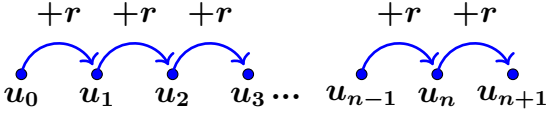
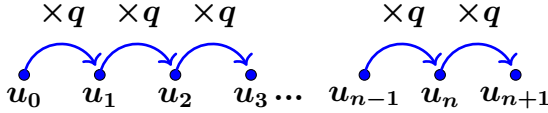


ملخص حول المتتاليات العددية

المتتالية الحسابية والهندسية

1

المتتاليات الحسابية	المتتاليات الهندسية	
		المخطط
علاقة حدّ من الحدود بالحد الذي يسبقه أو يليه $u_1 = u_0 + r \text{ و } u_1 = u_2 - r$ إذا عِلِمَ حدين متتابعين (متتاليين) يُمكن إيجاد r $r = u_2 - u_1 = u_1 - u_0$ فمثلا:	علاقة حدّ من الحدود بالحد الذي يسبقه أو يليه $u_1 = \frac{u_2}{q} \text{ و } u_1 = qu_0$ إذا عِلِمَ حدين متتابعين (متتاليين) يُمكن إيجاد q $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0}$ فمثلا:	ويكون لدينا مثلا
(العلاقة التراجعية) $u_{n+1} = u_n + r$	(العلاقة التراجعية) $u_{n+1} = qu_n$	التعريف
الطريقة ❶: (نُثبت أنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت) وهو الأساس r. فمثلا لدينا: $u_n = 3n - 1$، نجد: $u_{n+1} = 3(n + 1) - 1 = 3n + 2$ $u_{n+1} - u_n = (3n + 2) - (3n - 1) = 3n + 2 - 3n + 1 = 3 = r$	الطريقة ❶: (نُثبت أنّ حاصل القسمة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت) وهو الأساس q. فمثلا لدينا: $u_n = 3 \times 2^n$، نجد: $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2^1 = 6 \times 2^n$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{6 \times 2^n}{3 \times 2^n} = 2 = q$ ومنه:	طريقة الإثبات
الطريقة ❷: (نكتب u_{n+1} بدلالة u_n) فمثلا لدينا: $u_n = 3n - 1$، نجد: $u_{n+1} = 3(n + 1) - 1 = u_n + 3$	الطريقة ❷: (نكتب u_{n+1} بدلالة u_n) فمثلا لدينا: $u_n = 3 \times 2^n$، نجد: $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2^1 = 2u_n$	
❶ $u_n = u_p + (n - p)r$ (علاقة تربط بين حدين مختلفين من متتالية حسابية) $r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$ نجد: مثال ❶: (الأس = 2) حيث (u_n) حسابية. $\begin{cases} u_{10} = 31 \\ u_{15} = 46 \end{cases}$	❶ $u_n = u_p \times q^{n-p}$ (علاقة تربط بين حدين مختلفين من متتالية هندسية) $q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$ نجد: مثال ❶: (الأس = 2) حيث (u_n) هندسية أساسها $\begin{cases} u_3 = 144 \\ u_5 = 576 \end{cases}$ موجب تماما.	عبارة الحد العام

لدينا: $q^2 = 4$ ومنه: $q = \sqrt{4}$ أو $q = -\sqrt{4}$ (مرفوض) مثال ②: $2 \neq$ الأس (استعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية) $u_1 = 6$ و $u_4 = 48$ حيث (u_n) هندسية. لدينا: $q^3 = 8 = 2^3$، ومنه: $q = 2$ ② $u_n = u_0 \times q^n$ ③ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ <u>ملاحظة مهمة:</u> إذا كان $u_n = a \times b^n$، فإن $q = b$ <u>ملاحظة مهمة أخرى:</u> هذه العلاقات لها إستعمالات أخرى مثلا يمكن وضع مكان u_n أي حدّ معلوم أو نحن بصدد إيجاد.	لدينا: $r = \frac{46 - 31}{15 - 10} = \frac{15}{5} = 3$ ② $u_n = u_0 + nr$ ③ $u_n = u_1 + (n - 1)r$ <u>ملاحظة مهمة:</u> إذا كان $u_n = an + b$، فإن $r = a$ <u>ملاحظة مهمة أخرى:</u> هذه العلاقات لها إستعمالات أخرى مثلا يمكن وضع مكان u_n أي حدّ معلوم أو نحن بصدد إيجاد.	
<u>بصفة عامة:</u> $S = (\text{الحدّ الأول}) \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right)$ حيث: $1 + \text{دليل الحدّ الأول} - \text{دليل الحدّ الأخير} = \text{عدد الحدود}$ $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$	<u>بصفة عامة:</u> $S = (\text{عدد الحدود}) \left(\frac{\text{الحدّ الأخير} + \text{الحدّ الأول}}{2} \right)$ حيث: $1 + \text{دليل الحدّ الأول} - \text{دليل الحدّ الأخير} = \text{عدد الحدود}$ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$	المجموع
<u>خاصية الوسط الهندسي:</u> $\times q \quad \times q$ $a \quad b \quad c$ $a \times c = b^2$ b هو الوسط الهندسي للعددين a و c. فمثلا: $\begin{cases} u_1 \times u_3 = u_2^2 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = u_2^3 \end{cases}$	<u>خاصية الوسط الحسابي:</u> $+r \quad +r$ $a \quad b \quad c$ $a + c = 2b$ b هو الوسط الحسابي للعددين a و c. فمثلا: $\begin{cases} u_1 + u_3 = 2u_2 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 3u_2 \end{cases}$	خاصية
رتبة الحد u_n، في حالة u_0 هو الحدّ الأول: هي $n + 1$؛ وفي حالة u_1 هو الحدّ الأول: هي n. إذا أُعطي لنا قيمة حدّ وطلب منا تبين أنه حدّ من حدود المتتالية: نضع: $u_n = \text{العدد المُعطى}$، نجد: $n = \dots$ عدد طبيعي (نعوض n وذلك بالعودة إلى الوضع).		الرتبة والقيمة الطريقة
هندسية معرفة بعلاقة وأُعطي حدّ أو أساس: نكتب الحدود الموجودة في العلاقة بدلالة الحدّ المُعطى أو الحدّ الأول فمثلا في بكالوريا 2023: (شعبة آف، لغ أ) لدينا: $u_2 = u_0 \times 2^2$ و $u_3 = u_0 \times 2^3$	حسابية معرفة بعلاقة وأُعطي حدّ أو أساس: نكتب الحدود الموجودة في العلاقة بدلالة الحدّ المُعطى أو الحدّ الأول فمثلا في بكالوريا 2009: (شعبة آف، لغ أ) لدينا: $u_n = u_1 + (n - 1)r$	إضافات

$$u_2 + u_3 = 60 \text{ العلاقة}$$

$$4u_0 + 8u_0 = 60 \text{ نُصبح:}$$

$$u_0 = \frac{60}{12} = 5 \text{ ومنه:}$$

$$u_5 = 2 + 4r \text{ و } u_2 = 2 + r \text{ ومنه:}$$

$$u_2 - 2u_5 = 19 \text{ العلاقة}$$

$$(2 + r) - 2(2 + 4r) = 19 \text{ نُصبح:}$$

$$r = -3 \text{ ومنه:}$$

اتجاه تغيّر متتالية

2

الطريقة العامة

1

لدراسة اتجاه تغيّر متتالية (u_n) ، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، نكون أمام ثلاث إحتتمالات:

☞ إذا كان $u_{n+1} - u_n > 0$ ، نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

☞ إذا كان $u_{n+1} - u_n < 0$ ، نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

☞ إذا كان $u_{n+1} - u_n = 0$ ، نستنتج أنّ المتتالية (u_n) ثابتة.

نتائج تتعلق بالمتتالية الثابتة

2

☞ (u_n) ثابتة، معناه: $u_{n+1} = u_n = \text{الحد الأول}$.

☞ (u_n) ثابتة، معناه: $u_n = k$ (حيث k عدد حقيقي ثابت).

المتتاليات المحدودة

3

تعريف

1

☞ المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد A ، يعني: $u_n \leq A$ (A يسمى عنصر حاد من الأعلى).

☞ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد B ، يعني: $u_n \geq B$ (B يسمى عنصر حاد من الأسفل).

☞ المتتالية (u_n) محدودة، يعني: محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل.

طُرق إثبات أنّ متتالية محدودة

2

عادة ما نستعمل الاستدلال بالتراجع.

الاستدلال بالتراجع

4

مبدأ الاستدلال بالتراجع

1

للبرهان بالتراجع على صحة الخاصية $P(n)$ ، نتبع ما يلي:
المرحلة ①: من أجل $n = \dots$ ، لدينا: $\dots$ ؛ إذن: $P(\dots)$ صحيحة.
المرحلة ②:

④ نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n ، أي: $\dots$ (فرضية التراجع).

⑤ ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n + 1$ ، أي: $\dots$.

البرهان:

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

تقارب أو تباعد متتالية

5

المتتاليات المتقاربة

1

المتتالية (u_n) متقاربة وتتقارب نحو l ، معناه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ (يُمكن أن نكتب $\lim u_n = l$).

ملاحظة: (u_n) متباعدة، معناه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ أو (غير موجودة) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

الرتابة والتقارب

2

1.2 مبرهنة

☞ إذا كانت متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى، فإنّ هذه المتتالية متقاربة.

☞ إذا كانت متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل، فإنّ هذه المتتالية متقاربة.

قوانين النهايات المتعلقة بالمتتاليات الهندسية

3

ليكن q عددا حقيقيا (أساس المتتالية الهندسية)

☞ إذا كان $q > 1$ ، فإنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

☞ إذا كان $-1 < q < 1$ ، فإنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

☞ إذا كان $q \leq -1$ ، فإنّ (غير موجودة) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$.

ملاحظة: تُستخدم هذه القوانين لحساب النهايات في التمارين التي تتعرّض للمتتاليات الهندسية، سواءً تعلق الأمر بالحدود العامة أو المجاميع.