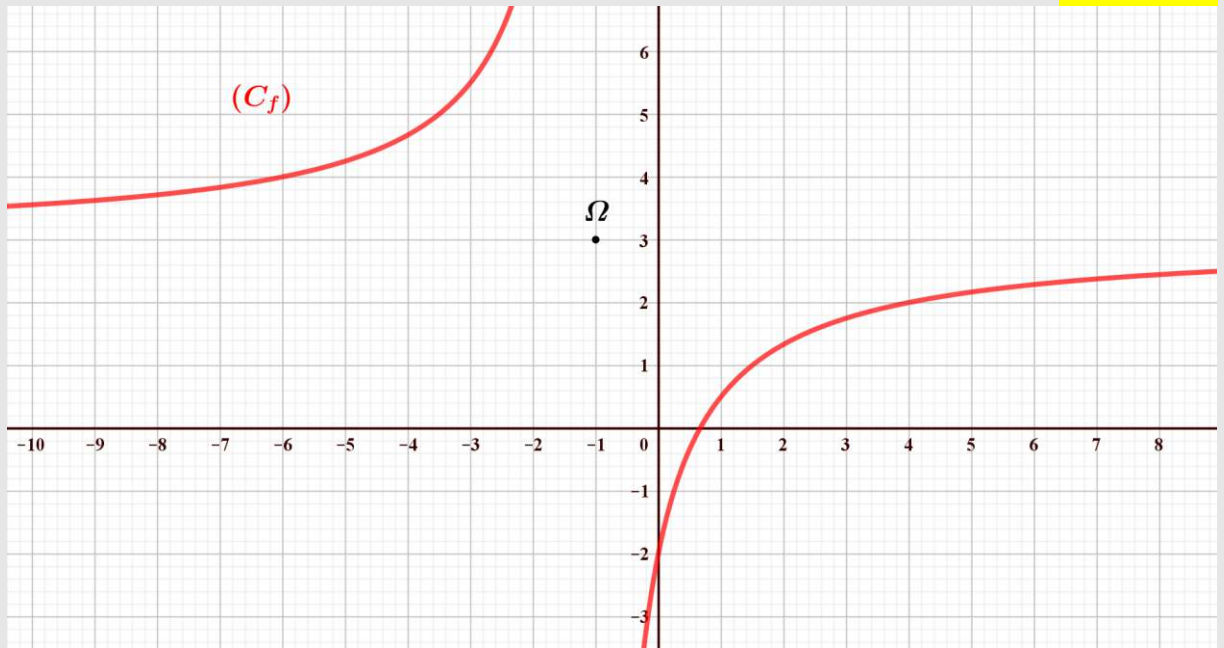
h متناظر مع التمثيل البياني (C_f) للدالة f بالنسبة لمحور الترتيب $(h$ زوجية)

التمثيلات البيانية (C_f) ، (C_g) و (C_h) :

بما أنه $f(x) = 3 - \frac{5}{x+1}$ فإله العبارة $f(x)$ تكتب هه الشكل الآتي : $f(x) = k(x+a)+b$ بحيث

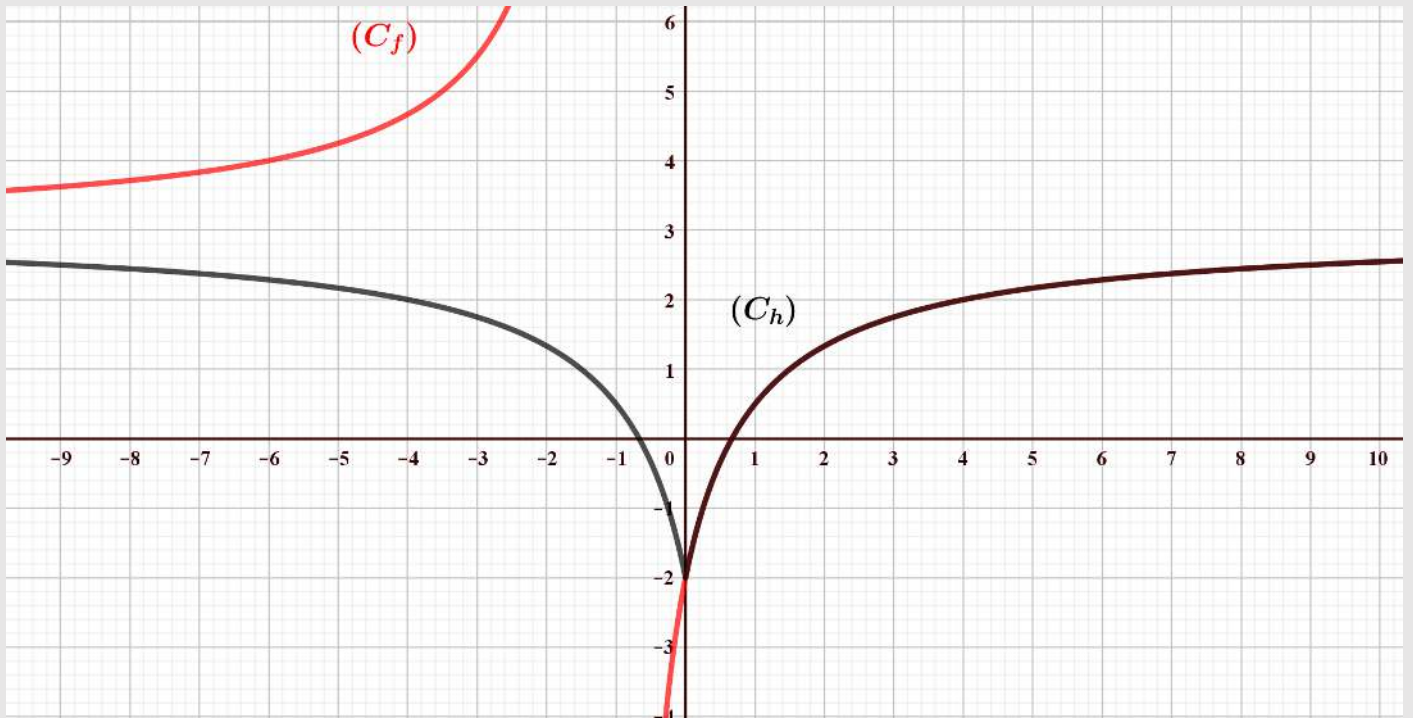
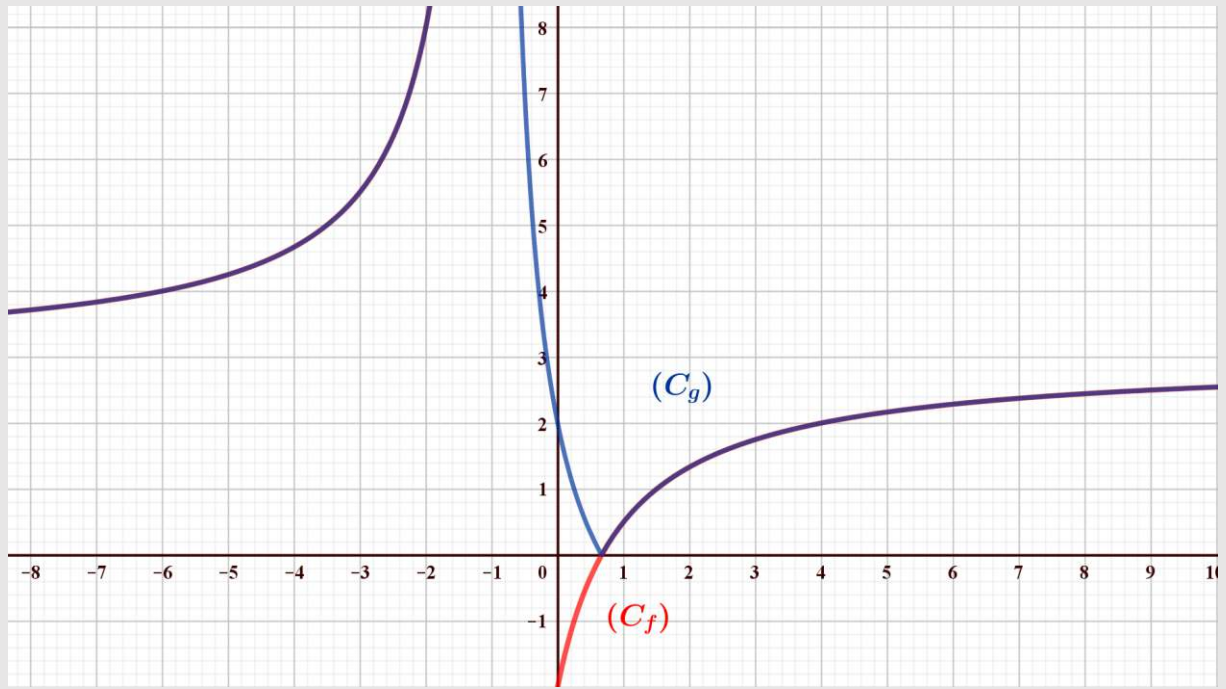
و منه (C_f) هو صورة (C_k) التمثيل البياني للدالة k بالإنسحاب الذي شعاعه $k(x) = -\frac{5}{x}$ و $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

(أنشئ أولا بيان الدالة k بالإستعانة بـ (H) بيان الدالة مقلوب) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



إنشاء المنحنى (C_g) في معلم مستقل لمساعدة التلميذ على الفهم الجيد و التمييز بيه المنحنيات :

و كذلك إنشاء المنحنى (C_h) في معلم مستقل لمساعدة التلميذ على الفهم الجيد و التمييز بيه المنحنيات :



مع تمنياتي لكم بالنوفيق و النجاح ...

الأستاذ : حناش نبيل