

الكفاءات المستهدفة: التعرف على دالة كثير حدود و على درجتها.

حل مسائل تستخدم فيها معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية.

الموضوع: الدوال كثيرات الحدود + مسائل

4 ساعات

I- الدوال كثيرات الحدود

1 ساعة

نشاط 2 صفحة 36:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 + 6x + 5$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f(x) = (x+3)^2 - 4 \quad \text{و} \quad f(x) = (x+1)(x+5)$$

2. باستعمال عبارة $f(x)$ المناسبة حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

$$f(x) = 0 \quad (\text{أ}) \quad f(x) = 5 \quad (\text{ب}) \quad f(x) + 3 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = x + 1 \quad (\text{د}) \quad f(x) = -4 \quad (\text{هـ}) \quad f(x) + 20 = 0 \quad (\text{و})$$

ماذا تمثل حلول كل معادلة من المعادلات السابقة ؟

1. الدالة كثير حدود

تعريف:

نسمي دالة كثير حدود (أو كثير حدود) كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد طبيعي و $a_0, a_1, \dots, a_n$ أعداد حقيقية ثابتة.

أمثلة:

- كل دالة ثابتة: $x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$) هي دالة كثير حدود و بصفة خاصة الدالة المعدومة: $x \mapsto 0$.
- الدوال: $x \mapsto 0, 3x^2 + x - \sqrt{2}$, $x \mapsto (x+2)(x^2-2)$, $x \mapsto x^5$ هي كثيرات حدود.

2. جذر كثير حدود

تعريف:

ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

العدد α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha) = 0$.

مثال:

$$\text{ليكن } f \text{ كثير الحدود المعرف بـ: } f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$$

لدينا: $f(2) = 0$ ومنه 2 هو جذر لكثير الحدود f بينما العدد 0 ليس جذرا له لأن $f(0) \neq 0$ ($f(0) = -2$).

3. تحليل كثير حدود باستعمال العامل $(x - \alpha)$

مبرهنة:

ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أو تساوي 1 و α عدد حقيقي.

إذا كان $f(\alpha) = 0$ (α جذر لكثير الحدود f) فإنه يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f(x) = (x - \alpha) g(x)$$

مثال:

ليكن f كثير الحدود المعرفة بـ: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
 لدينا $f(1) = 0$ و $f(2) = 0$ و $f(3) = 0$
 ومنه الأعداد 1، 2 و 3 هي جذور لكثير الحدود f .
 يمكن إذن تحليل f ولدينا:

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

تطبيق 1:

f دالة كثير حدود معرفة بـ: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
 تحقق أن العدد 2 جذر لكثير الحدود f
 عين كثير حدود g بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (x-2)g(x)$

حل:

لدينا: $f(2) = 0$ و منه العدد 2 جذر لكثير الحدود f . إذن حسب المبرهنة يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = (x-2)g(x)$

طريقة: لتعيين $g(x)$ يمكن فرض $g(x) = ax^2 + bx + c$ ثم تعيين المعاملات a ، b و c باستعمال تساوي كثيري حدود و ذلك بعد نشر و تبسيط و ترتيب العبارة $(x-2)g(x)$ كما يمكن استعمال خوارزمية القسمة.

الطريقة العملية لتعيين $g(x)$:

$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ - (x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 - 4x + 4 \\ - (x^2 - 2x) \\ \hline -2x + 4 \\ - (-2x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} x-2 \\ \hline x^2 + x - 2 \end{array}$	نجد هكذا: $g(x) = x^2 + x - 2$ و منه: $f(x) = (x-2)(x^2 + x - 2)$
---	--	---

تطبيق 2:

f دالة كثير حدود معرفة بـ: $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$
 1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = 0$

حل: طريقة المطابقة

$$1. (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c = x^3 + x^2 - 4x - 4$

$$f(x) = (x+1)(x^2 - 4): x \text{ ومنه من أجل كل عدد حقيقي } x \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} a=1 \\ a+b=1 \\ b+c=-4 \\ c=-4 \end{cases}$$

2. $f(x) = 0$ يعني $(x+1)(x^2 - 4) = 0$ أي $x+1=0$ أو $x^2 - 4 = 0$ أي: $x = -1$ أو $x^2 = 4$ ومنه

الحلول هي -1، -2، و 2 إذن مجموعة الحلول هي: $S = \{-2, -1, 2\}$.

تقويم:
تمرين
24 صفحة 53

نشاط:

هل توجد ثلاثة أعداد طبيعية متتالية هي أطوال أضلاع مثلث قائم.

1. المعادلة من الدرجة الثانية

تعريف:

نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

2. الشكل النموذجي لثلاثي الحدود: $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) / تذكير

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]$

و بما أن $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$ فإن $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$

ومنه $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

بوضع $\Delta = b^2 - 4ac$ نجد $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

تعريف:

- ليكن $ax^2 + bx + c$ ثلاثي حدود من الدرجة الثانية ($a \neq 0$)
- يسمى العدد $b^2 - 4ac$ مميز ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ و نرمز إليه بالرمز Δ
 - يسمى $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$

3. حل المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x التالية: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

باستعمال الشكل النموذجي نبرهن على المبرهنة التالية:

إذا كان:	حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هي:	يتم تحليل $ax^2 + bx + c$ على الشكل:
$\Delta > 0$	$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$a(x - x_1)^2$
$\Delta < 0$	لا توجد حلول	لا يمكن تحليل $ax^2 + bx + c$

مبرهنة

ملاحظة: إذا كان $\Delta = 0$ نقول أن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلا مضاعفا.

طريقة: عند حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) نستعمل بصفة عامة المميز إلا أنه يمكن في بعض الحالات ملاحظة ما إذا كان ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ يقبل تحليلا ظاهرا.

تطبيق:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(أ) $x^2 + 2x = 0$ (ب) $x^2 + x + 1 = 0$ (ج) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (د) $x^2 + x - 6 = 0$

حل:

- (أ) $x^2 + 2x = 0$ تعني $x(x+2) = 0$ أي $x = 0$ أو $x = -2$ ومنه مجموعة الحلول هي $S = \{-2, 0\}$
 (ب) لدينا $a = 1$ ، $b = 1$ و $c = 1$ ومنه $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$ إذن ليس للمعادلة حلول ومنه $S = \emptyset$
 (ج) $x^2 - 4x + 4 = 0$ تكافئ $(x-2)^2 = 0$ إذن للمعادلة حل مضاعف $x = 2$ ومنه $S = \{2\}$
 (د) لدينا $a = 1$ ، $b = 1$ و $c = -6$ ومنه $\Delta = (1)^2 - 4(1)(-6) = 25$ إذن للمعادلة حلان متمايزان:
 $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2$ و $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3$ ومنه $S = \{-3, 2\}$.

4. إشارة ثلاثي الحدود: $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

مبرهنة:

$\underline{\Delta < 0}$ المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ لا تقبل حلولاً من أجل كل عدد حقيقي x، إشارة $ax^2 + bx + c$ هي من نفس إشارة a																			
$\underline{\Delta > 0}$ المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>إشارة a</td><td>0 إشارة $(-a)$</td><td>0 إشارة a</td><td>إشارة a</td></tr></table> $(x_1 < x_2)$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	إشارة a	0 إشارة $(-a)$	0 إشارة a	إشارة a	$\underline{\Delta = 0}$ المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلاً مضاعفاً x_1 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>إشارة a</td><td>0 إشارة a</td><td>إشارة a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	إشارة a	0 إشارة a	إشارة a
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$															
$ax^2 + bx + c$	إشارة a	0 إشارة $(-a)$	0 إشارة a	إشارة a															
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$																
$ax^2 + bx + c$	إشارة a	0 إشارة a	إشارة a																

التقويم:
تمرين
صفحة 64

طريقة:

يؤول حل متراجحة من الشكل $ax^2 + bx + c \geq 0$ ، $ax^2 + bx + c > 0$ ، $ax^2 + bx + c \leq 0$ أو $ax^2 + bx + c < 0$ إلى دراسة إشارة ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$.

تطبيق 1:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

(أ) $2x^2 + 4x - 6 \leq 0$ (ب) $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$ (ج) $x^2 - x + 4 < 0$

حل:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$2x^2 + 4x - 6$		+	0	-

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$-x^2+10x-25$	-	0	-

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - x + 4$		+

(أ) لدينا $\Delta = 64$ ومنه حلول المعادلة

$2x^2 + 4x - 6 = 0$ هما: -3 و 1

مجموعة الحلول هي إذن: $S = [-3; 1]$

(ب) لدينا $\Delta = 0$ ومنه للمعادلة

$-x^2 + 10x - 25 = 0$ حلاً مضاعفاً هو 5.

مجموعة الحلول هي إذن: $S = \{5\}$

لدينا $\Delta = -15$ ومنه ليس للمعادلة

$x^2 - x + 4 = 0$ حلولاً لأن $\Delta < 0$

مجموعة الحلول هي إذن: $S = \emptyset$

تطبيق 2:

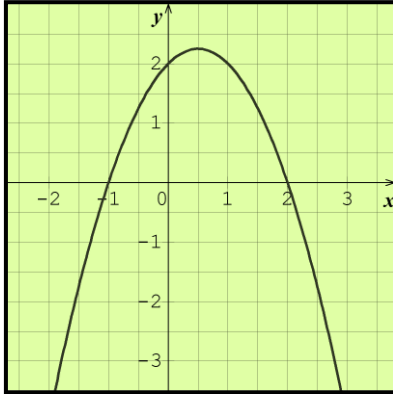
ليكن التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^2 + x + 2$ في الشكل المقابل:
استنتج بيانيا حلول المتراجحة: $-x^2 + x + 2 \leq 0$

حل:

نلاحظ أن المنحني الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما -1 و 2 على الترتيب كما نلاحظ أنه يقع فوق هذا المحور من أجل $x \in [-1; 2]$ و يقع تحته من أجل $x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$ لدينا إذن:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$-x^2+3x-2$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$

إذن مجموعة الحلول هي: $S =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

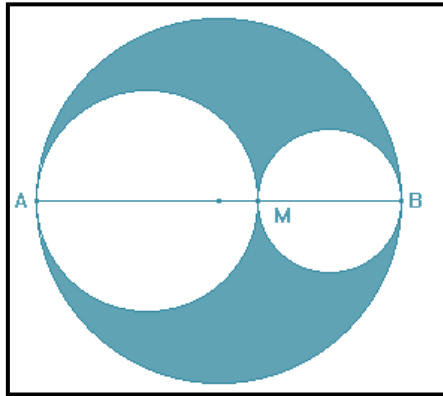


تطبيق:

نعتبر دائرة قطرها $[AB]$ حيث $AB = 4$. M نقطة من $[AB]$
ننشئ الدائرتين اللتين قطراهما $[AM]$ و $[MB]$.
نرمز بـ S إلى مساحة الحيز الملون و بـ a إلى مساحة القرص الذي قطره $[AB]$. نضع $AM = x$.
1. أحسب S بدلالة x .

2. هل توجد وضعية للنقطة M يكون من أجلها: $S = \frac{1}{2}a$ ؟

3. عين قيم x التي يكون من أجلها: $S > \frac{1}{4}a$.



حل:

1. حساب S بدلالة x

إذا رمزنا إلى مساحة القرص الذي قطره $[AM]$ بـ a_1 و إلى مساحة القرص الذي قطره $[MB]$ بـ a_2 فإن:

$$S = a - a_1 - a_2$$

$$\text{لدينا: } a = \pi \left(\frac{4}{2} \right)^2 = 4\pi, \quad a_1 = \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \pi x^2, \quad \text{و } a_2 = \pi \left(\frac{4-x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \pi (4-x)^2 \text{ ومنه:}$$

$$S = 4\pi - \frac{1}{4} \pi x^2 - \frac{1}{4} \pi (4-x)^2$$

$$\text{بعد النشر و التبسيط نجد: } S = \frac{\pi}{2} (-x^2 + 4x)$$

$$2. \text{ تعيين وضعية } M \text{ حيث: } S = \frac{1}{2}a$$

$$S = \frac{1}{2}a \text{ يكافئ } \frac{\pi}{2} (-x^2 + 4x) = \frac{1}{2} (4\pi) = 2\pi \text{ أي: } -x^2 + 4x - 4 = 0 \text{ أي: } x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\text{لدينا: } x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ يكافئ } (x-2)^2 = 0 \text{ و منه: } x = 2$$

$$3. \text{ تعيين قيم } x \text{ التي يكون من أجلها: } S > \frac{1}{4}a$$

$$S > \frac{1}{4}a$$

$$-x^2 + 4x - 2 > 0 \text{ أي: } \frac{\pi}{2}(-x^2 + 4x) > \frac{1}{4}(4\pi) \text{ يكافئ } S > \frac{1}{4}a$$

لندرس إشارة $-x^2 + 4x - 2$

لدينا $\Delta = 8$ و منه $-x^2 + 4x - 2$ يقبل جذرين هما: $x' = 2 - \sqrt{2}$ و $x'' = 2 + \sqrt{2}$

x	0	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	4	
$-x^2+4x-2$	-	0	+	0	-

مجموعة قيم x التي يكون من أجلها: $S > \frac{1}{4}a$ هي: $]2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}[$.

تقويم:
تمرين
صفحة 57

1 ساعة

III- مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1) \quad \text{مع } (a \neq 0)$$

نعلم أنه إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين (جذرين) x' و x'' حيث:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

إذا وضعنا $S = x' + x''$ و $P = x' \times x''$ حيث S هو مجموع الحلين و P جداءهما بين أن: $S = -\frac{b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$

1. حساب أحد الحليين بمعرفة الآخر:

طريقة: إذا علم أحد الجذرين يمكن حساب الجذر الآخر و ذلك باستعمال المجموع S أو الجداء P

تمرين تطبيقي:

نعتبر المعادلة التالية: $2x^2 + \alpha x - 3 = 0$ حيث α عدد حقيقي .

عين α حتى يكون (-3) حلا لهذه المعادلة ثم استنتج الحل الآخر.

تقويم:
تمرين
صفحة 24

2. تعيين عددين علم مجموعهما و جداءهما

مبرهنة:

يكون مجموع عددين هو S و جداءهما هو P إذا و فقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

تمرين تطبيقي:

عين بعدي مستطيل مساحته 77 cm^2 و محيطه 36 cm .

هل يوجد مستطيلا مساحته 30 cm^2 و محيطه 20 cm ؟

3. تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

مبرهنة:

نعتبر المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0 \quad (1) \quad \text{مع } (a \neq 0)$.

1. إذا كان $\frac{c}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتهما مختلفتان.

2. إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.

3. إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

تمرين تطبيقي:

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m = 0$$

تقويم:
تمرين
صفحة 39

4. المعادلات و المتراجحات مضاعفة التربيع:

أ- المعادلات مضاعفة التربيع:

تعريف:

نسمى معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ حيث a, b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.
حل المعادلة $ax^4 + bx^2 + c = 0$ يؤول إلى حل الجملة:

$$\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$$

يسمى المجهول X مجهولا مساعدا.

تطبيق:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

$$(1) \quad x^4 + x^2 - 6 = 0 \quad (2) \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad (3) \quad 2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$$

ب- المتراجحات مضاعفة التربيع:

تعريف:

نسمى متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين:
 $ax^4 + bx^2 + c \geq 0$ ، $ax^4 + bx^2 + c > 0$ حيث a, b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.
يؤول حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة $ax^4 + bx^2 + c$.

عمل منزلي:

نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة ذات المجهول x : $x^4 - 7x^2 + 12 < 0$ (*)

1. نضع: $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

تحقق أن 3 و 4 هما حلا المعادلة ذات المجهول X : $X^2 - 7X + 12 = 0$

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 4)$

3. أدرس حسب قيم x إشارة $f(x)$ (يمكنك استعمال جدول)

ب- استنتج حلول المتراجحة

تقويم:
تمرين
67 صفحة 57

ملاحظات عامة حول سير الحصص: