

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط) : : اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل .

1. f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = 3 \ln^2(x+1) + \ln(x+1) - 4$

$f'(x)$ تساوي : (a) $\frac{6 \ln(x+1)+1}{(x+1)}$ (b) $\frac{6 \ln(x+1)-1}{(x+1)}$ (c) $6 \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$

2. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ هي :

(a) $[e^{-\frac{4}{3}} - 1, e + 1]$ (b) $] - \infty, e - 1]$ (c) $[e^{-\frac{4}{3}} - 1, e - 1]$

3. θ عدد حقيقي ، الشكل المثلثي للعدد المركب : $z = -3(\sin \theta - i \cos \theta)$ هو :

(a) $3[\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)]$ (b) $3[\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) + i \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)]$ (c) $3[\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) + i \sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)]$

4. A, B, M نقط من المستوي لواحدهم $z_A = -1 + i, z_B = -1$ و z . (T) مجموعة النقط M بحيث :
 $\arg(\bar{z} + 1 + i) = \frac{\pi}{2}$

(T) هي : (a) القطعة المستقيمة $[AB]$ (b) الدائرة ذات القطر $[AB]$ (c) نصف المستقيم $]AB]$

التمرين الثاني (04 نقاط) : (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على N بـ $\begin{cases} v_3 - v_1 = -\frac{16}{27} \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = \frac{8}{729} \end{cases}$

1. أحسب الحد v_2 ، ثم الأساس q .

2. أحسب v_0 ، ثم جد عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n .

* نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرفتين على N بـ $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \\ u_0 = 10 \end{cases}$ ، $w_n = \alpha u_n + 2\alpha - 1$ ،

3. أوجد قيمة α حتى تكون (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

4. نضع $\alpha = \frac{1}{4}$. أكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج بدلالة n عبارة u_n . أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = (\ln(w_{2021}) + e) + (\ln(w_{2022}) + e) + \dots + (\ln(w_{2021+n}) + e)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء مرقمة 0, 0, 2, 4, 6 و 3 كرات خضراء مرقمة 1, 2, 8 و 4 كرات سوداء مرقمة 0, 0, 4, 9 ؛
نفرض جميع الكرات مُتماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا في آن واحد 4 كرات من هذا الصندوق و نعتبر الأحداث التالية :

- A « الكرات المسحوبة من نفس اللون »
C « على الأقل كرة تحمل رقم مختلف عن الكرات الأخرى »
B « ظهور الألوان الثلاثة »
D « الحصول على أرقام هي حدود مُتتابة لِمُتتالية حَسَابِيَّة أَساسها 2 » .

1. أُم أَحسب إِحتمالِ الحَواثِث : A ، B ، C و D ، ثم أَحسب $p(A \cap D)$ ، ثم إِستنتج $p(\overline{A \cup D})$.

2. المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة أصغر الأعداد المحصل عليها.

تأكّد أنّ $p(X = 0) = \frac{85}{99}$ ، ثمّ عرف قانون إِحتمالِ المتغير العشوائي X ، ثمّ أَحسب أمله الرياضي .

3. نُعيد الصُّندوق إلى وَضْعِهِ الأَوَّل ، ثم نسحب على التّوالي و بدون إرجاع أربع كرات من هذا الصندوق لنشكل عَدَد مكون من أربع أرقام .

و نعتبر الحادثة : F " الحصول على عَدَد زوجي و أكبر تَمَامًا من 700 " . أَحسب $p(F)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$.

1. أَحسب كلاً من : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. أُم أدرس إِتجاه تغير الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

ب) إِستنتج إشارة g(x) من أجل كل $x \in]0; +\infty[$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x) = x \ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}; x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

(C) هو المنحنى المُمثل لِلدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و المتجانس $(\vec{i}; \vec{j})$.

1. أدرس قَابِلِيَّة إِشتقاق الدالة f عند 0 ؟ فسر النتيجة هندسيًا .

2. بَرِهِن أَنَّ $f'(x) = g(x)$ ثمّ إِستنتج إِتجاه تغير الدالة f .

3. أُم برهن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\frac{x+2}{x}) = 2$ (ضع $X = \frac{2}{x}$) ، ثمّ إِستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ مقارب مَائِل لـ (C) بِجَوَار $+\infty$.

4. شكل جدول تغيّرات الدالة f ، ثم أرسم كلاً من (Δ) و (C) . (تعطى (C) تحت (Δ))

5. لتكن الدالة h المعرفة على $[\ln 2, +\infty[$ بـ : $h(x) = (e^x - 2) \ln(\frac{e^x}{e^x - 2}) + \frac{e^x - 2}{4}$.

عين العَدَدَيْنِ الحَقِيقِيَيْنِ a و b بحيث : $h(x) = f(e^x + a) + b$. ثمّ شكل جدول تغيّرات الدالة h .

إتّهِى المَوْضُوع الأَوَّل

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

$$\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{-2}{u_n-4} + 1 \end{array} : \text{ كما يلي } \mathbb{N}$$

1. أم برهن بالتراجع أن : $2 < u_n < 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن $u_n \leq \frac{5}{2}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ج) برر تقارب المتتالية (u_n) .

2. تحقق أن : $0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(u_n - 2)$ لكل n من $\mathbb{N}$ ؛ ثم بين أن $0 < u_n - 2 \leq \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n$ ؛ استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{2-u_n}{3-u_n}$.

أ) برهن أن (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول V_0 .

ب) حدّد عبارة V_n بدلالة n ؛ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ بطريقة ثانية .

4. أحسب المجاميع التالية : $S = \frac{1}{u_0-3} + \frac{1}{u_1-3} + \dots + \frac{1}{u_n-3}$ و $T = eV_0 + e^2V_1 + e^3V_2 + \dots + e^{2021}V_{2020}$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحتوي صندوق غير شفاف على 9 قريصات لافترق بينها عند اللمس . منها 4 قريصات حمراء تحمل الأحرف a, a, b, c ، و

3 قريصات بيضاء تحمل الأحرف a, a, b ؛ و قريصتان سوداء تحملان الأحرف a, c

- نَسحب عشوائيًا و بدون إرجاع 3 قريصات من الصندوق ، توضع جنبًا بِجانب لتُشكّل كلمة مُلوّنة .

نعتبر الحدثين التاليين : $A \gg$ القريضة المسحوبة الثانية حمراء $\ll B \gg$ توجد قريضة واحدة فقط تحمل الحرف $b \ll$.

1. أحسب كل من : $p(A), p(B)$ ، ثم برهن أن $p(A \cap B) = \frac{19}{84}$ ، ثم استنتج $p(A \cup B)$.

α عدد طبيعي ، و يلعب لاعب اللعبة التالية : بعد سحب القريصات الثلاث إذا تشكّلت كلمة bac فإنه يربح $e^{2\alpha}$ دج ، و

إذا لم تشكّل كلمة bac فإنه يخسر e^α دج . X متغير عشوائي يتمثل في الربح الصافي للعبة

2. حدّد قيم X ، ثم تأكّد أن $p(x = e^{2\alpha}) = \frac{5}{126}$ ، ثم استنتج قانون احتمال X

3. أوجد أصغر عدد طبيعي α كي تكون اللعبة في صالح اللاعب .

* نُعيد الصندوق إلى وضعه الأول و نَسحب منه n كُرّة على التوالي بالارجاع ، n عدد طبيعي أكبر تمامًا من 2 .

4. أحسب u_n احتمال الحصول على كُرّتين بيضاء على الأقل ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. فسّر النتيجة .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z + \sqrt{3} - 3i)(z^2 - 6z + 12) = 0$.

2. ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

- نعتبر النقط A ، B ، و C التي لواحقتها على الترتيب $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.
- أكتب كلاً من z_A و z_C و $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الأسّي . ، ثم إستنتج طبيعة المثلث OAC .
3. أ) أحسب : $(\frac{z_A}{2\sqrt{3}})^{1442} + (\frac{z_B}{2\sqrt{3}})^{2021}$ (تعطى النتيجة النهائية على الشكل الجبري) .
 ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(\frac{z_A}{2\sqrt{3}})^n$ حقيقي سالب .
4. لتكن النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى محور الفواصل . عيّن z_D ، ثمّ بين أن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{2}$.

- أدرس اتجاه تغير g ، ثم شكّل جدول تغيراتها .
- برهن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α ، حيث $-0.9 < \alpha < -0.8$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$.
- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2(e^x - \frac{1}{4})$. (C_f) تمثيلها البياني في $M(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 3. أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 4. بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + \frac{1}{4}x^2] = 0$ ، فسّر النتيجة بيانياً .
- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (T) حيث $(T) : y = -\frac{1}{4}x^2$.
- برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $f'(x) = xg(x)$ ، ثم أدرس اتجاه تغيرها ثم شكّل جدول التغيرات .
- أوجد نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل ، ثم إستنتج الوضع النسبي للحنين (C_f) و محور الفواصل .
- أحسب $f(1), f(\frac{3}{2})$ ، ثم أنشئ كل من $(C_f), (T)$. تعطى $f(\alpha) \simeq 0.2$.
- عيّن بياناً قيم الوسيط الحقيقي m كي تقبل المعادلة : $f(x) = m^2$ ثلاث حلول متميزة .
- * لتكن h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x^2(\frac{4-e^{|x|}}{4e^{|x|}})$.
 10. جد علاقة بين $h(x)$ و $f(x)$ ، ثم أرسم (C_h) اعتماداً على (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني