

Top Maths

مجلة

في الدوال الأسية

Exponential Function

3AS MTM



إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

تلمسان يوم 29 ديسمبر 2020

07.76.60.8058

facebook / Instagram : Top Maths  Tlemcen

www.dzexams.com

تجدون في هذا الملف

1. ملخص درس ص3

2. درس مفصل ص4

3. تمارين مقترحة مع حلول مفصلة ص12

4. حلول تمارين بكالوريا شعبة علوم تجريبية من ص32 الى ص70

5. حلول تمارين بكالوريا شعبة رياضيات من ص72 الى ص118

6. حلول تمارين بكالوريا شعبة تقني رياضي من ص120 الى ص155

إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

07.76.60.8058

facebook /Instagram : Top Maths  Tlemcen

Top
Maths

www.dzexams.com

أقدم لإخواني الأساتذة و أبنائي الطلبة هذا الملف و المتمثل في

مجلة Top Maths في الدوال الأسبوعية

مجلة شاملة للمراجعة لطلاب البكالوريا جميع الشعب العلمية
علوم تجريبية . رياضيات . تقني رياضي للتخضير الجيد في البكالوريا

إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

شكر خاص للاستاذين المؤلفين

• عبد الرزاق بلقاسم

• خالد بن خاشع

إهداء

إلى من أفضّلها على نفسي، ولم لا؛ فلقد ضحّت من أجلي ولم تدخر جهداً في سبيل إسعادي على الدوام
(أُمِّي الغالبة).

والى (والدي العزيز).

وعائلتي الصغيرة زوجتي و إبني عبد الله

وكل من أعرف

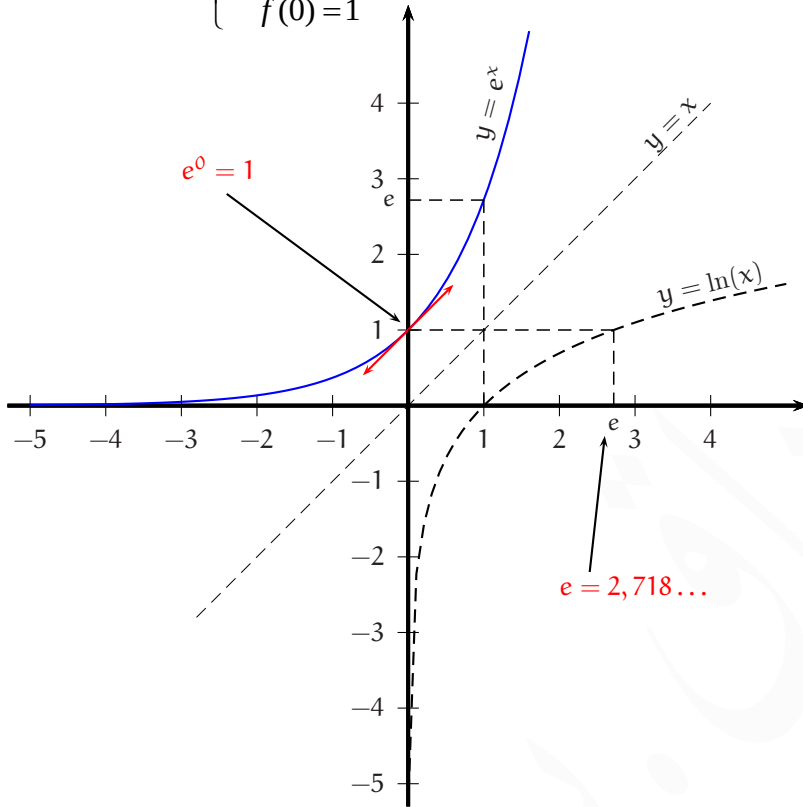
« رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِي مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِي مِنْ تَأْوِيلِ الْأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ

وَالْأَرْضِ أَنْتَ وَلِيِّ فِي الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِي بِالصَّالِحِينَ »

الدالة الأسية النيبيرية

توجد دالة وحيدة f معرفة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تحقق

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$



خواص الدالة الأسية

من أجل كل عدد حقيقي x

$$(\exp)'(x) = \exp(x).$$

الدالة الأسية مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$e^x > 0.$$

النهايات عند حدود مجموعة التعريف

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

الترايد المقارن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad \text{أعداد المشتق عند 0}$$

الخواص الجبرية

$$e^x \times e^y = e^{x+y}, \quad e^x \neq 0, \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x}, \quad \text{من أجل كل عددين حقيقيين } x \text{ و } y$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad e^{nx} = (e^x)^n, \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n$$

العلاقة بين الأسية واللوغاريتمية

$$e^{\ln(x)} = x, \quad x \in]0, +\infty[\quad \text{من أجل كل عدد حقيقي } x, \quad \ln(e^x) = x$$

$$\text{من أجل } a > 0, \quad e^x = a \quad \text{المعادلة تقبل حلاً وحيداً} \quad \text{من أجل } a \leq 0, \quad e^x = a \quad \text{المعادلة لا تقبل حلاً}$$

$$\text{من أجل كل عددين حقيقيين } x \text{ و } y, \quad \text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ و } a > 0$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

$$e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a)$$

الدوال الأسية

نشاط:

مقدمة:

تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية والبيولوجية والاقتصادية وغيرها باستخدام دالة f متناسبة مع دالتها المشتقة f' . سوف نهتم هنا بدالة من هذا النوع وهي دالة تساوي دالتها المشتقة.

نقبل أنه توجد دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

الجزء الأول

$$1) \text{ اثبت أن } f(x_0 + h) \approx f(x_0)(1+h) \text{ و } f(x_0 - h) \approx f(x_0)(1-h)$$

2) باستعمال طريقة أولر وباختيار خطوة $h = 0,5$ أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-2; 2]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبا للدالة f .

الجزء الثاني

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = f(x) \times f(-x)$

- بين أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$. استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \times f(-x) = 1$ (3)
- برهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \neq 0$ (4)

الجزء الثالث

ليكن y عدد حقيقي كافي ثابت. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$

- بين أن g دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (5)

حل النشاط:

الجزء الأول

نذكر أن $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ وبما أن $f' = f$ فإن $f(x_0 + h) \approx f(x_0)(1+h)$
لدينا كذلك $f(x_0 - h) \approx f(x_0) - hf'(x_0)$ وبما أن $f' = f$ فإن $f(x_0 - h) \approx f(x_0)(1-h)$
الجدول:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0,5) \approx f(0+0,5) \approx 1,5 \times f(0) \approx 1,5 \\ f(1) \approx f(0,5+0,5) \approx 1,5 \times f(0,5) \approx 2,25 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ f(-0,5) \approx f(0-0,5) \approx (1-0,5) \times f(0) \approx 0,5 \\ f(-1) \approx f(-0,5-0,5) \approx (1-0,5) \times f(-0,5) \approx 0,25 \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

حساب الصور لدينا

	الجدول								
x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	1,5	2,25	3,37	5,06

الجزء الثاني

h معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = f(x) \times f(-x)$

لدينا $[f(ax+b)]' = af'(ax+b)$ ومنه $[f(-x)]' = -f'(-x)$

ولدينا $f'(x) = f(x)$ ومنه $f'(-x) = f(-x)$ إذن $[f(-x)]' = -f'(-x) = -f(-x)$

$h'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)[f(-x)]' = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$

لدينا من أجل كل عددين حقيقيين x و x' ، $h(x) = h(x')$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) = h(0)$

أي $f(x)f(-x) = 1$

• لنفترض أن $f(x) = 0$ وهذا معناه أن $f(x)f(-x) = 0$ وهذا يناقض (3) إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \neq 0$

الجزء الثالث

ليكن y عدد حقيقي كافي ثابت. نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$

• لدينا $\frac{d[f(x+y)]}{dx} = f'(x+y)$ ومنه

$$g'(x) = \frac{f'(x+y)f(x) - f(x+y)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{f(x+y)f(x) - f(x+y)f(x)}{f^2(x)} = 0$$

لدينا $g(0) = \frac{f(y)}{f(0)} = f(y)$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x) = g(0)$ (دالة ثابتة) إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$g(x) = f(y)$

• لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $g(x) = f(y)$ معناه $\frac{f(x+y)}{f(x)} = f(y)$ أي

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

(2) تعريف:

توجد دالة وحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = f$ و $f(0) = 1$ تسمى الدالة الأسية (النيبيرية)

ونرمز إليها بالرمز $\exp$ "من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = \exp(x)$ "

كتابة باستعمال الترميز السابق كل النتائج

من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$ ،

$$(1) \exp'(x) = \exp(x) \quad (2) \exp 0 = 1 \quad (3) \exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad (4) \exp(x) \neq 0$$

$$(5) \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$$

$$(6) \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ ومن أجل كل } y \text{ من } \mathbb{R}$$

$$(7) \exp(nx) = [\exp(x)]^n, \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ ومن أجل كل } n \text{ من } \mathbb{Z}$$

$$(8) \exp(xy) = [\exp(x)]^y, \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ ومن أجل كل } y \text{ من } \mathbb{R}$$

$$\text{ملاحظة: } \exp(x) = \exp\left(2 \frac{x}{2}\right) = \left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2, \exp(x) \geq 0, \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

وبما أن $\exp(x) \neq 0$ فإن $\exp(x) > 0$

الترميز e :

الرمز e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\exp(1) = e$ ، وقيمته التقريبية بالآلة الحاسبة هي $e \approx 2,718281828459$.

$$\text{لدينا من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}, \exp(1 \times x) = [\exp(1)]^x = e^x$$

وبالتالي: الدالة الأسية $\exp$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\exp(x) = e^x$.

ملخص

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ،

$$e^x > 0 \quad \exp'(x) = e^x$$

$$e^0 = 1 \quad e^{x+y} = e^x e^y \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^x e^{-x} = 1 \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (e^x)^n = e^{nx}$$

3 دراسة الدالة exp :

الدالة exp تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $\exp'(x) = e^x$ ، ومنه $\exp'(x) > 0$ إذن exp دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

نتائج:

- من أجل كل عددين حقيقيين a و b ، $a > b$ معناه $e^a > e^b$.
- من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $x > 0$ معناه $e^x > 1$ و $x < 0$ معناه $e^x < 1$.
- لدينا $\exp'(0) = e^0 = 1$ هذا من جهة ؛ ومن جهة أخرى $\exp'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

ملاحظة:

إذا كان $x = y$ فإن $e^{x-y} = 1$ ومنه $e^x = e^y$ ؛ إذا كان $e^x = e^y$ فإن $e^{x-y} = 1$ وبما أن الدالة exp مستمرة (تقل الاشتقاق) ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، فإن $x - y = 0$ ومنه $x = y$ ؛ خلاصة: $e^x = e^y$ معناه $x = y$.

النهايات

نعتبر الدالة $f : x \mapsto e^x - x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = e^x - 1$ ، إذا كان $x > 0$ فإن $e^x > 1$ ومنه $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ ، وبالتالي إذا كان $x > 0$ فإن $f(x) > f(0)$ أي $e^x - x > 1$ ؛ إذن من أجل كل $x > 0$ ،

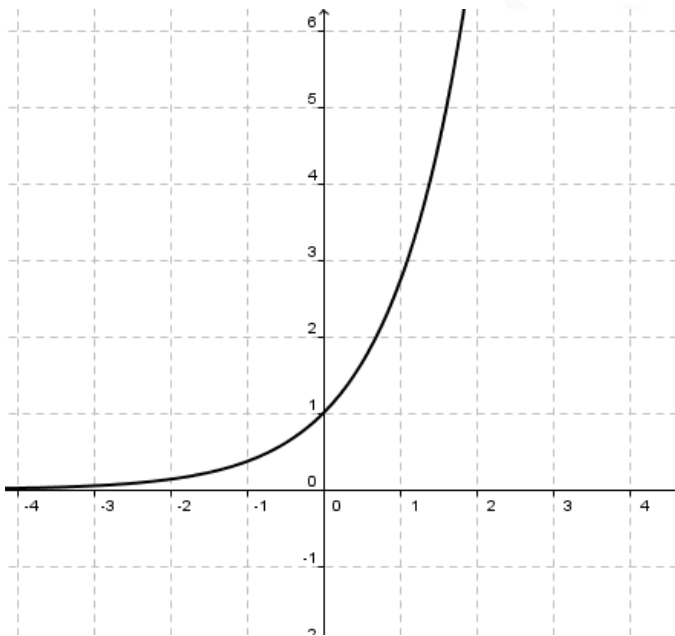
$$e^x > x + 1 \quad \text{بما أن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$\text{لدينا} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0 \quad \text{أي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	+
$\exp(x)$		0	$+\infty$

التمثيل البياني:



مشتق الدوال $x \mapsto e^{u(x)}$:

- إذا كان الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f : x \mapsto e^{u(x)}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل $x \in I$:

$$f'(x) = \exp'(u(x)) \times u'(x) = u'(x) e^{u(x)}$$

الاثبات

نعتبر الدالة v المعرفة بـ $v : x \mapsto e^x$ لدينا $f(x) = v \circ u(x) = e^{u(x)}$ نعلم أن $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$ ومنه لدينا من أجل كل $x \in I$:

$$f'(x) = \exp'(u(x)) \times u'(x) = u'(x) e^{u(x)}$$

مبرهنة:

k عدد حقيقي غير معدوم.

الدوال بحيث $f' = kf$ هي الدوال $f : x \mapsto Ce^{kx}$ مع C ثابت حقيقي.

مثال :

الدوال التي تحقق $f' = -3f$ هي : $f : x \mapsto Ce^{-3x}$ مع C ثابت حقيقي.

نتيجة:

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تحقق $f' = kf$ و $f(0) = 1$ وهي $f : x \mapsto e^{kx}$

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ حيث $\lambda > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ ، نعتبر الدوال g_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $g_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$

نرمز بـ (Γ_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال g_λ في معلم متعامد ومتجانس $(O; I, J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة.

2. أدرس اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1) ، (Γ_2) و (Γ_3) .

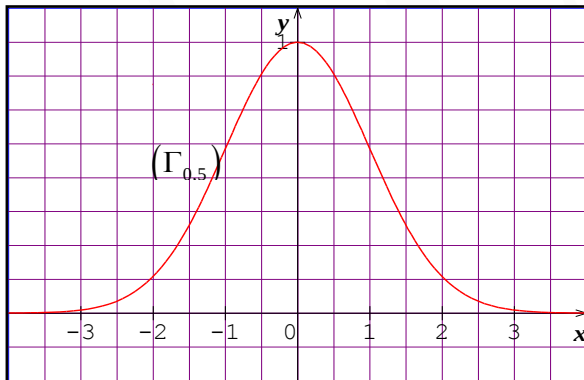
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

ملاحظة:

تسمى المنحنيات (Γ_λ) بمنحنيات غوص (Gauss)

ويتم استعمالها في الاحتمالات والإحصاء

ولعل أكثرها استعمالا هو المنحني $(\Gamma_{0.5})$ ذو المعادلة $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ والذي يأخذ شكلا ناقوسيا.



حل:

1. حساب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة.

بما أن $\lambda > 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\lambda x^2 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x^2 = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g_\lambda(x) = 1$

التفسير البياني: (Γ_λ) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) بجوار $(-\infty)$ و بجوار $(+\infty)$.

2. دراسة اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها. $g_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$ ومنه $g'_\lambda(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$

إذا كان $x < 0$ فإن $g_\lambda'(x) > 0$ ومنه الدالة g_λ متزايدة تماما على $]-\infty; 0]$.
إذا كان $x > 0$ فإن $g_\lambda'(x) < 0$ ومنه الدالة g_λ متناقصة تماما على $[0; +\infty[$.

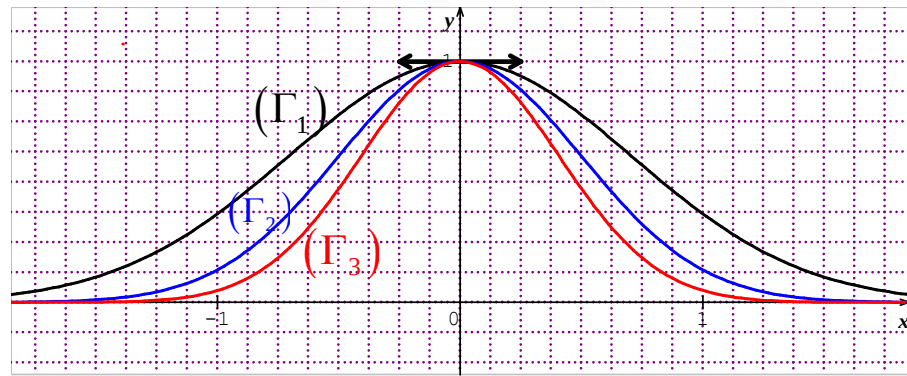
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_\lambda'(x)$		$+$	$-$
$g_\lambda(x)$		0	1

3. تبيان أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

ليكن x_0 و y_0 عددين حقيقيين ثابتين حيث من أجل كل $\lambda > 0$: $e^{-\lambda x_0^2} = y_0$ لدينا $\frac{de^{-\lambda x_0^2}}{d\lambda} = 0$ هذا من جهة؛

ومن جهة أخرى $\frac{de^{-\lambda x_0^2}}{d\lambda} = -x_0^2 e^{-\lambda x_0^2}$ إذن $x_0 = 0$ ومنه $y_0 = e^{-\lambda \times 0^2} = 1$

4. رسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1) ، (Γ_2) و (Γ_3) . (تحرك المنحنيات باستعمال Geoplan رقم الملف 24)



5. دراسة الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

$0 < \lambda < \lambda'$ معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-\lambda x^2 > -\lambda' x^2$ ومعناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $e^{-\lambda x^2} > e^{-\lambda' x^2}$.

ومنه إذا كان $0 < \lambda < \lambda'$ فإنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، المنحني (Γ_λ) يقع فوق المنحني $(\Gamma_{\lambda'})$ ويتقاطعان في النقطة $A(0;1)$.

التزايد المقارن:

نشاط:

نعتبر الدالتين $f : x \mapsto e^x - x$ و $g : x \mapsto e^x - \frac{1}{2}x^2$ المعرفة على $[0; +\infty[$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g . أحسب $g(0)$ واستنتج إشارة $g'(x)$ على $[0; +\infty[$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f . استنتج أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$

(3) عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ واستنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$.

حل النشاط:

(1) لدينا $g'(x) = e^x - 1$ ، من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، أي $e^x > 1$ ، $g'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

$g(0) = 1$ ؛ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g(x) > g(0)$ أي $g(x) > 1$ ومنه g موجبة تماماً على $[0; +\infty[$.

(2) لدينا $f'(x) = e^x - x = g(x)$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f(x) > f(0)$ أي $f(x) > 1$ ومنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $\frac{f(x)}{x} > 0$

أي $\frac{e^x}{x} - \frac{1}{2}x > 0$ ومعناه $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{e^{-x}} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

خواص:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad (2) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (1)$$

تمارين مقترحة من طرف الأستاذ عبد الرزاق بلقاسم

المسألة (01)

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.
- (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثم بين أن المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للمنحني (C) بجوار $-\infty$.
 - أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون: $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$.
 - ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، وأن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.
 - حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المقاربين.
 - أدرس اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها.
 - أنشئ المنحني (C) والمستقيمات المقاربة.
 - ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(1 - m)(e^x + 1) - 2e^x = 0$.

حل مختصر للمسألة رقم (01)

- لنظن لدينا: $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.
- 1) حساب النهاية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2e^x}{e^x + 1}\right) = 0$.
- لنظن بما أن: $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2e^x}{e^x + 1}\right) = 0$ ، إذن المستقيم ذو المعادلة: $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.
- 2) أ) التحقق أن: $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$.
- لدينا: $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ ، إذن يمكن كتابة: $f(x) = x - 1 + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ ، أي:
- $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$ ، ومنه: $f(x) = x - 1 + \frac{2e^x + 2 - 2e^x}{e^x + 1}$ ، وهو المطلوب.
- ب) حساب النهاية عند $+\infty$ (نستعمل العبارة الثانية).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x + 1}\right) = 0$.

سلطان) بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x + 1} \right) = 0$ و $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.
(3) تحديد الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة للمقاريين:

سلطان) ندرس إشارة: $f(x) - (x + 1) = -\frac{2e^x}{e^x + 1}$ ، نلاحظ أن: $-\frac{2e^x}{e^x + 1} < 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن: المنحني (C) يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$.

سلطان) ندرس إشارة: $f(x) - (x - 1) = \frac{2}{e^x + 1}$ ، نلاحظ أن: $\frac{2}{e^x + 1} > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن: المنحني (C) يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$.

(4) دراسة اتجاه تغير الدالة f : (نختار الشكل $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$).

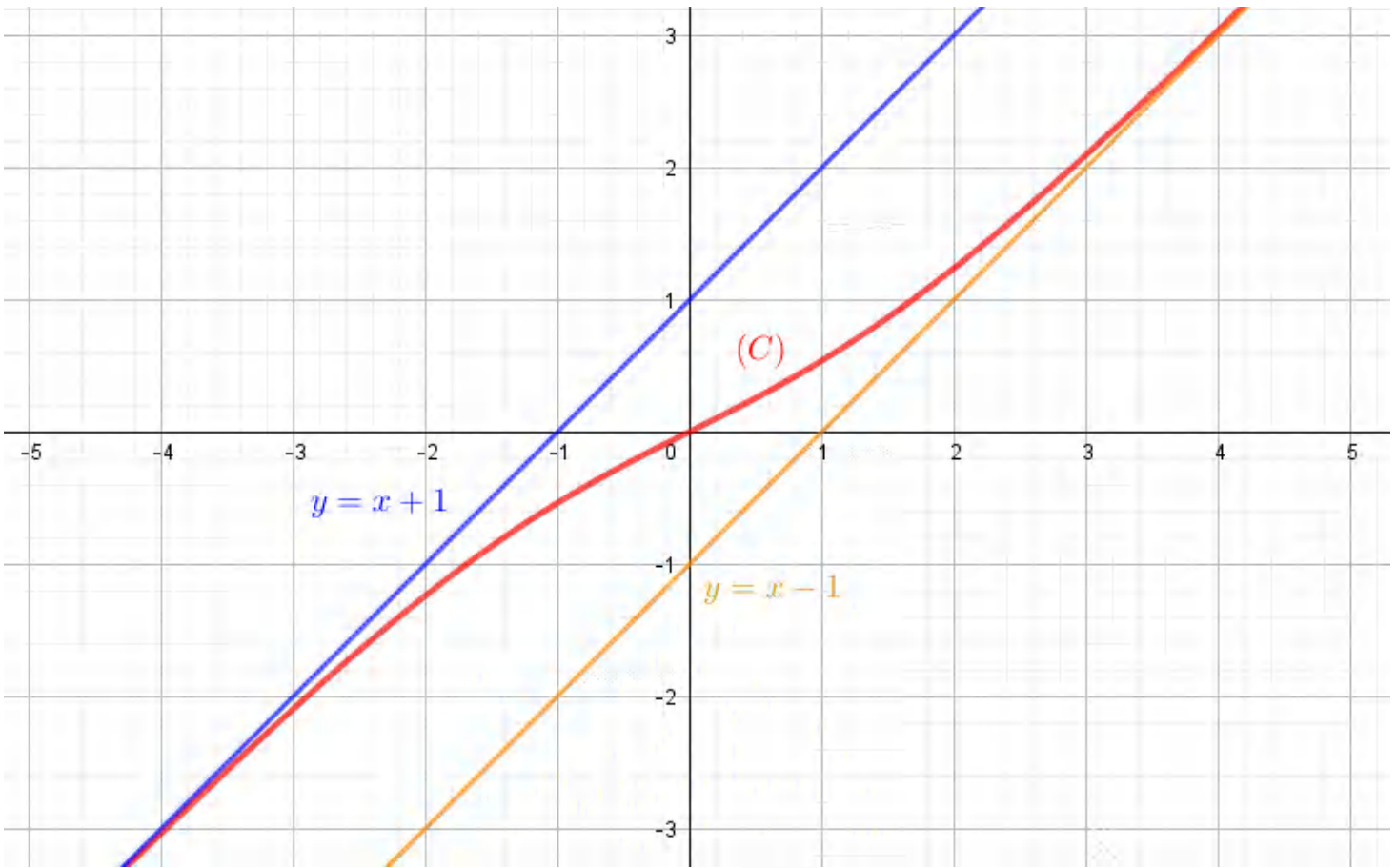
(*) الدالة المشتقة: $f'(x) = 1 + \frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x + 1)^2}$

ومنه: $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$ ، نلاحظ أن: $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن: الدالة f متزايدة تما على $\mathbb{R}$.

(*) جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



6 المناقشة البيانية :

لدينا : $(1 - m)(e^x + 1) - 2e^x = 0$ ، أي : $(1 - m)(e^x + 1) = 2e^x$ ، أي : $\frac{2e^x}{e^x + 1} = 1 - m$ ، أي :

$$- \frac{2e^x}{e^x + 1} = m - 1 \quad (\text{بإضافة } x + 1) : x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x + m \quad \text{ومنه : } f(x) = x + m$$

إذن : عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$ والذي يوازي المقاربيين

للمنحنى (C) هما : $y = x + 1$ و $y = x - 1$.

أي أن المناقشة البيانية تكون كما يلي :

١٤* : $m \in]-\infty; -1]$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

١٤* : $m \in [1; +\infty[$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

١٤* : $m \in]-1; 1[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد .

المسألة 02

- نعتبر الدالتان f_1 و f_0 المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_1(x) = \frac{1}{1+e^x}$ و $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.
- وليكن (C_0) و (C_1) منحاهما البيانيين في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- I 1) أحسب نهاية f_0 عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_0) .
- 2) بين أن النقطة $K(0; \frac{1}{2})$ هي مركز التناظر للمنحنى (C_0) .
- 3) أدرس تغيرات الدالة f_0 .
- 4) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_0) عند النقطة K .
- 5) أ) بين أنه لدراسة وضعية (T) بالنسبة إلى (C_0) يكفي دراسة إشارة العبارة: $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.
- ب) أحسب كلا من $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم عين مع التبرير إشارة $g''(x)$ ، $g'(x)$ ، $g(x)$ ، وذلك حسب قيم x .
- ج) استنتج وضعية المنحنى (C_0) بالنسبة إلى المماس (T) .
- د) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_0) .
- II 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون النقطتان: $M(x; f_0(x))$ و $M'(x; f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}$.
- 3) شكّل جدول تغيرات الدالة f_1 ، ثم أنشئ المنحنى (C_1) في نفس المعلم السابق.

ملخص مختصر للمسألة رقم 02

- I 1) حساب نهايات الدالة f_0 :
- (*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0 \dots \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ المنحنى (C_0) يقبل حامل محور الفواصل كمقارب بجوار $-\infty$.
- (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = 1$ المنحنى (C_0) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته: $y = 1$ ، بجوار $+\infty$.
- 2) لدينا النقطة $K(0; \frac{1}{2})$.
- (*) أولاً: D_{f_0} متناظرة بالنسبة إلى 0.

$$(*) \text{ ثانياً : نبين أن : } f_0(2a - x) + f_0(x) = 2b \text{ مع : } \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ أي : } f_0(-x) + f_0(x) = 1$$

$$(*) \text{ لنحسب : } f_0(-x) + f_0(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{e^x}{1 + e^x} \text{ أي : } f_0(-x) + f_0(x) = \frac{e^{-x} \times e^x}{(1 + e^{-x})e^x} + \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$\text{أي : } f_0(-x) + f_0(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^x} = 1 \text{ أي : } f_0(-x) + f_0(x) = \frac{1}{1 + e^x} + \frac{e^x}{1 + e^x}$$

إذن : النقطة K هي مركز التناظر للمنحنى (C_0) .

3) دراسة تغيرات الدالة f_0 :

$$(*) \text{ حساب } f'_0(x) : f'_0(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

نلاحظ أن : $f'_0(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، إذن : الدالة f_0 متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

(*) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_0(x)$	+	
$f_0(x)$	0	1

4) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة K :

$$\begin{cases} f'_0(0) = \frac{1}{4} \\ f_0(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ لأن : } (T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \text{ ومنه : } (T) : y = f_0(0)(x - 0) + f_0(0)$$

5) أ) دراسة وضعية (C_0) بالنسبة إلى (T) : ندرس إشارة الفرق $f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})$

$$\text{أي : } f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{x - 2}{4} = \frac{4e^x - x - xe^x - 2 - 2e^x}{4(e^x + 1)}$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{x-2}{4} = \frac{2e^x - xe^x - x - 2}{4(e^x + 1)}$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{g(x)}{4(1 + e^x)}$$

* لدينا : $4(1 + e^x) > 0$ ، إذن : لدراسة إشارة الفرق يكفي دراسة إشارة $g(x)$.

ب) حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

$$g'(x) = e^x - xe^x - 1 : \text{ومنه} , g'(x) = 2e^x - (e^x + xe^x) - 1 = 2e^x - e^x - xe^x - 1$$

$$g''(x) = -xe^x : \text{ومنه} , g''(x) = e^x - (e^x + xe^x) = e^x - e^x - xe^x$$

- إذن إشارة $g''(x)$ من إشارة $-x$.

(* إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	+	○	-
$g'(x)$	0 -	↗	↘ -

$$g''(0) = 0$$

(* إشارة $g'(x)$:

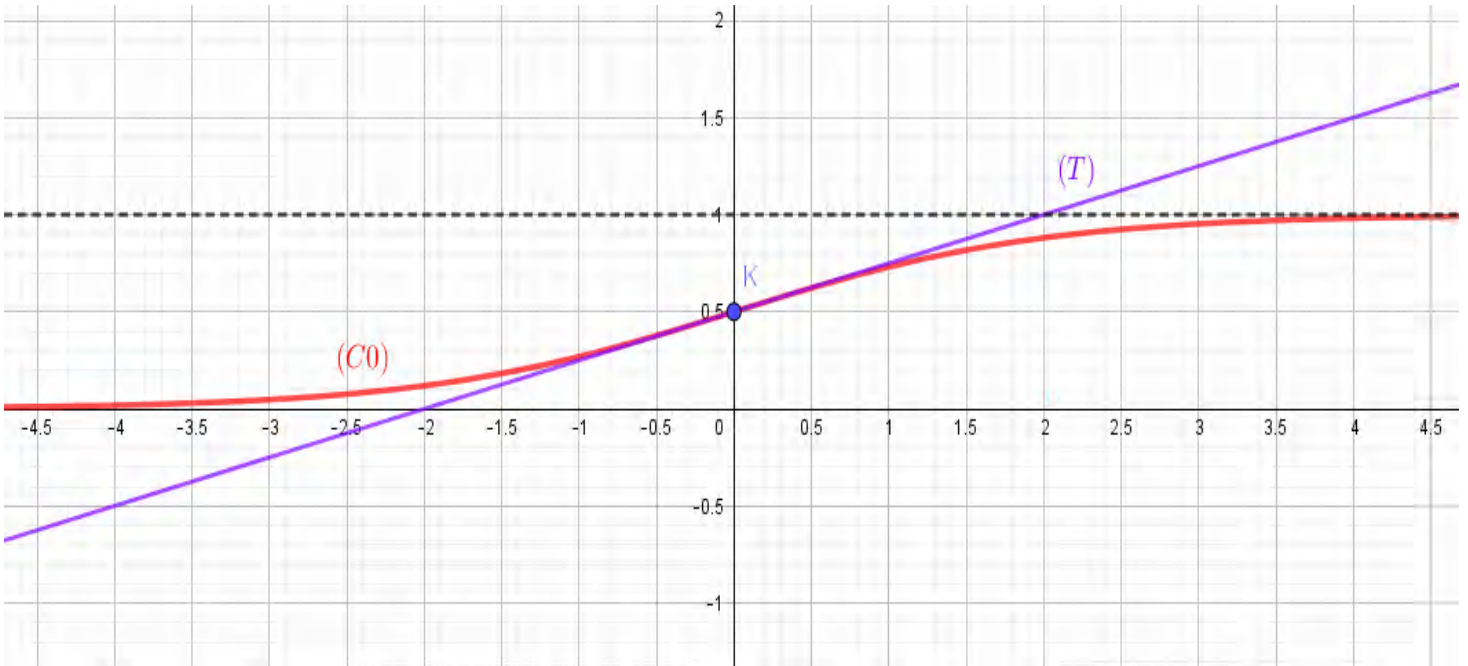
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	-
$g(x)$	+	↘	-

$$g'(0) = 0$$

ج) إشارة : $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+		-
الوضعية		(C_0) يخترق (T) عند النقطة K	(C_0) يقع تحت (T) (C_0) يقع فوق (T)

(*) إستنتاج: النقطة K تعتبر نقطة إنعطاف للمنحنى (C_0) .
(د) الإنشاء:



II) 1) تكون النقطتان $M(x; f_0(x))$ و $M'(x; f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}$ ،

إذا كان: $\frac{f_0(x) + f_1(x)}{2} = \frac{1}{2}$.

(*) نحسب: $\frac{f_0(x) + f_1(x)}{2} = \frac{\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{e^x+1}}{2} = \frac{e^x + 1}{2(e^x + 1)} = \frac{1}{2}$.

ومنه: M و M' متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة: $y = \frac{1}{2}$.

أي أن: (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة لهذا المستقيم .

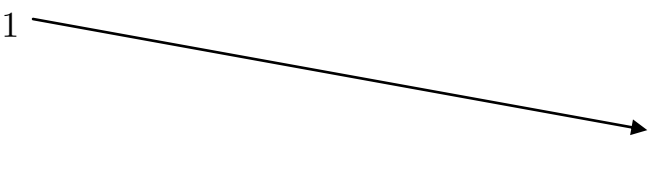
2) تشكيل جدول تغيرات الدالة f_1 :

بما أن (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم $y = \frac{1}{2}$ فإن: $\frac{f_0(x) + f_1(x)}{2} = \frac{1}{2}$ ،

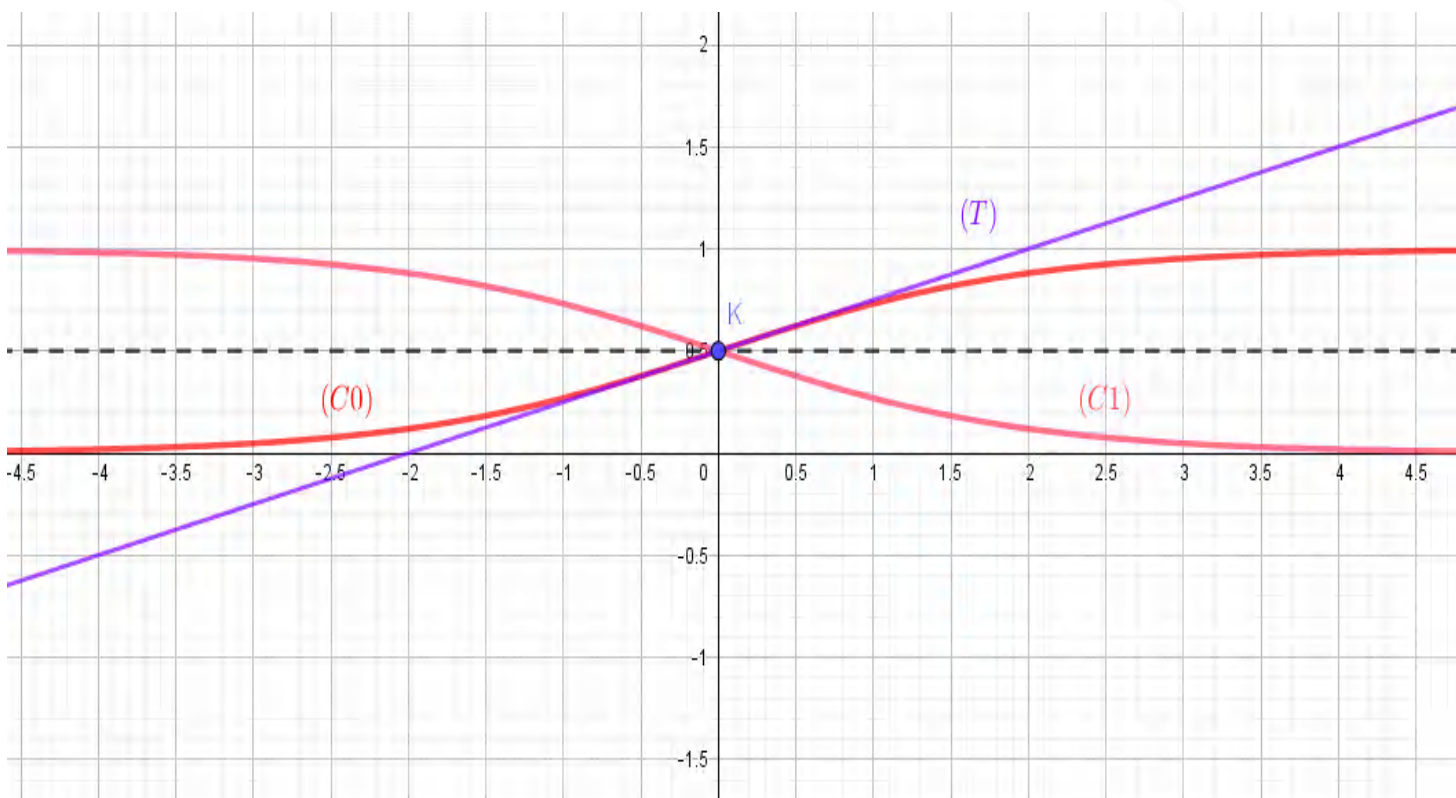
إذن: $\frac{f_0 + f_1}{2} = \frac{1}{2}$ ، أي: $f_0 + f_1 = 1$ ، ومنه: $f_1 = 1 - f_0$.

وعليه فإن: اتجاه تغير الدالة f_1 هو عكس اتجاه تغير الدالة f_0 .

(*) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	—	
$f_1(x)$		

(*) الإنشاء :



المسألة (03)

- I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^x - x - 1$.
 1) أحسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
 2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، وشكل جدول تغيراتها.
 3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$.

- (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، ثم فسر النتائج هندسياً.
 2) أحسب $f'(x)$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
 3) أ) عين معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
 ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى المماس (T).
 4) انشئ المماس (T)، والمستقيمات المقاربة، والمنحني (C).
 5) m وسيط حقيقي، ناقش بياناً وحسب قيم m حلول المعادلة: $f(x) = mx$.

حل مختصر للمسألة رقم (03)

I) لدينا: $g(x) = e^x - x - 1$.
 1) حساب النهايات:

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty \text{ لأن: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \end{cases}$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ لأن: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \end{cases}$$

2) دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها:

$$* \text{الدالة المشتقة: } g'(x) = e^x - 1.$$

- تكون $g'(x) \geq 0$ أي: $(0 \leq e^x - 1, \text{ أي: } e^x \geq 1)$ ، إذا كان: $x \geq 0$.

- تكون $g'(x) \leq 0$ أي: $(0 \geq e^x - 1, \text{ أي: } e^x \leq 1)$ ، إذا كان: $x \leq 0$.

إذن الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ ، و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

(*) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3) نحسب : $g(0) = 0$ ، وعليه نستنتج ونلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$\circ$	$+$

II) لدينا : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

1) حساب النهايات :

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x(\frac{e^x}{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = -1$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\frac{e^x}{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = 0$$

(*) التفسير الهندسي :

- بجوار $-\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y = -1$.

- بجوار $+\infty$ المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) لطلب حساب $f'(x)$:

$$* f'(x) = \frac{(e^x - x) - (e^x - 1) \times x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1 - x)$ ، أي :

تكون : $f'(x) \geq 0$ إذا كان : $x \leq 1$ وتكون : $f'(x) \leq 0$ إذا كان : $x \geq 1$.

(*) وعليه : الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty; 1]$ ومتناقصة على المجال $[1; +\infty[$.

* جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$	-1	$f(1)$	0

$$f(1) = \frac{1}{e-1} \approx 0,58$$

3 أ) معادلة المماس (T) :

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ لأن : } (T) : y = x \text{ ، ومنه : } (T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

ب) الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (T) : أي ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$:

$$f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{x(1 - e^x + x)}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{-x \times g(x)}{e^x - x}$$

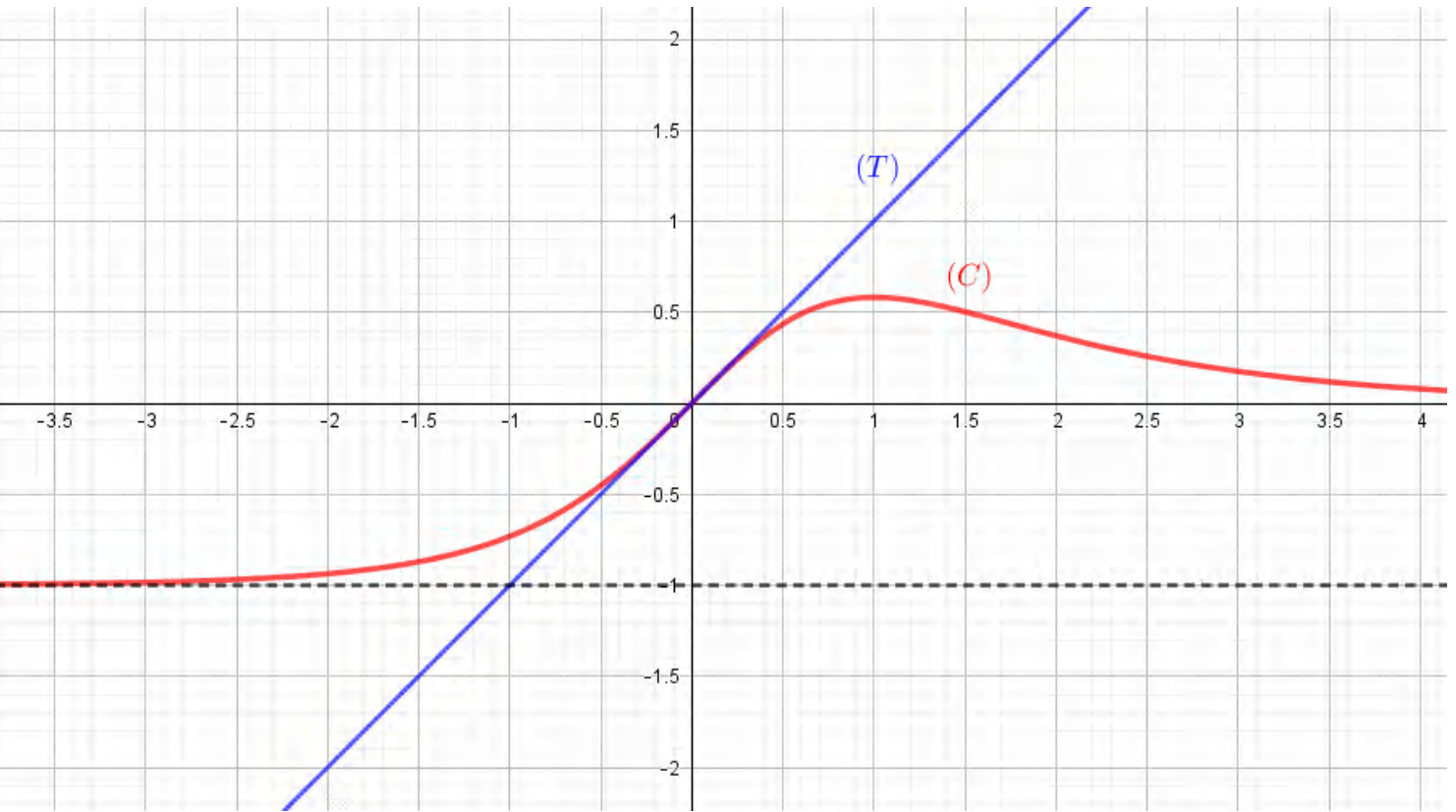
* لدينا من الجزء الأول : $g(x) \geq 0$ ، أي : $e^x - x - 1 \geq 0$ ، أي : $e^x - x \geq 1$ ، ومنه : $e^x - x \geq 0$.

إذن : إشارة $(f(x) - x)$ من إشارة $(-x \times g(x))$ ، وبما أن : $g(x) \geq 0$ ، فالإشارة من إشارة $(-x)$.

* نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	○	-
الوضعية	(C)	(C) يخترق (T) في النقطة O	(C) يقع تحت (T) يقع فوق (T)

ملاحظة : المبدأ O يعتبر نقطة إنعطاف للمنحني (C) .



5 المناقشة البيانية :

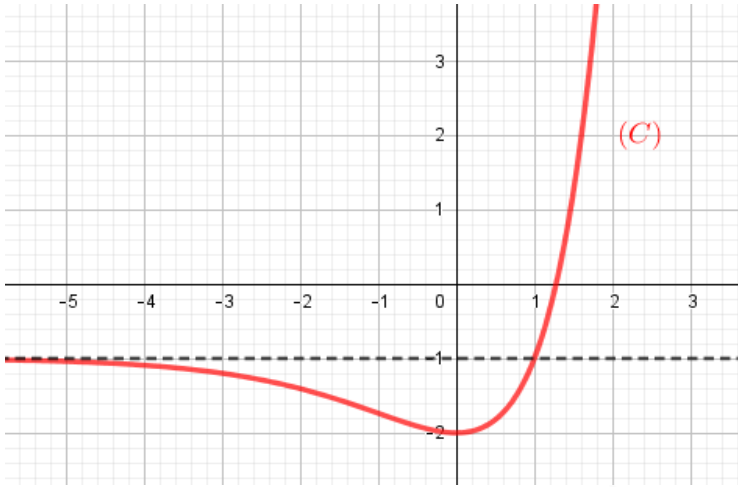
لدينا : $f(x) = mx$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ هذا الأخير يميز بالمبدأ O ، (مناقشة دورانية) .

* إذا كان : $0 < m < 1$ ، فإن : المعادلة تقبل ثلاث حلول .

* إذا كان : $m \geq 1$ أو $m \leq 0$ فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

المسألة 04

I) في الشكل المقابل: (C) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax + b)e^x + c$.
1) بقراءة بيانية:



أ) عين $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم استنتج قيمة c .

ب) عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ج) عين كلا من: $g(0)$ و $g'(0)$ ، ثم استنتج قيمتي كل من a و b .

2) نفرض فيما يلي: $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.

أ) شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور

بين: 1, 3 و 1, 2.

ج) استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ ، وليكن (C_f) منحنىها البياني في م.م.م.م. $(O; i; j)$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم حدد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها.

4) بين أن: $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = f(m)$.

حل مختصر للمسألة رقم 04

I) 1) بقراءة بيانية:

أ) لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ، ونعلم أن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(ax + b)e^x + c] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\underbrace{ax}_{0} \underbrace{e^x}_{0} + \underbrace{b}_{0} e^x + c) = c$$

إذن نستنتج أن: $c = -1$.

ب) لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

ج) لدينا: $g(0) = -2$ و $g'(0) = 0$.

لدينا: $g(0) = -2$ ، أي: $(a \times 0 + b)e^0 - 1 = -2$ ، أي: $b - 1 = -2$ ، ومنه: $b = -1$.

نحسب $g'(x)$: $g'(x) = a \times e^x + (ax + b)e^x = e^x(a + ax + b)$ ، لدينا: $g'(0) = 0$ ، أي:

$e^0(a + a \times 0 - 1) = 0$ ، أي: $a - 1 = 0$ ، ومنه: $a = 1$.

إذن : $g(x) = (x-1)e^x - 1$.
(2) أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

ب) الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1, 2; 1, 3]$ ، وبما أن : $\begin{cases} g(1, 2) = -... \\ g(1, 3) = +... \end{cases}$ ، أي : $g(1, 2) \times g(1, 3) < 0$.

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : $1, 2$ و $1, 3$.
ج) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\circ$	$+$

II) لدينا : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x + 1} = -\infty \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0 \quad (*)$$

(*) بجوار $+\infty$ المنحني (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) لدينا : $y = x : (\Delta)$ ، نحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1}$ ،

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1 \end{cases} \text{ : لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \frac{-xe^x}{e^x + 1} = 0 \text{ ومنه :}$$

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

(*) الوضعية: أي ندرس إشارة $\frac{-xe^x}{e^x + 1}$ ، إذن: الإشارة من إشارة $(-x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	$\circ$	$-$
الوضعية	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة O (C_f) يقع تحت (Δ) (C_f) يقع فوق (Δ)		

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

(*) نحسب: $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1) - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(-x + 1)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{-[(x - 1)e^x - 1]}{(e^x + 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$.

(*) جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

4) إثبات أن: $f(\alpha) = \alpha - 1$.

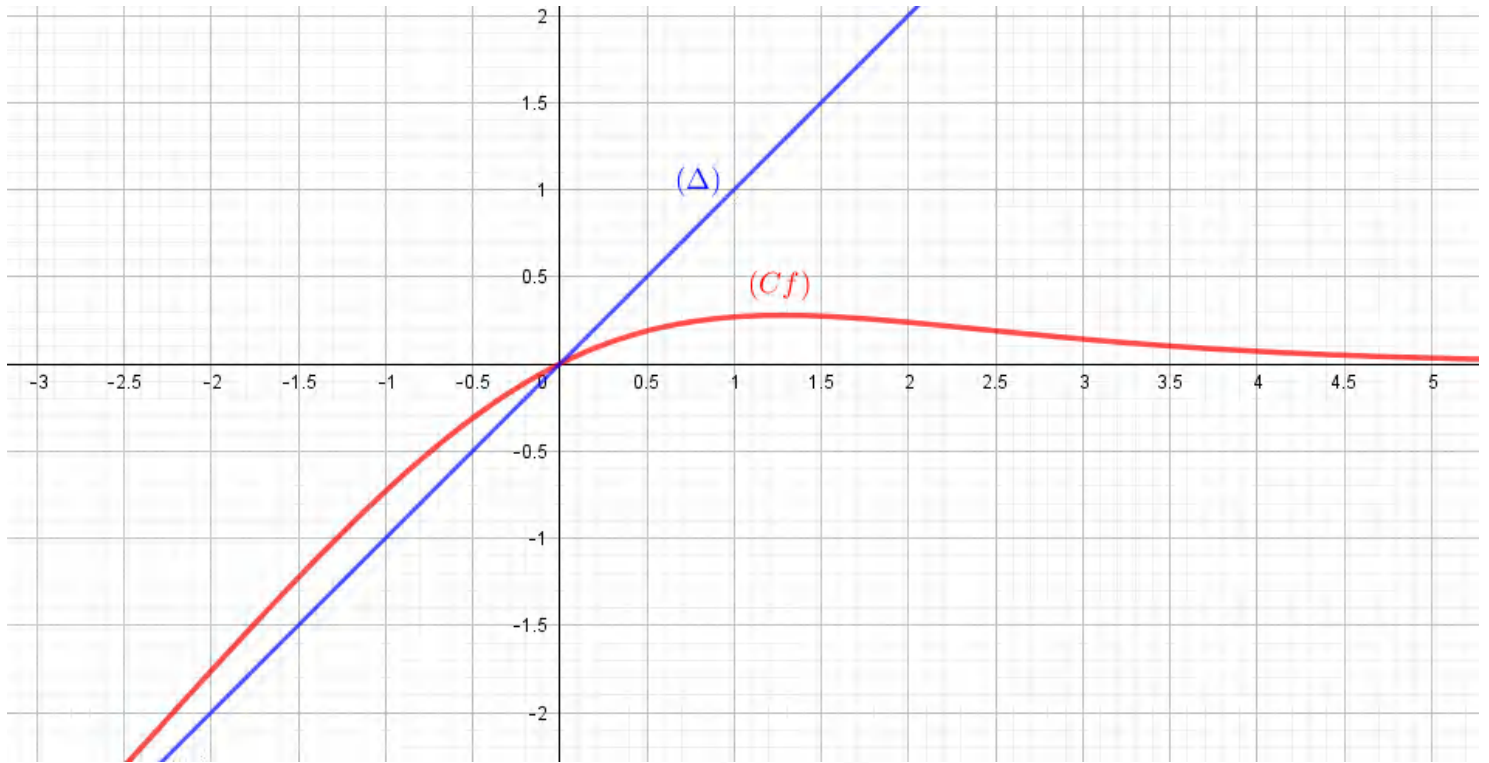
نعلم أن: $g(\alpha) = 0$ ، أي: $(\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$ ، أي: $(\alpha - 1)e^\alpha = 1$ ، ومنه: $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} = \frac{\alpha}{\frac{1 + \alpha - 1}{\alpha - 1}} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} = \alpha \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \alpha - 1$$

ومنه: $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، وهو المطلوب.

(*) حصر $f(\alpha)$: لدينا: $1, 2 < \alpha < 1, 3$ ، أي: $0, 2 < \alpha - 1 < 0, 3$ ، ومنه: $0, 2 < f(\alpha) < 0, 3$.

5) الإنشاء :



6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x) = f(m)$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور

الفواصل والذي معادلته : $y = f(m)$.

(*) إذا كان : $m \in]-\infty; 0]$ ، فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

(*) إذا كان : $m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ ، فإن : المعادلة تقبل حلان متميزان .

(*) إذا كان : $m = \alpha$ ، فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

المسألة (05)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \dots; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

الجزء الأول :

- برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 1$ مقارب للمنحني (C).
- أ) أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ ، وذلك من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$.
ب) ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة للدالة f ، وبالنسبة للمنحني (C) ؟
- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ تكون : $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.
- أدرس تغيرات الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها.

الجزء الثاني :

- نعتبر g الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.
- بين أنه في المجال $[0; +\infty[$ المعادلتان : $g(x) = 0$ و $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ متكافئتان.
 - برهن أن المعادلة $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث : $0,39 < \alpha < 0,40$.
 - نفرض (T_a) هو المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة a ، حيث : $a > 0$.
أ) بين أن المماس (T_a) يشمل المبدأ O ، إذا وافق إذا كان : $f(a) - xf'(a) = 0$.
ب) إستنتج أن المماس (T_a) المار بالمبدأ يمس المنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة α .
ج) أنشئ المماس (T_a) ، والمنحني (C) .
 - بقراءة بيانية ، أعط عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx$ ، وذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي m .
- ❖ تعطى النتيجة : $f'(\alpha) \approx 2,029$.

ملخص مختصر للمسائل رقم (05)

$$\text{لدينا : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \dots; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

الجزء الأول:

$$1) \text{ حساب النهاية عند } +\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ : لأن : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{1}{x}} \right) = 1 \end{cases}$$

ومنه : عند $+\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y = 1$: (Δ) .

$$2) \text{ أ) حساب النهاية : } (*) \dots \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

أي :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \right) + \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right) + \left(\frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} \right) \right]$$

$$\text{نجد } \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow -\infty \end{cases}, t = -\frac{1}{x} \text{ بوضع , } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\left(-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \right) + \left(-\frac{1}{x} \right)^2 e^{-\frac{1}{x}} - \left(-\frac{1}{x} \right)^3 e^{-\frac{1}{x}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ : إذن : } \lim_{t \rightarrow -\infty} t^n \times e^t = 0 \text{ : لأن : } \lim_{t \rightarrow -\infty} (*) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-te^t + t^2 e^t - t^3 e^t) = 0$$

ب) نستنتج أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0 ، والمنحني (C) يقبل عند المبدأ O مماسا هو حامل محور الفواصل .

3) حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x^2 - 2x(x^2 + x + 1)}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right)$$

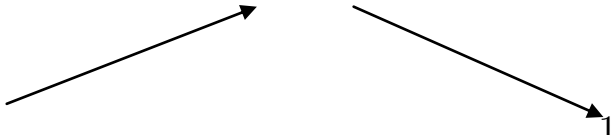
$$f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \text{ : ومنه : } f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left[\frac{2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x}{x^4} + \frac{x^2 + x + 1}{x^4} \right]$$

4) دراسة تغيرات الدالة f :

$$*) \text{ لدينا : } f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \text{ , إشارة } f'(x) \text{ من إشارة : } (1-x)$$

إذن : الدالة f متزايدة على المجال $[0;1]$ ومناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

(*) جدول التغيرات :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$	$3e^{-1}$ 		

الجزء الثاني:

$$g(x) = f(x) - xf'(x)$$

لدينا : $g(x) = 0$ معناه :

$$f(x) - xf'(x) = 0 \text{ ، أي :}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - x \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\text{أي : } \left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2} - \frac{1-x}{x^3} \right] e^{-\frac{1}{x}} = 0 \text{ ، أي : } \left[\frac{x^3 + x^2 + x - 1 + x}{x^3} \right] e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\left[\frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^3} \right] e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\text{أي : } \frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^3} = 0 \text{ ، ومنه : } x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$$

إذن : المعادلتان $g(x) = 0$ و $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ متكافئتان من أجل كل $x \in]0; +\infty[$

2) لنضع : $h(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ ، أي : $h'(x) = 3x^2 + 2x + 2$ ، نلاحظ أن : $\Delta < 0$ ، ومنه إشارة $h'(x)$ موجبة تماما ، إذن : الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

$$(*) \text{ الدالة } h \text{ مستمرة ورتيبة على المجال }]0, 39; 0, 40[\text{ و } \begin{cases} h(0, 39) = -... \\ h(0, 40) = +... \end{cases} \text{ ، أي : } h(0, 39) \times h(0, 40) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : 0, 39 و 0, 40 .

3) أ) معادلة المماس (T_a) هي : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

لدينا : (T_a) يمر بالمبدأ O معناه أن : $O \in (T_a)$ ، أي : $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$ ، ومنه : $f(a) - af'(a) = 0$ ، إذن هي محققة .

$$\text{ب) لدينا : } f(a) = \frac{a^2 + a + 1}{a^2} e^{-\frac{1}{a}} \text{ و } f'(a) = \frac{1-a}{a^4} e^{-\frac{1}{a}} \text{ ، ولعلنا أن : } f(a) - af'(a) = 0$$

$$\text{إذن : } \frac{a^2 + a + 1}{a^2} e^{-\frac{1}{a}} - a \frac{1-a}{a^4} e^{-\frac{1}{a}} = 0 \text{ ، أي : } \left[\frac{a^2 + a + 1}{a^2} - \frac{1-a}{a^3} \right] e^{-\frac{1}{a}} = 0 \text{ ، أي :}$$

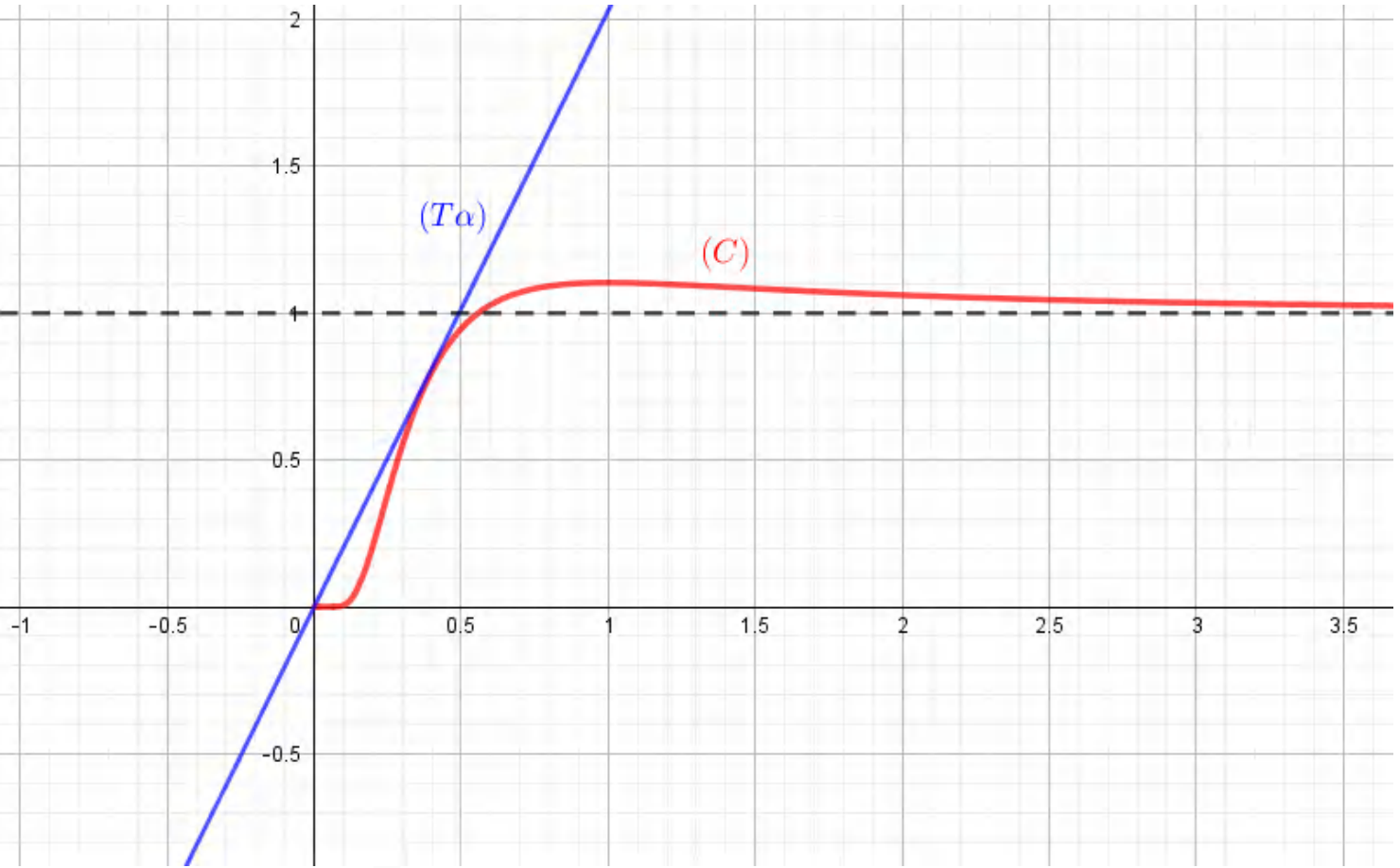
$$\left[\frac{a^3 + a^2 + a}{a^3} - \frac{1-a}{a^3} \right] e^{\frac{1}{a}} = 0 \text{ ، أي : } \frac{a^3 + a^2 + 2a - 1}{a^3} = 0 \text{ ، ومنه : } a^3 + a^2 + 2a - 1 = 0 .$$

وهذه الأخيرة تقبل حلا وحيدا α ، إذن : $a = \alpha$.

وعليه : فإن المماس (T_α) المار بالمبدأ O يمس المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة α .

(* معادلة المماس : $(T_\alpha) : y = 2,029x$.

ج) الإنشاء :



4) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x) = mx$.

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ هذا الأخير المار بالمبدأ O ، إذن : هناك مناقشة بيانية دورانية .

(* إذا كان : $0 < m < 2,029$ فإن : المعادلة تقبل حلين متميزين .

(* إذا كان : $m \geq 2,029$ أو $m \leq 0$ فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

حلول تمارين الدوال الأسبوعية الواردة في البكالوريا شعبة : علوم

التمرين 1 (بال 2008) (م 1) (ن 7,5)

(I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$.
تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1 cm .

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

(II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$.
(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ وفسر النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$)

(2) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

(3) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثيها.

(4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

(5) أرسم (C_g) .

(6) الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي: $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان

- عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة $1 - g(x)$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 .

(III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

حل مقترح للتمرين 1 (بال 2008)

(I) الدالة العددية المعرفة على $[-2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$

تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

$A \in (C_f)$ معناه: $f(-1) = 1$ أي: $(-a + b)e + 1 = 1$ ومنه: $a = b$.

معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$ معناه: $f'(-1) = -e$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[-2; +\infty[$ و: $f'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax + b) = (-ax - b + a)e^{-x}$

ومنه $f'(-1) = (2a - b)e$ ومما سبق $f'(-1) = -e$

بالمطابقة لدينا $2a - b = -1$ و $a = b$ ومنه نجد: $a = b = -1$.

(II) الدالة g معرفة على المجال $[-2; +\infty[$ ب: $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$.

(1) تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

$\lim_{u \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = \lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1)e^{-x} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) = 1$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

(2) دراسة تغيرات الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ و $g'(x) = -e^{-x} + (-e^{-x})(-x - 1) = xe^{-x}$

- اتجاه تغير الدالة g :

إشارة $g'(x)$ من إشارة x .

ومنه : من أجل $x \in [-2; 0]$ ، يكون $g'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-2; 0]$.

من أجل $x \in [0; +\infty[$ ، يكون $g'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$		+ 0 -	
$g(x)$	$e^2 + 1$	0	1

(3) تبين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثيها .

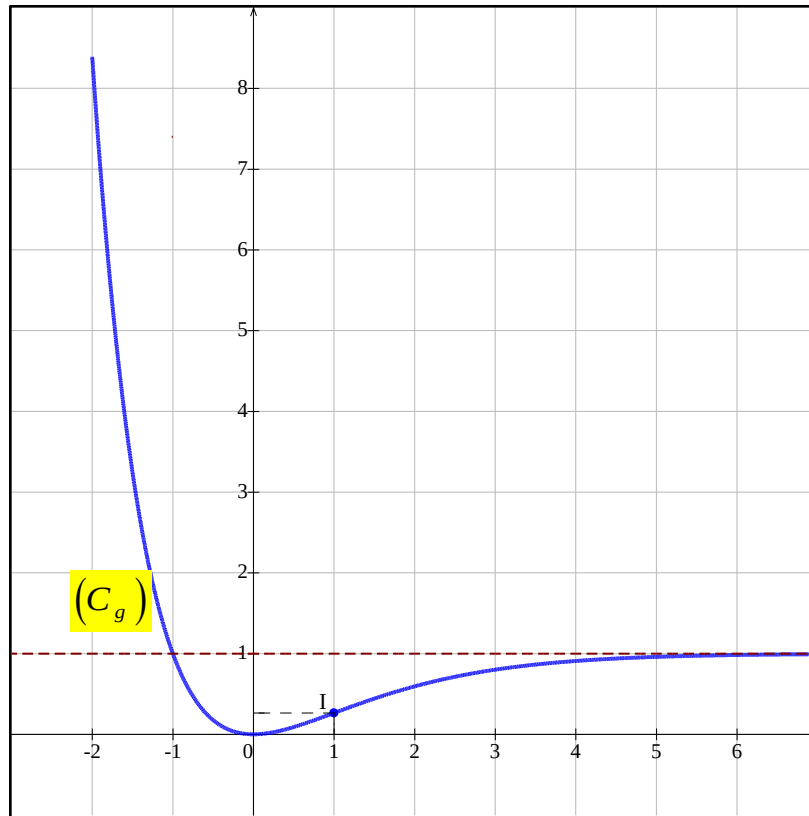
الدالة g' قابلة للاشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ ، و $g''(x) = (1-x)e^{-x}$.

إشارة $g''(x)$ من إشارة $1-x$ وبالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيرا إشارته ، ومنه $I\left(1; 1 - \frac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g) .

(4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

لدينا : $(T): y = g'(1)(x-1) + g(1)$ و منه $(T): y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$.

(5) الرسم :



(6) الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يلي : $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان .

- تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$.

الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ ، و $H'(x) = \alpha e^{-x} + (-e^{-x})(\alpha x + \beta) = (-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x}$.

H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$ معناه : $(-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$ ومنه نجد : $\alpha = 1$ و $\beta = 2$.

لدينا : $g(x) = g(x) + 1 - 1 = H'(x) + 1$ ومنه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل : $G(x) = H(x) + x + c$.

الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند 0 هي: $G(x) = (x+2)e^{-x} + x + 2$.

(III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2; +\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$

الدالة k قابلة للإشتقاق على المجال $[-2; +\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق،

$$k'(x) = 2xg'(x^2) = 2x(x^2e^{-x^2}) = 2x^3e^{-x^2} \text{ و}$$

إتجاه تغير الدالة k :

إشارة $k'(x)$ من إشارة x .

ومنه: من أجل $x \in [-2; 0]$ ، يكون $k'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة k متناقصة على المجال $[-2; 0]$.

من أجل $x \in [0; +\infty[$ ، يكون $k'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة k متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة k :

x	-2	0	$+\infty$
$k'(x)$		+ 0 -	
$k(x)$	$1 - 5e^{-4}$		1

التمرين 2 (باك 2010) (م 2) (ن 7)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أـ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب: $y = x + 1$ و $y = x$.

بـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

(4) أثبت أن النقطة $\omega \left(0; \frac{1}{2} \right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) أـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.

بـ هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

دـ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x} = m$

حل مقترح للتمرين 2 (باك 2010)

الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

(1) أـ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty$

بـ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[x - \frac{1}{e^x - 1} \right] = -\infty$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور الترتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f'(x) = 1 - \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

ومنه: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من

المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(3) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{e^x - 1} \right] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{e^x - 1} - 1 \right] = 0$ ومنه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ دراسة وضعيّة المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $1 - e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

• دراسة وضعيّة المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') :

لدينا : $f(x) - y = -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = \frac{e^x}{1 - e^x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $1 - e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+		-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')		(C_f) تحت (Δ')

(4) إثبات أن النقطة $\omega \left(0; \frac{1}{2} \right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$ و $f(-x) + f(x) = -\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^{-x} - 1} = -\frac{1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2}$ ومنه النقطة $\omega \left(0; \frac{1}{2} \right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

(5) أتبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.

• الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و $]0; +\infty[$ و $[\ln 2; 1[$ أي $f(1) \times f(\ln 2) < 0$ أي $\begin{cases} f(1) \approx 0,41 \\ f(\ln 2) \approx -0,31 \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا α ، حيث $\ln 2 < \alpha < 1$.

• الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و $]-\infty; 0[$ و $]-1,4; -1,3[$ أي $f(-1,3) \approx 0,07$ و $f(-1,4) \approx -0,07$

أي $f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 0[$ حلا وحيدا β ، حيث $-1.4 < \beta < -1.3$.

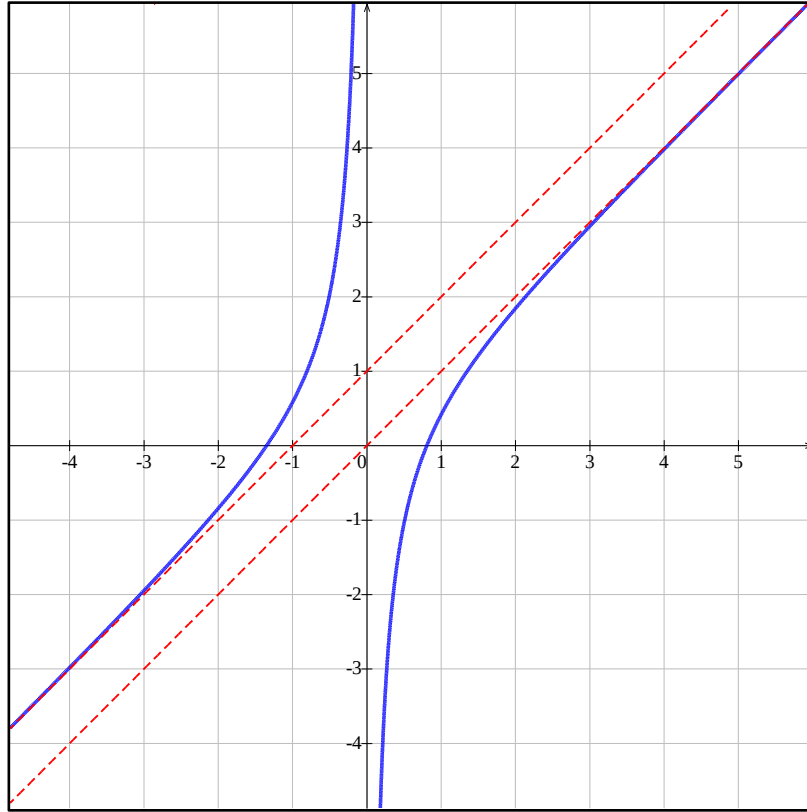
بـ دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $f'(x) = 1$.

الأسناز: بوشناق يوسف

لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 1$ تكافئ $1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$ أي $e^x = 0$ وهذا مستحيل وبالتالي المعادلة ليس لها

حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) .
جـ- الرسم :



د- المناقشة البيانية :

لدينا : $(m-1)e^{-x} = m$ تكافئ $m-1 = me^x$ تكافئ $m = -\frac{1}{e^x - 1}$ تكافئ $m + x = x - \frac{1}{e^x - 1}$

تكافئ $f(x) = x + m$ ، ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$.

إذا كان $m \in]-\infty; 0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان $m \in [0; 1[$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m \in [1; +\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب .

التمرين 3 (باك 2011) (م 2) (ن 7)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x - ex - 1$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ ، تقبل في المجال $]1, 75; 1, 76[$ حلا وحيدا α .

د- أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 2]$.

(3) أ- أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = \alpha$ ، $x = 0$.

ب- أثبت أن: $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$ (ua هي وحدة المساحات)

حل مقترح للتمرين 3 (باك 2011)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^x - ex - 1$.

(1) أ- حسب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - ex - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - ex - 1) = +\infty$$

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - e$

$f'(x) = 0$ تكافئ $e^x - e = 0$ تكافئ $e^x = e$ تكافئ $x = 1$.

من أجل $x \in]-\infty; 1]$ ، يكون $e^x \leq e$ أي $f'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$.

من أجل $x \in [1; +\infty[$ ، يكون $e^x \geq e$ أي $f'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

(2) أ- لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - ex - 1 - (-ex - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- كتلة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

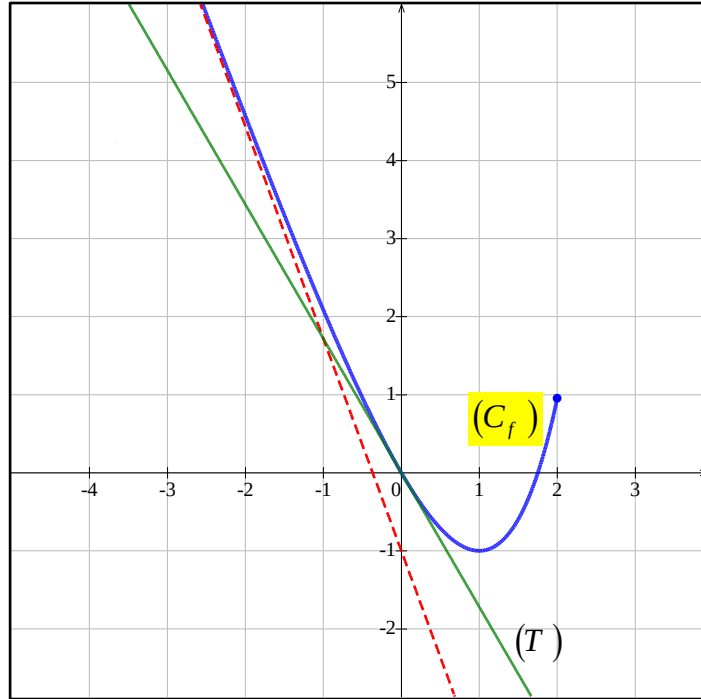
لدينا: $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ومنه $(T): y = (1 - e)x$.

جـ-تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,75; 1,76[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ و $]1,75; 1,76[$ و $f(1.75) \approx -0,002$ و $f(1.76) \approx 0,02$

أي $f(1,75) \times f(1,76) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75 < \alpha < 1.76$.

د-الرسم:



3) أ- حساب، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \alpha$ و $x = 0$.

$$A(\alpha) = -\int_0^{\alpha} f(x) dx = -\int_0^{\alpha} (e^x - ex - 1) dx = -\left[e^x - \frac{1}{2}ex^2 - x \right]_0^{\alpha} = 1 - \left(e^{\alpha} - \frac{1}{2}e\alpha^2 - \alpha \right)$$

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua \quad \text{بـ إثبت أن:}$$

لدينا: $f(\alpha) = 0$ ومنه $e^{\alpha} - e\alpha - 1 = 0$ أي $e^{\alpha} = e\alpha + 1$ وبالتالي:

$$A(\alpha) = -e^{\alpha} + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = -(e\alpha + 1) + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \right) ua$$

(ua هي وحدة المساحات)

التمرين 4 (باك 2012) (م 2) (ن 7)

- (I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - xe^x$.
- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 - أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 - أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1; +\infty[$ بتحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - لتكن f' مشتقة الدالة f . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$ ، استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - أ- بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})
 - أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ بأدرس وضعيته (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 - أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6 < x_1 < -1.5$ و $1.5 < x_2 < 1.6$. بأنشئ (Δ) و (C_f) .
 - لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$ أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $xe^x \mapsto x$ على $\mathbb{R}$. بأستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

حل مقترح للتمرين 4 (باك 2012)

- (I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - xe^x$.
- حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1$
 - دراسة اتجاه تغير الدالة g :
- الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = -1 \times e^x + (-x)e^x = -(x+1)e^x$ بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$ ، ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$

وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-1; +\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty; -1]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$- 0 +$	
$g(x)$	1	$1+e^{-1}$	$-\infty$

(3) أتيان أن المعادلة $g(x) = 0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1; +\infty[$:

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ و $\begin{cases} g(-1) = 1+e^{-1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$.

بالتحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$:

لدينا: $]-1; +\infty[\supset]0.5; 0.6[$ و $\begin{cases} g(0.5) \approx 0.18 \\ g(0.6) \approx -0.09 \end{cases}$ ومنه $0.5 < \alpha < 0.6$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		$- 0 +$	

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^x - x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x - e^x - x - 1] = +\infty$$

(2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 2]$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 2]$:

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x - 1 = e^x + xe^x - e^x - 1 = xe^x - 1 = -(1 - xe^x) = -g(x)$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$:

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$		$+ 0 -$	

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$		$+ 0 -$	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$e^2 - 3$

(3) تبيان أن: $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$.

لدينا: $f(\alpha) = (\alpha-1)e^\alpha - \alpha - 1$ ، ولدينا من جهة $g(\alpha) = 0$ يكافئ $1 - \alpha e^\alpha = 0$ يكافئ $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

ومنه $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ أي $f(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{(\alpha - 1) - \alpha^2 - \alpha}{\alpha} = \frac{-\alpha^2 - 1}{\alpha}$

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$$\frac{1,25}{0,6} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < \frac{1,36}{0,5} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} \frac{1}{0,6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,5} \\ 1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36 \end{cases}$$

يكافئ $0,5 < \alpha < 0,6$ أي $-\frac{1,36}{0,5} < -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) < -\frac{1,25}{0,6}$

(4) ألدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x - 1)e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) = 0$

ومن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا: $f(x) - y = (x - 1)e^x$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x - 1$ على المجال $]-\infty; 2]$.

x	$-\infty$	1	2
$f(x) - y$		$+ 0 -$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ) / (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; -2)$ / (C_f) تحت (Δ)		

(5) أختيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1,6 < x_1 < -1,5$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.

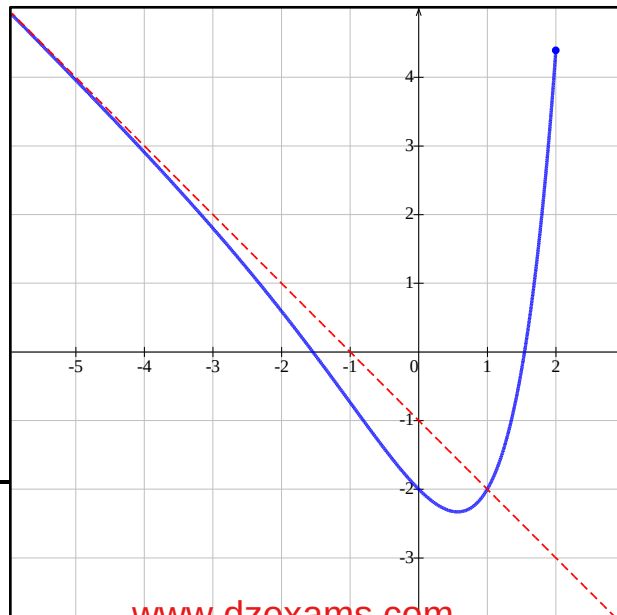
الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و $]-\infty; \alpha]$ و $]-1,6; -1,5[$ و $f(-1,5) \approx -0,05$ و $f(-1,6) \approx 0,07$

أي $0 < f(-1,6) \times f(-1,5)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1,6 < x_1 < -1,5$ و يحقق $f(x_1) = 0$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha; 2]$ و $[\alpha; 2]$ و $]1,5; 1,6[$ و $f(1,5) \approx -0,26$ و $f(1,6) \approx 0,37$

أي $0 < f(1,5) \times f(1,6)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1,5 < x_2 < 1,6$ و يحقق $f(x_2) = 0$.

بالرسم:



(C_f)

- (6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = (ax + b)e^x$.
 أتعين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.
 الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$ ،
 الدالة h أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ يعني : $h'(x) = xe^x$ ، ومنه بالمطابقة نجد : $a = 1$ و $b = -1$ أي $h(x) = (x - 1)e^x$.
 بإستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:
 لدينا : $g(x) = 1 - xe^x$ ومنه دالة أصلية للدالة g من الشكل : $G(x) = x - (x - 1)e^x$.

التمرين (5) (بالك 2013 م 1) (6,5 ن)

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

- (I) f الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$.
 و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .
 (2) أحسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 (3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصارا للعدد α .
 (4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.
 (5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة .
 (II) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ : $g(x) = f(2x - 1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)
 (1) أدرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 (2) أ- تحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن : $2f'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$.
 ب- استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.
 ج- تحقق من أن : $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

حل مقترح للمسئلة (5) (بال 2013)

(I) الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ ب: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$.

(1) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 1 \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = 2$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C).

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(e^{\frac{1}{x-1}} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = -\infty$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C).

(2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 1[$:

$$f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1 \times x}{(x-1)^2} + \left(\frac{-1}{(x-1)^2} \right) e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right)$$

بما أن $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	$-\infty$	2

(3) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

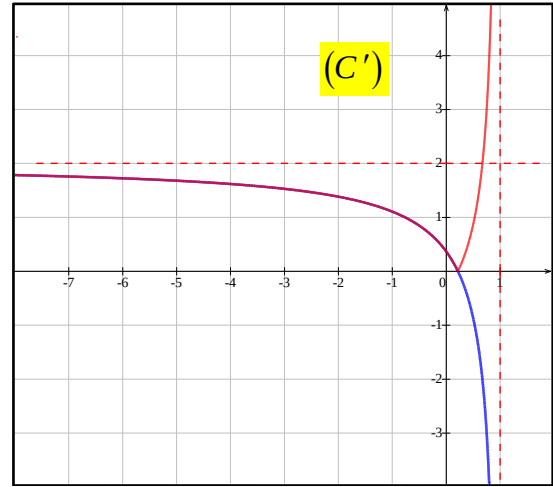
الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

حسب جدول القيم : $0,21 < \alpha < 0,22$.

(4) الرسم :



(5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة $|f(x)| = m$ بيانها هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y = m$.

من أجل $m \in \left[\frac{1}{e}; 2 \right]$ المعادلة $|f(x)| = m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

(II) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x - 1)$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(2x - 1) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x - 1) = 2$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 1[$: $g'(x) = 2f'(2x - 1)$.
بما أنه من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$, $(2x - 1) \in]-\infty; 1[$ فإن $f'(2x - 1) < 0$ ، وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	1
$g'(x)$		-
$g(x)$	2	$-\infty$

(2) أ-التحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$:

$$\text{لدينا: } g(x) = f(2x - 1) \text{ ومنه } g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = f(\alpha) = 0$$

$$\text{تبيان أن: } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$$

$$\text{لدينا: } g'(x) = 2f'(2x - 1) \text{ ومنه } g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = 2f'(\alpha)$$

بد استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

لدينا: $(T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ومنه $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$.

ج-- التحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

لدينا: $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ ، لكن $f(\alpha) = 0$ وهذا يعني $e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ومنه $f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$

إذن: $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ أي $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$

التمرين 6 (بال 2015) م 2 ن 6

- (I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.
 - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.
 - استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- (II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - أبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.
 - بـ استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$.
 - أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
 - أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.
 - أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}]$ ، نأخذ $f(-\alpha) \approx 0,1$.
 - أتحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.
 - بـ استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

حل مقترح للتمرين 6 (بال 2015)

- (I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.
- دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:
الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = -2 - 2e^{2x-2} = -2(1 + 2e^{2x-2})$.
لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
 - تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) \left(\frac{1 - 2x}{2x - 2} - \frac{e^{2x-2}}{2x - 2} \right) = -\infty$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.
التحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.
لدينا : $\begin{cases} g(0,36) \approx 0,002 \\ g(0,37) \approx -0,02 \end{cases}$ أي : $g(0,36) \times g(0,37) < 0$ ومنه $0,36 < \alpha < 0,37$.
 - إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		$-$	$+$

- (II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.
- أبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.
 - الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2}) = e^{2x+2}(1 - 2(-x) - e^{2(-x)-2}) = e^{2x+2}g(-x)$$

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		$+ \ 0 \ -$	

نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; -\alpha]$ و متزايدة على $[-\alpha; +\infty[$.
(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = +\infty$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{2x+2} - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

x	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$+ \ 0 \ -$	$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{2x+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}e^2 \times 2xe^{2x} \right) = 0 \quad (3)$$

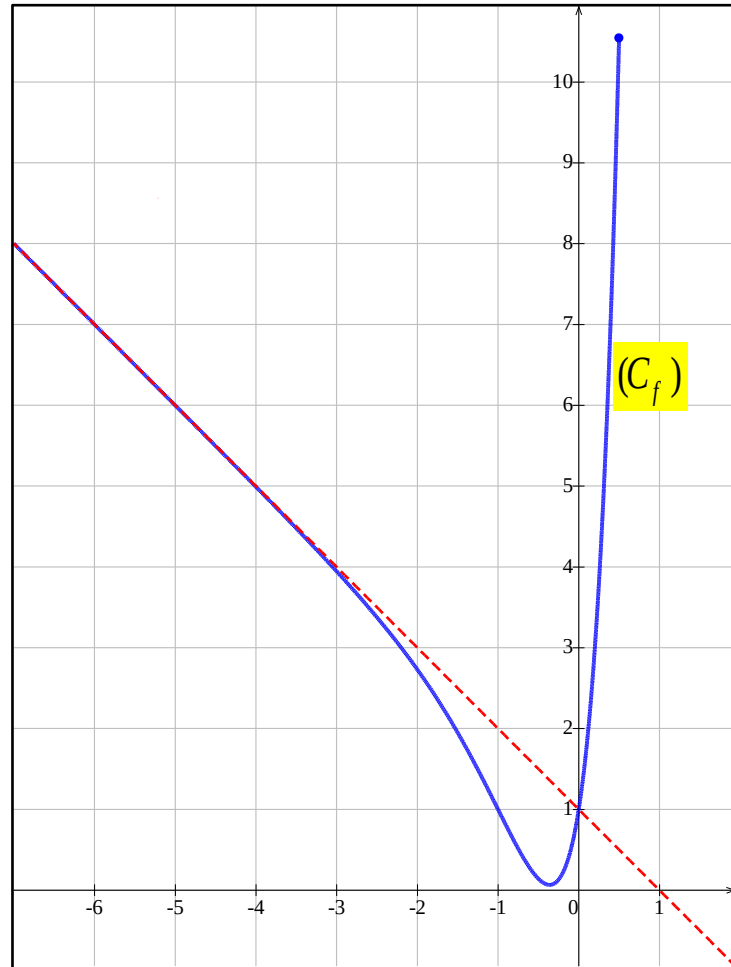
التفسير الهندسي : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - (-x + 1) = xe^{2x+2}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		$+ \ 0 \ -$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)

(5) الرسم :



(6) أ. التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 2xe^{2x+2} - 2x + 2 + e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 - (4x + 4)e^{2x+2} = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

ب. إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$

$$. f(x) = -\frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2} - x - \frac{3}{2}e^{2x+2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[-f(x) + f'(x) + x - x^2 - \frac{3}{2}e^{2x+2} \right] + c \text{ من الشكل :}$$

$$. F(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{2x+2} - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 + c \text{ أي :}$$

التمرين (7) - باك 2016 - الدورة الأولى - (2م) (7ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1.52 < \alpha < -1.51$.
ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = -g(x)$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha) \approx 0.38$)

د- عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

(2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج- بين أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيهما.

د- أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

هـ- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$ على المجال $[-2; +\infty[$.

(III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = x + f(x)$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

(1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

(2) أ- أحسب التكامل التالي: $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماما وفسر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

حل مقترح للتمرين (7) - باك 2016 - الدورة الأولى -

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

(1) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}] = +\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x - 1)e^{-x} = (-x^2 + x + 2)e^{-x} = (2 - x)(x + 1)e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x+1)(2-x)$:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$	$-$

الدالة g متزايدة على المجال $[-1; 2]$ ومتناقصة على كل من المجالين $]-\infty; -1]$ و $[2; +\infty[$.
جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$1-e$	$1+5e^{-2}$	1	

(3) أختيان أن المعادلة $g(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1.52 < \alpha < -1.51$.

$$g(0) = 1 + (0^2 + 0 - 1)e^0 = 1 - 1 = 0$$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ و $]-1.52; -1.51[\subset]-\infty; -1]$ و $g(-1.52) \approx 0,041$
 $g(-1.51) \approx -0,040$

أي $g(-1.52) \times g(-1.51) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; -1]$ حلا
وحيدا α حيث: $-1.52 < \alpha < -1.51$.

بإشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$		
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$.

(1) أ. حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}] = +\infty$$

ب. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = -1 + (2x + 3)e^{-x} - (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = -1 - (x^2 + x - 1)e^{-x} = -g(x)$$

ج. جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	2	$-\infty$	

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = -g(\alpha) = 0$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم. (يوازي لحامل محور الفواصل).

(2) أ- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا: $f(x) - (-x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = (x+1)(x+2)e^{-x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x+1)(x+2)$.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$		
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)		(Δ) تحت (C_f)		(Δ) فوق (C_f)	
	(Δ) يقطع (C_f)		(Δ) يقطع (C_f)			
	في النقطة $B(-2;2)$		في النقطة $A(-1;1)$			

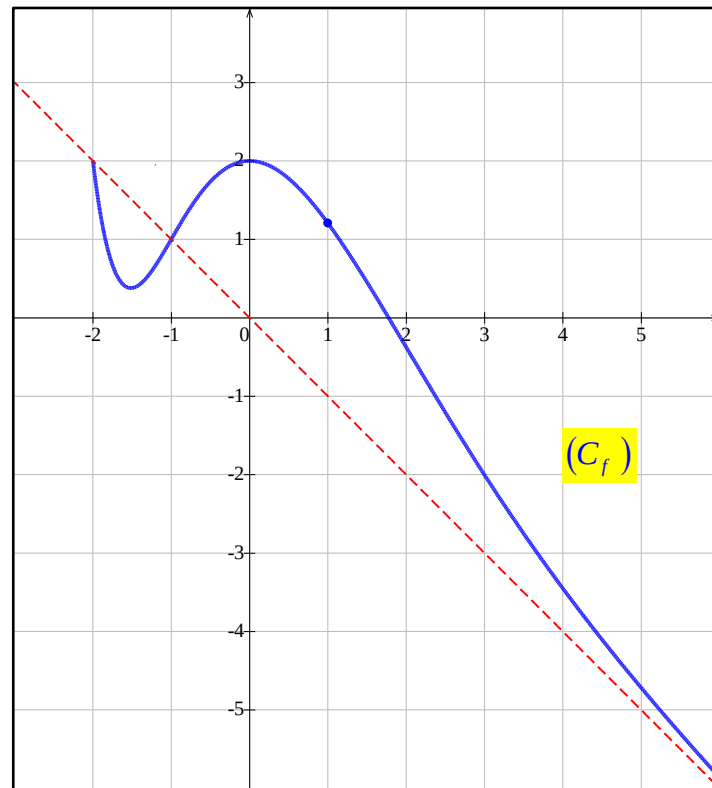
ج- تبين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف:

لدينا: الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -g'(x) = (x-2)(x+1)e^{-x}$ ، إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

ومن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما: $A(-1; 1)$ و $C(2; -2 + 12e^{-2})$.

د- الرسم:



هـ- المناقشة البيانية:

المعادلة $(x^2 + 3x + 2)e^{-x} = 0$ تكافئ $(m-x)e^x = -m$ ، $f(x) = -m$

- حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -m$.
- لما $m \in]-f(\alpha); +\infty[$ يكون $m \in]-\infty; f(\alpha)$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .
- لما $m = -f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر سالب .
- لما $m \in]-2; -f(\alpha)$ يكون $m \in]f(\alpha); 2]$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان والآخر موجب .
- لما $m = -2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر معدوم .
- (III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = x + f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
- (1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:
- H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني : من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x) = h(x)$.
- الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ،
- $$H'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$
- ومنه بالمطابقة نجد : $a = -1$ ، $b = -5$ و $c = -7$ أي $H(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$.
- (2) أ- حساب التكامل : $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} h(x) dx$ ، حيث $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
- $$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} h(x) dx = [H(x)]_0^{\lambda} = (-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7$$
- التفسير الهندسي :
- $A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ والمستقيمين اللذين معادليهما $x = 0$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
- ب- $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [(-\lambda^2 - 5\lambda - 7)e^{-\lambda} + 7] = 7$.

التمرين (8) - باك 2016 - الدورة الثانية - (م 2) (ن 6)

- (I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.
- (2) أـ أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)
 بـ - بين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$
 جـ - أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 (3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,37 < \alpha < -1,38$.
 (4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .
- (II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 بـ - بين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2}$ (حيث f' هي مشتق الدالة f).
 جـ - أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 (2) أـ بين أن : $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 بـ - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
 جـ - أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha) \approx 0,29$).

حل مقترح للتمرين (8) - باك 2016 - الدورة الثانية -

- (I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.
- (1) أـ الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = 2e^x - 2x - 1$
 دراسة اتجاه تغير الدالة g' :
 الدالة g' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x) = 2e^x - 2 = 2(e^x - 1)$
 إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$		$+$	$-$

- الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.
 بـ - تبين أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$
 الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0) = 1$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$
 جـ - $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2e^x}{x^2} - 1 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2 - x) = -\infty$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1,38) \approx -0,02 \\ g(-1,37) \approx 0,001 \end{cases}$ أي $g(-1,38) \times g(-1,37) < 0$ ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.

(3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$

(1) أ حساب النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 e^x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1 - x e^{-x}} \right) = +\infty$$

بـ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{(2x e^x + x^2 e^x)(e^x - x) - (e^x - 1)x^2 e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{x e^x [(2+x)(e^x - x) - x(e^x - 1)]}{(e^x - x)^2} = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$$

جـ دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha; 0]$ و متزايدة على كل من المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0	$+\infty$

(2) أ تبين أن: $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 e^\alpha}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\alpha^2 \left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} \right)}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \alpha} = \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + \alpha)}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{\alpha - 1} \text{ ومنه } e^\alpha = \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \text{ أي } g(\alpha) = 0 \text{ لدينا}$$

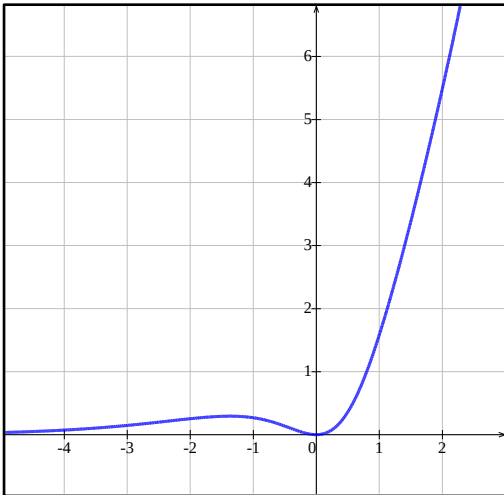
$$\text{أي: } f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$$

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

$$\text{لدينا: } -1,38 < \alpha < -1,37 \text{ يكافئ } \begin{cases} -0,76 < 2\alpha + 2 < -0,74 \\ (-1,37)^2 < \alpha^2 < (-1,38)^2 \\ -2,38 < \alpha - 1 < -2,37 \\ -\frac{2}{2,37} < \frac{2}{\alpha - 1} < -\frac{2}{2,38} \end{cases} \text{ ومنه } 0,27 < f(\alpha) < 0,32$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 e^x}{e^x - x} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^2}} \right) = 0 \text{ بـ}$$

التفسير البياني: المنحنى (C_f) والمنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x \mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.
جـ- الرسم:



التمرين (9) باك 2017 - الدورة العادية - (2م) (7ن)

- (I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيراً هندسياً للنتيجة، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (2) أبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) أكتب معادلة (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
- (II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = 1 - x e^{1-x}$.
- (1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .
- (2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.
- (3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty]$.
- (4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.
- تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 1$.

حل مقترح للتمرين (9) باك 2017 - الدورة العادية -

- (I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.
- (1) تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e \times x^2 e^{-x}) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = 2$.
- التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x^2 e^{1-x}) = -\infty$.
- (2) الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ،
- $$f'(x) = -2x e^{1-x} + x^2 e^{1-x} = (x^2 - 2x) e^{1-x} = x(x-2) e^{1-x}$$
- بـ دراسة اتجاه تغير الدالة f :
- إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-

الدالة f متناقصة على المجال $[0; 2]$ و متزايدة على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[2; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	2	$2 - 4e^{-1}$	2

(3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

لدينا: $(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه $(T): y = -x + 2$.

الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.

(1) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$.

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x} = (x - 1)e^{1-x}$.

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ ومتزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $h(1) = 0$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$.

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) :

لدينا: $f(x) - y = 2 - x^2e^{1-x} + x - 2 = x(1 - x)e^{1-x} = xh(x)$.

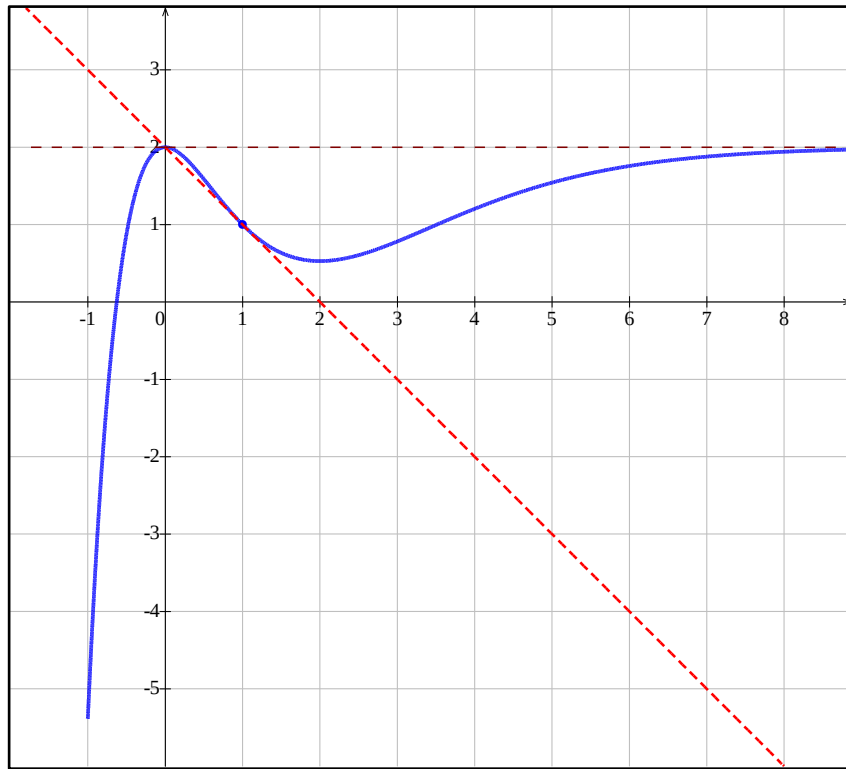
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+	+
الوضع النسبي	(C_f) فوق (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) فوق (T)

(2) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ و $]-\infty; 0[\subset]-0,7; -0,6[$ و $f(-0,7) \approx -0,7$ و $f(-0,6) \approx 0,2$.

أي $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

(3) الرسم :



(4) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.

- التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

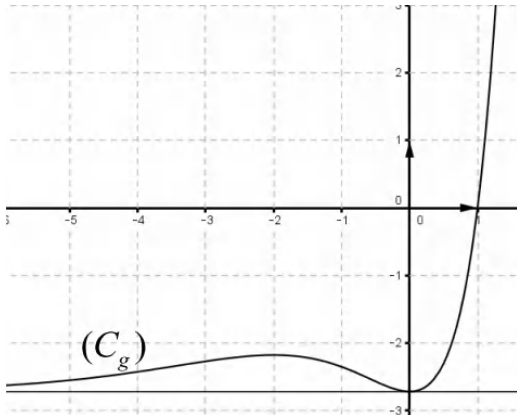
الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x) = 2 + (2x + 2)e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = 2 - x^2e^{1-x} = f(x)$$

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محاور الفواصل المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

$$S = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (7 - 2e) u.a$$

التمرين (10) (بالك 2017- الدورة الإستثنائية - (م 1) (ن 7)



(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 e^x - e$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الشكل)

• أحسب $g(1)$.

• بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$

حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب النهايات الآتية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) .

(3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

(4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $[0; +\infty[$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ ، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم.

(6) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتهما:

$$x = -e^{n+1} \text{ و } x = -e^n.$$

أحسب العدد الحقيقي l حيث : $l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$.

ملح مقترح للتمرين (10) (بالك 2017- الدورة الإستثنائية -

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 e^x - e$.

$$g(1) = e^1 - e = 0.$$

• إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$		+ 0 -	

• إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(-x)$		- 0 +	

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

(2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e}{x} \right) = 0$ ومنه (C_f) والمنحنى (γ) ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$ متقاربان عند $-\infty$.

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) :

لدينا : $f(x) - y = -\frac{e}{x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		+	-
الوضع النسبي		(C_f) فوق (γ)	(C_f) تحت (γ)

(3) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ومن أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{x^2} = \frac{-x^2 e^{-x} + e}{x^2} = \frac{-(x^2 e^{-x} - e)}{x^2} = \frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغير f الدالة :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -	+

ومن الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-1; 0[$ و $]0; +\infty[$ متناقصة على المجال $]-\infty; -1]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -	+
$g(x)$	$+\infty$	$2e - 2$	$+\infty$	$+\infty$

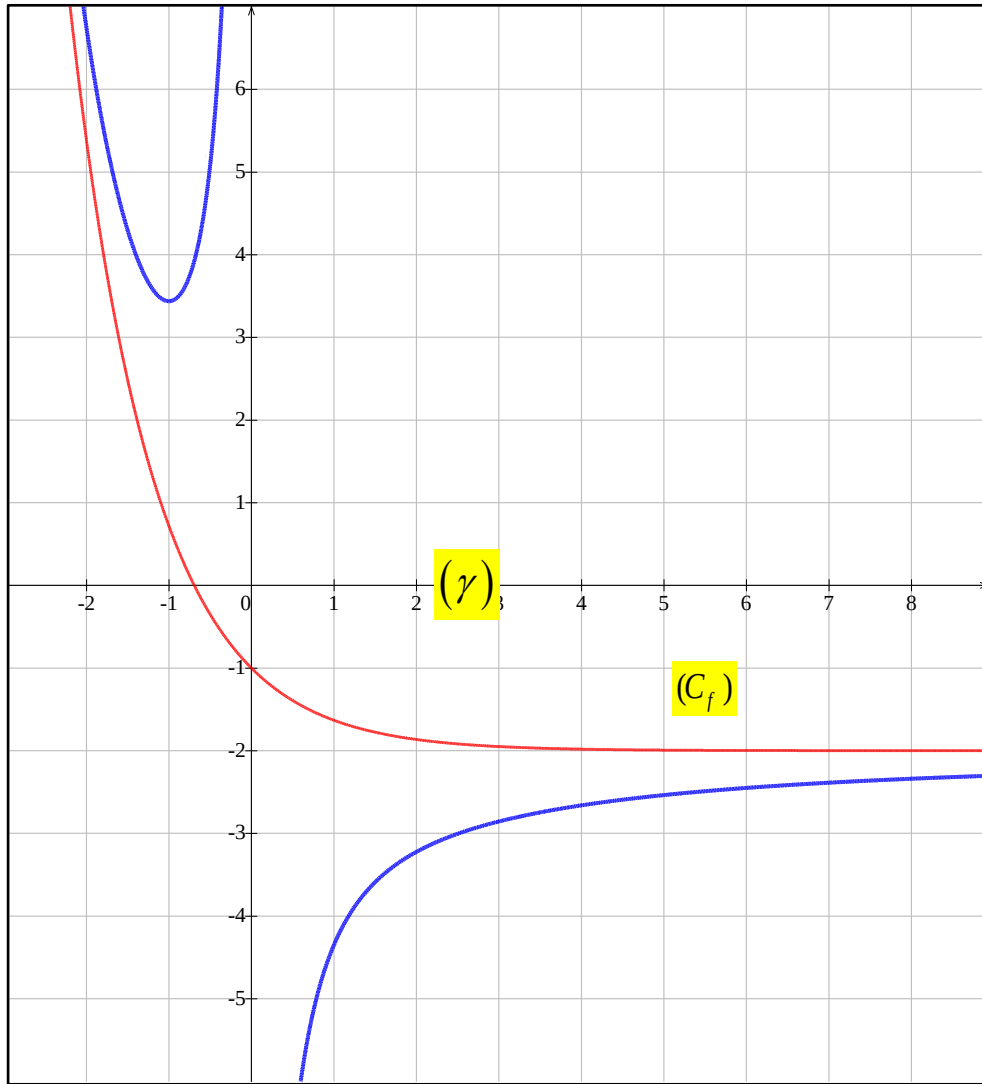
(4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقاً من منحنى الدالة $e^x : x \mapsto e^x$

لدينا : (γ) المنحنى ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$

ومن (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $e^x : x \mapsto e^x$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0; -2)$ ، علماً أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة

$e^x : x \mapsto e^x$ بالنسبة لحامل محور الترتيب .

الرسم :



(5) عدد طبيعي n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = -e^{n+1}$ و $x = -e^n$.

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} [f(x) - e^{-x} + 2] dx = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left(-\frac{e}{x} \right) dx = -e \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left(\frac{1}{x} \right) dx = -e [\ln|x|]_{-e^{n+1}}^{-e^n} = e$$

حساب العدد الحقيقي l : $l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016) = 2017e$

التمرين 11 بالـ 2018 م 7 ن

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.37 < \alpha < -0.38$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

جـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) حيث: $y = 2x + 1$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4) أنشئ (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,8$).

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)e^x$.

6) أباستعمل المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

بـ أحسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلتهما: $x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x + 1$.

حل مقترح للتمرين 11 بالـ 2018

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.

1) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + xe^{-x} - e^{-x}) = 2$$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x-1) = (2-x)e^{-x}$.

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x} > 0$ وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		$-0 +$	

الدالة g متناقصة على المجال $[2; +\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty; 2]$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		$-0+$	
$g(x)$	$-\infty$	$2+e^{-2}$	2

جدول تغيرات الدالة g :

(3) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2[$ و $]-\infty; 2[\subset]-0.38; -0.37[$ و $g(-0.38) \approx -0,017$
 $g(-0.37) \approx 0,016$

أي $g(-0,38) \times g(-0,37) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		$+0-$	

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$
 (1) أ- حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \text{ ، لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) بحيث: $y = 2x + 1$: (Δ) .

لدينا: $f(x) - y = f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$		$+0-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = g(x)$ ،

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = 2 + (-1)e^{-x} + (-e^{-x})(-x) = 2 + (x - 1)e^{-x} = g(x)$$

- اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، ومنه نستنتج أن:

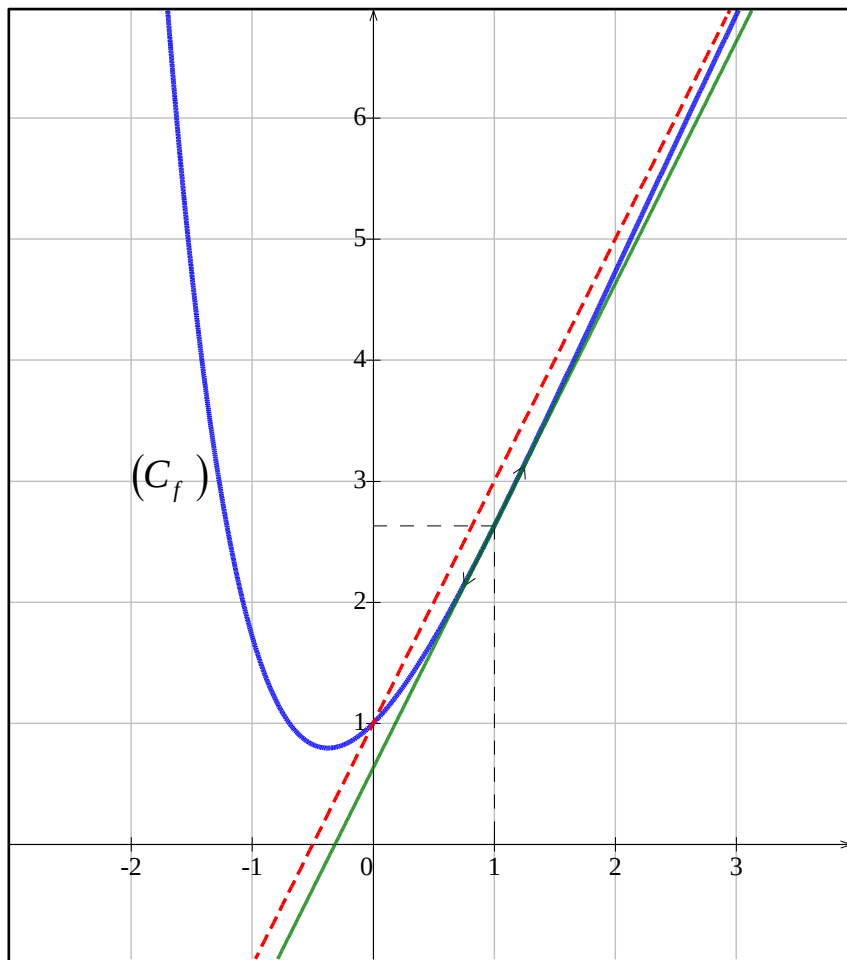
الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+ \ 0 \ -$	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
لدينا: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ و منه $y = 2x + 1 - \frac{1}{e}$ هي معادلة لـ (T) .

(4) الرسم:



(5) المناقشة البيانية:

$x = (1-m)e^x$ تكافئ $xe^{-x} = (1-m)$ تكافئ $-xe^{-x} = m-1$ تكافئ $2x + 1 - xe^{-x} = 2x + 1 + m - 1$
أي $2x + 1 - xe^{-x} = 2x + m$ أي: $f(x) = 2x + m$ ← مناقشة مائلة.
إذا كان $m \in]-\infty; 1 - \frac{1}{e}[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.
إذا كان $m = 1 - \frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف.

إذا كان $m \in \left[1 - \frac{1}{e}; 1\right]$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم.

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما.

(6) أتعين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$.

الدالة $x \mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = \int_1^x te^{-t} dt$.

نضع $u(t) = t$ ، $v'(t) = e^{-t}$ ومنه $u'(t) = 1$ ، $v(t) = -e^{-t}$ ،

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x) = \left[-te^{-t} \right]_1^x - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - \int_1^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} = (-x - 1)e^{-x} + 2e^{-1}$$

ومنه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$ هي: $F(x) = (-x - 1)e^{-x} + 2e^{-1}$.

بـ حساب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحوى (C_f) والمستقيميات التي معادلاتها: $x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x + 1$

$$A = \int_1^3 ((2x + 1) - f(x)) dx = \int_1^3 xe^{-x} dx = F(3) - F(1) = 2e^{-1} - 4e^{-3} \text{ (u.a.)}$$

التمرين 12 بالـ 2019 م 7 ن

المستوي منسوب إلى الهلم القعائد و القجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.
 (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

- (1) أ- أدرس إتجاه تغير الدالة g .
 ب- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
- (2) أدرس إتجاه تغير الدالة f .
- (3) أحسب كلا من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.
- (5) أرسم على المجال $[0; 2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$)
- (6) أحسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .
- (7) الدالة المعرفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
 أ- بين أن الدالة h زوجية.
 ب- من أجل $x \in [0; 2]$ أحسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقاً من (C_f) ثم أرسمه.

عمل مقترح للتمرين 12 بالـ 2019 م

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

- (1) أ- دراسة إتجاه تغير الدالة g :
 الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^x - e$
 من أجل $x \in]-\infty; 1]$ ، يكون $e^x \leq e$ أي $g'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$.
 من أجل $x \in [1; +\infty[$ ، يكون $e^x \geq e$ أي $g'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.
 ب- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :
 بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ فإن 0 قيمة حدية صغرى للدالة g .
 إذن: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.
- (2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :
 الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - ex = g(x)$
 من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.
- (3) حساب النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e \right) \right] = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} e x^2 \right) = -\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x - \frac{1}{2} e x^2 \right) = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

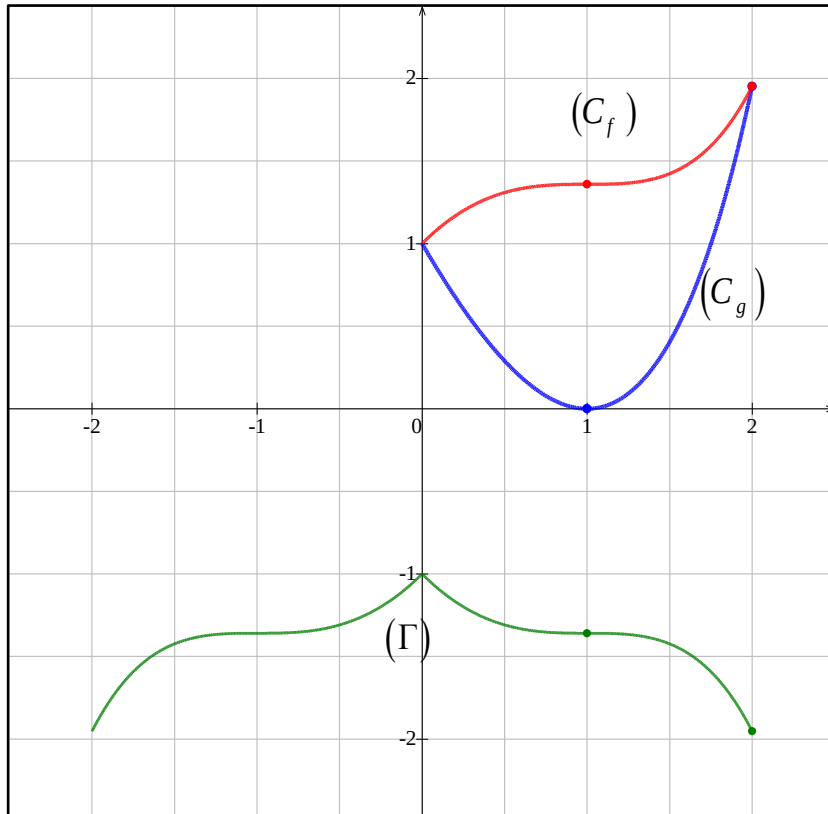
(4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$:

$$f(x) - g(x) = e^x - \frac{1}{2} e x^2 - (e^x - e x) = -\frac{1}{2} e x^2 + e x = e x \left(-\frac{1}{2} x + 1 \right)$$

من أجل كل عدد حقيقي x :

x	$+\infty$ 2 0 $-\infty$
$f(x)-g(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$
الوضع النسبي	(C_g) تحت (C_g) فوق (C_f) تحت (C_f) يقطع (C_g) يقطع (C_g) يقطع (C_f) يقطع في النقطة $A(0;1)$ في النقطة $B(2;e^2-2e)$

(5) الرسم:



(6) حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) :

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}ex^2 + ex \right) dx = \left[-\frac{1}{6}ex^3 + \frac{1}{2}ex^2 \right]_0^2 = -\frac{8}{6}e + 2e = \frac{2e}{3} (u.a)$$

ومنه $A = \frac{2e}{3} \times 4 = \frac{8e}{3} cm^2$.

(7) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$

أ- تبين أن الدالة h زوجية:

من أجل كل $x \in [-2; 2]$ ، $-x \in [-2; 2]$ و $h(-x) = \frac{1}{2}e(-x)^2 - e^{|-x|} = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|} = h(x)$ ومنه الدالة h زوجية.

ب- من أجل $x \in [0; 2]$ ، $h(x) + f(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^x + e^x - \frac{1}{2}ex^2 = 0$

استنتاج كيفية رسم (Γ) إنطلاقاً من (C_f) :

من أجل $x \in [0; 2]$ ، $h(x) = -f(x)$ وبالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0; 2]$.
ولرسم (Γ) على المجال $[-2; 0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية.
الرسم: أنظر الشكل.

حلول تمارين الدوال الأسية الواردة في الباكلوريا شعبة رياضيات

التمرين 1 (بال 2008) (م 2) (ن 7,5)

الجزء I :

- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. ادرس تغيرات الدالة f .
 2. بين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف ω واكتب معادلة لمماس $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ω .
- اثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
 3. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$.
- استنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.
 4. بين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77; -2,76[$.
- احسب $f(1)$ ، $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم $(\mathcal{C}_f)$ ومستقيمي المقاربين.

الجزء II :

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$

$(\mathcal{C}_g)$ منحنى الدالة g .

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = f(-x)$.
- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $(\mathcal{C}_f)$ إلى $(\mathcal{C}_g)$.
2. أنشئ في نفس المعلم السابق، المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ (دون دراسة الدالة g).

عمل مقترح للتمرين 1 (بال 2008)

الجزء I : f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. دراسة تغيرات الدالة f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} = -\infty$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

2. تبين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف ω :

لدينا الدالة f متزايدة تماما والمشتقة f' تنعدم عند 0

إذا المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا موازيا لمحور الترتيب عند النقطة $\omega(0;1)$ الذي يخترقه فيها وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وهي ω

• كتابة معادلة لمماس $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ω :

معادلة المماس عند ω هي $y = 1$.

• إثبات أن ω مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$:

لدينا $2 \times 0 - x = -x$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $(-x) \in \mathbb{R}$ لأن لكل عدد حقيقي له معاكس.

$$f(2 \times 0 - x) = f(-x) = -x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1} = -x - 1 + \frac{4e^x}{1 + e^x}$$

$$= -x + \frac{3e^x - 1}{1 + e^x}$$

$$2 \times 1 - f(x) = 2 - x + 1 - \frac{4}{e^x + 1} = -x + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

إذا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x)$ ،

وبالتالي $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

3. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{e^x + 1} - 4 = 0$$

• استنتاج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما :

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x - 1$ وهذا في $(+\infty)$.

ولدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x + 3$ وهذا في $(-\infty)$.

4. تبين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها X_0 من المجال $[-2, 77; -2, 76]$:

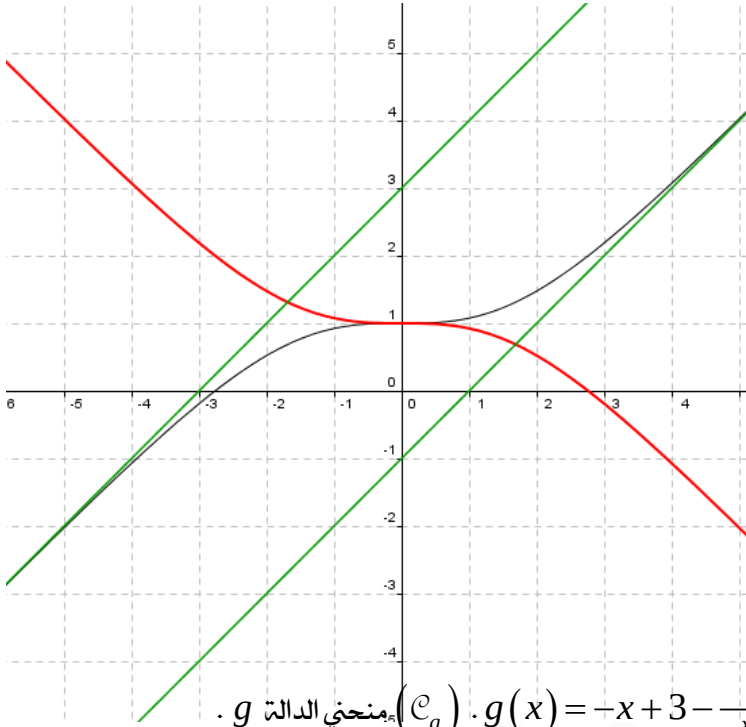
لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذا هي كذلك على المجال $[-2, 77; -2, 76]$ ولدينا

$f(-2, 76) \approx 0,0019$ و $f(-2, 77) \approx -0,0586$ إذا $f(-2, 77) \times f(-2, 76) < 0$ ؛

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد X_0 من المجال

$]-2,77; -2,76[$ حيث $f(x_0) = 0$ أي $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77; -2,76[$.

- حساب $f(-1)$ ، $f(1)$
- $f(-1) \approx 0,92$ ، $f(1) \approx 1,08$
- رسم $(\mathcal{C}_f)$ ومستقيميه المقاربين:



الجزء II :

g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ المنحني الدالة g .

1. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = f(-x)$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(-x) = -x + \frac{3e^x - 1}{1 + e^x}$$

$$f(-x) = -x + \frac{3e^x + 3 - 4}{1 + e^x} = -x + \frac{3(e^x + 1)}{1 + e^x} - \frac{4}{1 + e^x} = -x + 3 - \frac{4}{1 + e^x}$$

إذا $f(-x) = g(x)$

- استنتاج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $(\mathcal{C}_f)$ إلى $(\mathcal{C}_g)$.

لدينا $g(x) = f(-x) = 2 - f(x)$

لتكن $M(x, y)$ نقطة من $(\mathcal{C}_f)$ و $M'(x', y')$ نقطة من $(\mathcal{C}_g)$ حيث $x' = -x$ لدينا $y = f(x)$ و

وهو $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ إذا يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $(\mathcal{C}_f)$ إلى $(\mathcal{C}_g)$ معرف بـ: $y' = g(x') = f(-x') = f(x) = y$

التناظر المحوري الذي محوره (yy') .

2. إنشاء في نفس المعلم السابق، المنحني $(\mathcal{C}_g)$ (دون دراسة الدالة g).

التمرين (2) باك 2010 (م 2) (ن 7)

الجزء I:

1. ادرس تغيرات الدالة g .
 2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$.
 3. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء II

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 1. بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ، اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند المبدأ O .
 2. 1- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 ب- بين أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)} g(x)$.
 ج- تحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ثم عين حصره.
 د- أنشئ جدول تغيرات الدالة f .
 - احسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x \mapsto -x^3$.
 - بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$ وفسر النتيجة هندسيا.
 - أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و (C_f) .

حل مقترح للتمرين (2) باك 2010

الجزء I

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (3 - x)e^x - 3$.
 1. دراسة تغيرات الدالة g :
 لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
 إذا $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x - xe^x - 3 = -3$
 ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
 إذا $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x)e^x = -\infty$

إشارة $g'(x) = -e^x + (3-x)e^x = (2-x)e^x$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(2-x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$		$e^2 - 3$	
		-3	$-\infty$

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ومتزايدة تماما على $]-\infty; 2]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-3; e^2 - 3]$ و $]-3; e^2 - 3]$ إذا $0 \in]-3; e^2 - 3]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 2]$ ولدينا أيضا الدالة g متناقصة تماما على المجال $[2; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; e^2 - 3]$ و $0 \in]-3; e^2 - 3]$ إذا المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[2; +\infty[$ وعليه فالمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

لدينا $g(0) = (3-0)e^0 - 3 = 3 - 3 = 0$ ومنه 0 حل للمعادلة $g(x) = 0$.

ولدينا $g(2,82) \approx 0,0198$ و $g(2,83) \approx -0,119$ إذن $g(2,82) \times g(2,83) < 0$ وعليه فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $2,82 < \alpha < 2,83$ و $g(\alpha) = 0$.

3. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$
			0	$-$

الجزء II

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} (e^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^2 = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} (e^x - 1) = 0$$

- معادلة (T) مماس (C_f) عند المبدأ O : $y = f'(0)x - f(0)$ ومنه $y = 0$

2. تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(e^{-\frac{1}{3}x} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{-\frac{1}{3}x} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \times \frac{1}{3} x e^{-\frac{1}{3}x} \right)^3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -27 \left(-\frac{1}{3} x e^{\frac{1}{3}x} \right)^3 \text{ أي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -27 (te^t)^3 = 0 \text{ إذن } \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0 \text{ ولدينا } t = -\frac{1}{3}x$$

- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x (1 - e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{(1 - e^{-x})} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0$$

- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x) \quad \text{ب- تبين أنه من أجل } x \neq 0 \text{ فإن:}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad \text{ليكن } x \text{ عددا حقيقيا غير معدوم:}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 [3e^x - 3 - xe^x]}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2 [(3-x)e^x - 3]}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x) \text{ أي}$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 (3 - \alpha) \quad \text{ج- تحقق أن}$$

$$e^\alpha = \frac{3}{(3-\alpha)} \text{ أي } (3-\alpha)e^\alpha - 3 = 0 \text{ معناه } g(\alpha) = 0 \text{ ولدينا } f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{e^\alpha - 1}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\frac{3}{3-\alpha} - 1} = \frac{\alpha^3}{\frac{3-3+\alpha}{3-\alpha}} = \frac{\alpha^3(3-\alpha)}{\alpha} = \alpha^2(3-\alpha) \text{ إذن}$$

$$7,9524 < \alpha^2 < 8,0089 \text{ أي } (2,82)^2 < \alpha^2 < (2,83)^2 \text{ معناه } 2,82 < \alpha < 2,83 \text{ لدينا } f(\alpha)$$

$$\text{ولدينا } 2,82 < \alpha < 2,83 \text{ معناه } 3 - 2,83 < 3 - \alpha < 3 - 2,82 \text{ أي } 0,17 < 3 - \alpha < 0,18$$

$$\text{إذا } 1,351908 < f(\alpha) < 1,441602 \text{ أي } 7,9524 \times 0,17 < \alpha^2(3-\alpha) < 0,18 \times 8,0089$$

د- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		0	$f(\alpha)$	0

3. حساب $f(x) + x^3$:

$$f(x) + x^3 = \frac{x^3}{e^x - 1} + x^3 = \frac{x^3 + x^3 e^x - x^3}{e^x - 1} = \frac{x^3 e^x}{e^x - 1}$$

- الوضعية النسبية للمنحنين (C_f) و (C) حيث (C) منحنى الدالة $x \mapsto -x^3$.

	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3		0	+
$e^x - 1$		0	+
$\frac{x^3}{e^x - 1}$		+	+
$f(x) + x^3$		+	+
الوضعية	(C_f) يقع فوق (C)		(C_f) يقع فوق (C)
	(C_f) يقطع (C) في المبدأ O		

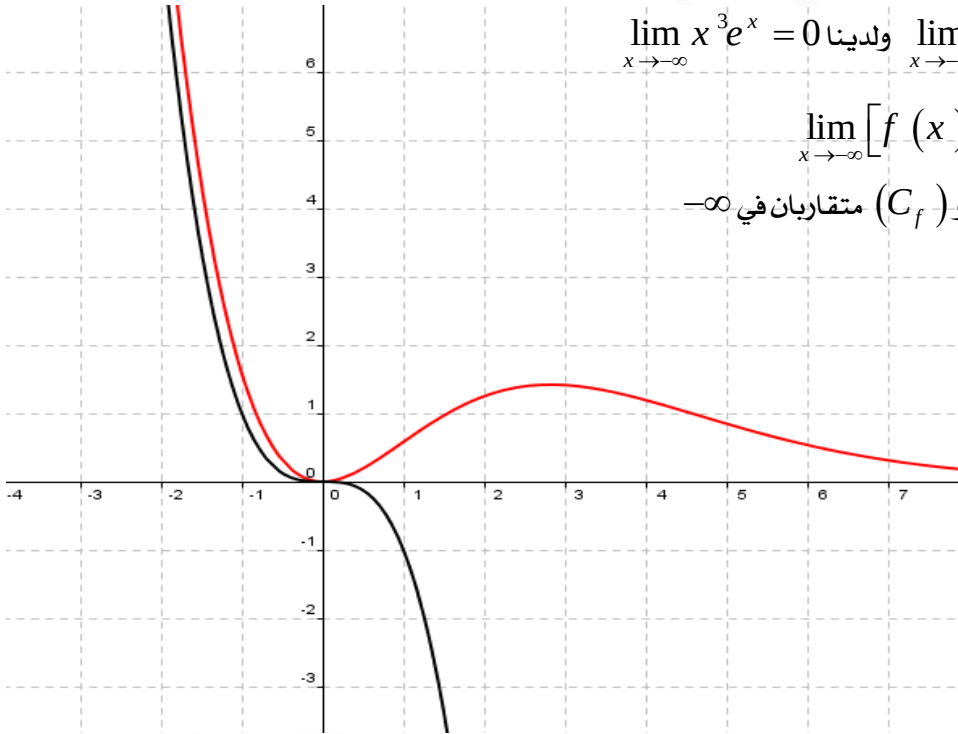
- تبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$ ولدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x = 0$

إذا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 e^x}{e^x - 1} = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x^3] = 0$

- التفسير الهندسي للنهاية: المنحنيان (C) و (C_f) متقاربان في $-\infty$

4. إنشاء (T) والمنحنيين (C) و (C_f)



التمرين (3) باك 2011 م 1 7 نه

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (3x + 4)e^x$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$$

حيث: f' ، f'' ، ... ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتالية للدالة f .

ب- استنتج حلا للمعادلة التفاضلية: $y'' = (3x + 16)e^x$.

2. أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$.

ب- بين أن ω هي نقطة انعطاف المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

ج- ارسم (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty; 0]$.

4. أ- x عدد حقيقي من المجال $]-\infty; 0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^x te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$.

- احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوى المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$ ،

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) \text{ ثم جد } x = \lambda \text{ و } x = -\frac{4}{3}.$$

حل مقترح للتمرين (3) باك 2011 م

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (3x + 4)e^x$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- حساب $f'(x)$ و $f''(x)$:

$$f'(x) = 3e^x + (3x + 4)e^x = (3x + 7)e^x$$

$$f''(x) = 3e^x + (3x + 7)e^x = (3x + 10)e^x$$

• البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$ ،

من أجل $n = 1$ لدينا: $f'(x) = (3x + 7)e^x$ و $f''(x) = (3x + 10)e^x$ إذا $f'(x) = (3x + 3 + 4)e^x$ ومنه الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أن $f^{(p)}(x) = (3x + 3p + 4)e^x$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم p ولنبرهن أن $f^{(p+1)}(x) = [3x + 3(p+1) + 4]e^x$.

$$f^{(p+1)}(x) = \left(f^{(p)}\right)'(x) = 3e^x + (3x + 3p + 4)e^x \text{ لدينا}$$

$$f^{(p+1)}(x) = (3x + 3p + 4 + 3)e^x = [3x + 3(p+1) + 4]e^x \text{ أي}$$

$$\text{إذا الخاصية } f^{(p+1)}(x) = [3x + 3(p+1) + 4]e^x \text{ صحيحة}$$

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$.

ب- استنتاج حلا للمعادلة التفاضلية $y'' = (3x + 16)e^x$:

$$f^{(4)}(x) = (3x + 16)e^x \text{ أي } f^{(4)}(x) = (3x + 3 \times 4 + 4)e^x \text{ لدينا}$$

ومنه $y = f''(x) + ax + b$ مع a و b عددين حقيقيين ،

أي $y = (3x + 10)e^x + ax + b$ مع a و b عددين حقيقيين

$$2. \text{ أ- تبين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\text{ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 4)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x = 0$$

• التفسير الهندسي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ إذا المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$ (حامل محور الفواصل).

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = (3x + 7)e^x$ و $e^x > 0$ ومنه:

$$\text{من أجل } x = -\frac{7}{3} \text{ لدينا } 3x + 7 = 0 \text{ أي } f'(x) = 0$$

من أجل $x \in \left]-\infty; -\frac{7}{3}\right]$ لدينا $3x + 7 < 0$ أي $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty; -\frac{7}{3}\right]$.

من أجل $x \in \left[-\frac{7}{3}; +\infty\right]$ لدينا $3x + 7 > 0$ أي $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\left[-\frac{7}{3}; +\infty\right]$.

• جدول تغيرات الدالة :

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 4) = +\infty$ إذا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$f(x)$		0	$+\infty$

3. أ- معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$:

$$f'\left(-\frac{10}{3}\right) = -3e^{-\frac{10}{3}} \text{ ، } f\left(-\frac{10}{3}\right) = (-10 + 4)e^{-\frac{10}{3}} = -6e^{-\frac{10}{3}}$$

$$y = -3e^{-\frac{10}{3}} \left(x + \frac{10}{3} \right) - 6e^{-\frac{10}{3}} = -3e^{-\frac{10}{3}} \left(x + \frac{16}{3} \right)$$

ب- تبين أن ω هي نقطة انعطاف المنحني (C_f) :

ليكن x عددا حقيقيا، لدينا $f''(x) = (3x+10)e^x$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $3x+10$.

x	$-\infty$	$-\frac{10}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

إذا $f''(x)$ ينعدم ويغير من إشارته عند $-\frac{10}{3}$ وبالتالي المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $\omega \left(-\frac{10}{3}; -6e^{-\frac{10}{3}} \right)$.

ج- رسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$:

4. أ- x عدد حقيقي من

$]-\infty; 0]$ ، باستعمال التكامل

بالتجزئة إيجاد $\int_{-1}^x te^t dt$:

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^t \end{cases} \text{ نضع}$$

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$\int_{-1}^x te^t dt = \int_{-1}^x u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_{-1}^x - \int_{-1}^x u'(t)v(t) dt$$

$$= [te^t]_{-1}^x - \int_{-1}^x e^t dt = [te^t - e^t]_{-1}^x = (x-1)e^x + 2e^{-1}$$

• استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$:

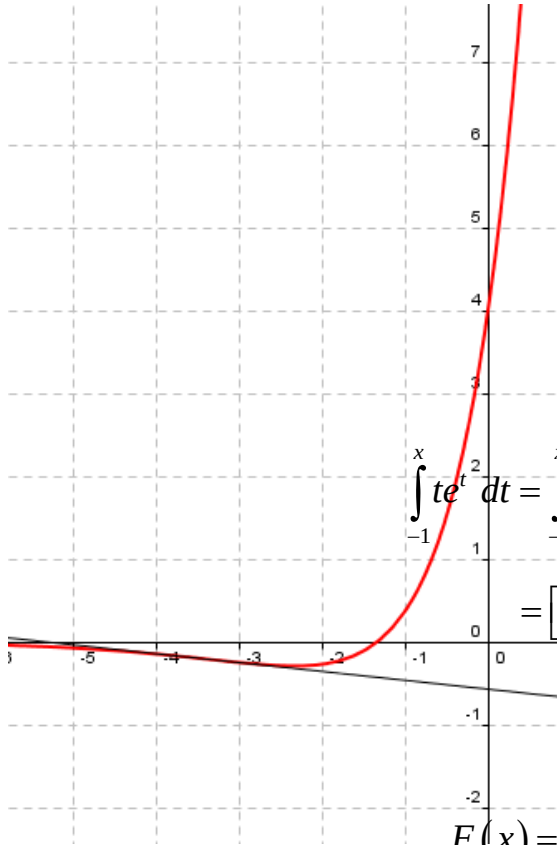
$$f(x) = (3x+4)e^x$$

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x (3t+4)e^t dt$$

$$= \int_{-1}^x 3te^t + 4e^t dt = 3(x-1)e^x + 6e^{-1} + 4[e^t]_{-1}^x$$

$$= 3(x-1)e^x + 6e^{-1} + 4e^x - 4e^{-1}$$

$$= (3x+1)e^x + 2e^{-1}$$



ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$.

- حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = -\frac{4}{3}$ و $x = \lambda$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} -f(t) dt = \int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} f(t) dt = \left[(3t+1)e^t \right]_{\lambda}^{-\frac{4}{3}}$$

$$= (3\lambda+1)e^{\lambda} - (-3)e^{-\frac{4}{3}}$$

$$= \left[(3\lambda+1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}} \right] ua$$

- إيجاد $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$

لدينا $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 3e^{-\frac{4}{3}}$ ومنه $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (3\lambda+1)e^{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} 3\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} = 0$

التمرين 4 (باك 2012) (م 2) (ن 7)

الجزء I

- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 - xe^x$.
1. ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0,8 < \alpha < 0,9$.
 3. عين، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

الجزء II

- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$.
- $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول 2 cm).
1. بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
 2. ا. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
ب. بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
 3. ادرس وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') ، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.
 4. أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .
ب. بين أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 5. ارسم (Δ) ، (Δ') و $(\mathcal{C}_f)$.
 6. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = f(m)$.

الجزء III

- (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:
- $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
1. برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < \alpha$.
 2. باستعمال (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$ ، مثل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 و u_2 ، ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
 3. برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

حل مقترح للتمرين 4 (باك 2012)

الجزء I

- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 - xe^x$.
1. دراسة تغيرات الدالة g :

الدالتان $x \mapsto -x$ و $x \mapsto e^x$ تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذا الدالة $x \mapsto -xe^x$ هي كذلك لكونها جداء دالتين، ومنه الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$g'(x) = -e^x - xe^x = (-x-1)e^x$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$

ومنه إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $-x-1$ ؛ وعليه: $g'(-1) = 0$ ؛

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$ ، إذا الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ ؛

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; -1[$ ، إذا الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - xe^x = 2 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - xe^x = -\infty$$

• جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			$2 + e^{-1}$	$-\infty$

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty; -1[$

و $]-1; +\infty[$ ؛

من أجل $x \in]-1; +\infty[$ لدينا $g(x) \in]2; 2 + e^{-1}]$ إذا $g(x) \neq 0$.

لدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]-1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 2 + e^{-1}]$ إذن لكل عدد حقيقي من

$]-\infty; 2 + e^{-1}]$ له سابقة وحيدة في المجال $]-1; +\infty[$ بواسطة الدالة g وبالأخص العدد 0 له سابقة وحيدة α في

$$g(\alpha) = 0 \text{ أي } \alpha \in]-1; +\infty[$$

خلاصة: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$:

• تحقق أن: $0,8 < \alpha < 0,9$ ؛

$$\text{لدينا } g(0,8) \approx 0,22 \text{ و } g(0,9) \approx -0,21 \text{ إذا } g(0,8) \times g(0,9) < 0$$

ومنه $0,8 < \alpha < 0,9$.

3. تعيين، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) > 0$ ؛

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ و $g(\alpha) = 0$.

الجزء II

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2} \quad (\mathcal{C}_f) \text{ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس } (O; \vec{i}, \vec{j}) \text{، (وحدة الطول } 2 \text{ cm).}$$

1. تبين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ؛

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{e^x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{2+\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{e^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \times 2 = 0 \text{ إذا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ لدينا}$$

• التفسير الهندسي:

المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) عند $+\infty$.

2.1- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2}{e^x+2} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

ب- تبين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) :

$$f(x) - (x+1) = \frac{2x+2}{e^x+2} - x - 1$$

$$f(x) - (x+1) = \frac{2x+2 - xe^x - 2x - e^x - 2}{e^x+2} = \frac{-xe^x - e^x}{e^x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^x - e^x}{e^x+2} = 0 \text{ إذا } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^x - e^x}{e^x+2} = 0$$

عند $y = x + 1$.

3. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') :

$$f(x) - (x+1) = \frac{-xe^x - e^x}{e^x+2} = \frac{(-x-1)e^x}{e^x+2}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x-1$	+	0	-
$f(x) - (x+1)$	+	0	-
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ')	(C_f) يقع أسفل (Δ')	

(C_f) و (Δ') متقاطعان

في النقطة $A(-1;0)$

• دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ، (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$:

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f(x) - x = \frac{2x+2}{e^x+2} - x = \frac{2x+2 - xe^x - 2x}{e^x+2} = \frac{2 - xe^x}{e^x+2} = \frac{g(x)}{e^x+2}$$

إشارة $f(x) - x$ هي من نفس إشارة $g(x)$ وحسب السؤال 3. من الجزء الأول لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$$g(x) > 0,]-\infty; \alpha[$$

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال }]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \text{ و } g(\alpha) = 0$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-
$f(x) - x$	+	0	-
الوضعية	$(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ)		$(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل (Δ)

$(\mathcal{C}_f)$ و (Δ) متقاطعان في
النقطة $B(\alpha; \alpha)$

4. أـ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 2)^2}$ ،

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x) = \frac{2(e^x + 2) - (2x + 2)e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{2e^x + 4 - 2xe^x - 2e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{4 - 2xe^x}{(e^x + 2)^2}$$

$$= \frac{2(2 - xe^x)}{(e^x + 2)^2} = \frac{2g(x)}{(e^x + 2)^2}$$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ ومنه: $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$
من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) > 0$ أي $f'(x) > 0$
من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ أي $f'(x) < 0$
وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty; \alpha[$ ومتناقصة تماما على $]\alpha; +\infty[$.

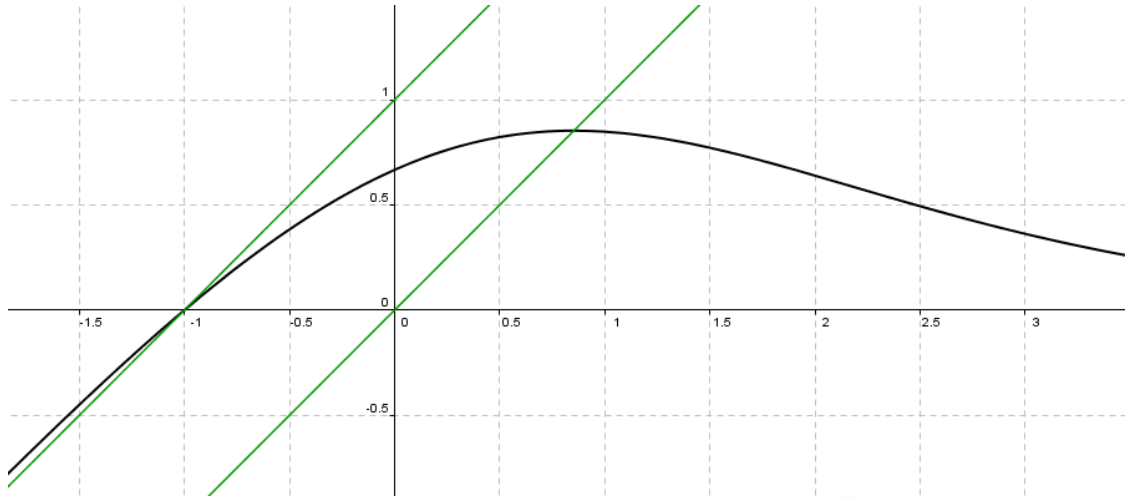
بـ تبين أن: $f(\alpha) = \alpha$:

لدينا $f(x) - x = \frac{g(x)}{e^x + 2}$ ومنه $f(\alpha) - \alpha = \frac{g(\alpha)}{e^\alpha + 2} = 0$ إذا $f(\alpha) = \alpha$.

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	α	0

5. رسم (Δ) ، (Δ') و $(\mathcal{C}_f)$:



6. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي

m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = f(m)$:

إذا كان $m \leq -1$ فإن $f(m) \leq 0$

ومنه المعادلة $f(x) = f(m)$ تقبل حلا واحدا.

إذا كان $m = \alpha$ فإن $f(m) = \alpha$ ومنه المعادلة $f(x) = f(m)$ تقبل حلا واحدا.

إذا كان $m \in]-1; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن $f(-1) < f(m) < f(\alpha)$ ومنه $0 < f(m) < \alpha$ إذا المعادلة

$f(x) = f(m)$ تقبل حلين متميزين.

الجزء III (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_0 = 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = f(u_n)$$

1. البرهان بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n < \alpha$:

لدينا $u_0 = 0$ ومنه $0 \leq u_0 < \alpha$ إذا الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أن $0 \leq u_n < \alpha$ ولنبرهن صحة الخاصية $0 \leq u_{n+1} < \alpha$

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ وعليه فإذا كان $0 \leq u_n < \alpha$ فإن $f(0) \leq f(u_n) < f(\alpha)$

$$\text{بما أن } f(0) = \frac{3}{2} \text{ ، } f(u_n) = u_{n+1} \text{ و } f(\alpha) = \alpha \text{ فإن } \frac{3}{2} \leq u_{n+1} < \alpha$$

ومنه $0 \leq u_{n+1} < \alpha$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n < \alpha$.

2. تمثيل على محور الفواصل

الحدود: u_0 ، u_1 و u_2 :

لدينا $u_0 = 0$ ،

$$u_1 = f(u_0)$$

$$\text{و } u_2 = f(u_1)$$

• تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا من الشكل $u_0 < u_1 < u_2$

إذا يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3. البرهان أن المتتالية (u_n) متقاربة:

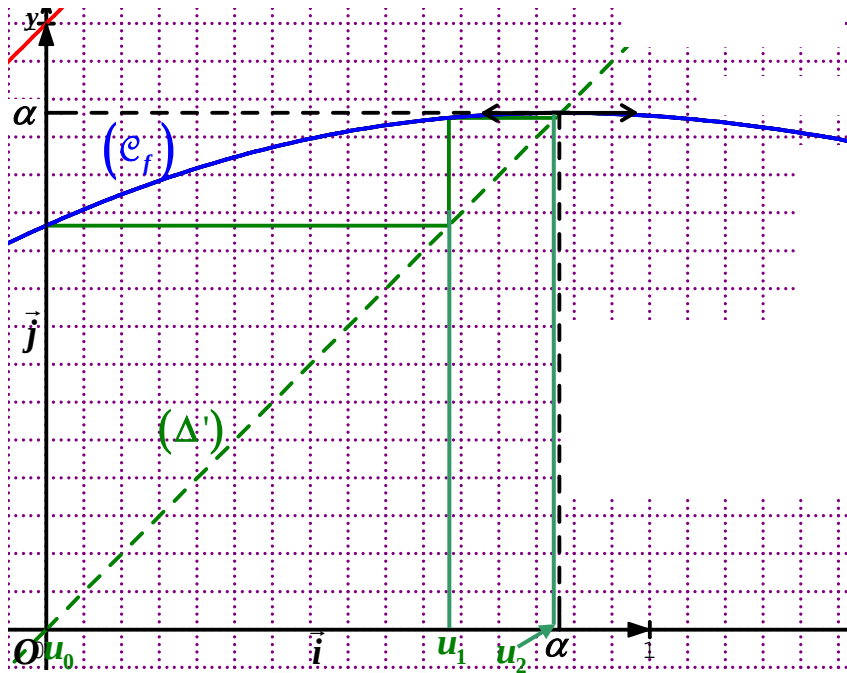
لدينا من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha]$ ، $f(x) - x \geq 0$ ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < \alpha$ ومنه
 إذا $f(u_n) - u_n \geq 0$ أي $u_{n+1} - u_n \geq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة ، زيادة عن هذا هي محدودة من الأعلى بالعدد α إذا
 هي متقاربة.

• حساب نهاية المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متقاربة إذن هي تقبل نهاية ℓ مع $\ell \in \mathbb{R}$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ؛

لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ إذا $\ell = f(\ell)$

وبما أن $f(\alpha) = \alpha$ فإن $\ell = \alpha$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.



التمرين (5) بالك 2013 م 1 6,5 ن

I - 1. الدالة u معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$.
أ- ادرس اتجاه تغير الدالة u .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e > 3x - 4$.

2. الدالة v معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$.

أ- بين أن: $v'(1) = 0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v)

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq 0$.

ج- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$.

3. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$.

II - الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$. المنحني الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

2. بين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. احسب $f(1)$ ثم مثل المنحني (C_f) على المجال $\left]0; \frac{5}{2}\right]$. يعطى: $f(2) \approx 2,3$ و $f(1,64) \approx 1$ و $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx 5,75$.

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب: $x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$.

حل مقترح للتمرين (5) بالك 2013

I - 1. الدالة u معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$.
أ- دراسة اتجاه تغير الدالة u :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $u'(x) = e^x - 3$ ،

$u'(x) = 0$ معناه $e^x - 3 = 0$ ومعناه $e^x = 3$ يكافئ $x = \ln 3$.

$u'(x) > 0$ معناه $e^x - 3 > 0$ ومعناه $e^x > 3$ يكافئ $x > \ln 3$.

x	0	$\ln 3$	$+\infty$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$			

ب- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e > 3x - 4$:

من خلال جدول التغيرات لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $u(x) \geq u(\ln 3)$ و $u(\ln 3) \approx 1$ إذن

$u(x) > 0$ أي $e^x - e > 3x - 4$ وهذا يعني $e^x - e > 3x - 4$

2. الدالة v معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$$

أ- تبين أن: $v'(1) = 0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v) :

$$v'(x) = -9x^2 + 8x + \frac{1}{x} = \frac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x} \text{ ، }]0; +\infty[\text{ من المجال } x \text{ حقيقي}$$

$$\text{ومنه } v'(1) = \frac{-9 \times 1^3 + 8 \times 1^2 + 1}{1} = 0$$

ب- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq 0$:

$$v'(x) = \frac{(x-1)(-9x^2 - x - 1)}{x} \text{ معناه } v'(x) = \frac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x}$$

$\Delta = 1 - 36 = -35$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $-9x^2 - x - 1 < 0$ ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$	+	0	-
$v(x)$	$v(1) = 0$		

إذا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq 0$.

ج- استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $v(x) \leq 0$ معناه $-3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x \leq 0$ ومعناه

$$\frac{\ln x - 1}{x^2} \leq 3x - 4 \text{ أي } \frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq \frac{3x^3 - 4x^2}{x^2} \text{ يكافئ } -1 + \ln x \leq 3x^3 - 4x^2$$

3. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $3x - 4 < e^x - e$:

$$\frac{\ln x - 1}{x^2} \leq 3x - 4 \text{ إذا } \frac{\ln x - 1}{x^2} < e^x - e \text{ وهذا يعني أن } e^x - e - \frac{\ln x - 1}{x^2} > 0 \text{ أي } e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$$

II - الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$

$(\mathcal{C}_f)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[e^x - ex + \frac{\ln x}{x} \right] = -\infty \text{ إذا } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - ex = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ex + \frac{\ln x}{x} = +\infty \text{ إذا } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ex = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - e \right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

2. تبين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = e^x - e + \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ ليكن } x \text{ عددا حقيقيا من المجال }]0; +\infty[$$

وحسب السؤال I-3. لدينا من أجل كل عدد حقيقي

$$f'(x) > 0, \text{ من المجال }]0; +\infty[$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3. حساب $f(1)$ ثم تمثيل المنحني (C_f) على

$$\text{المجال } \left] 0; \frac{5}{2} \right] \text{ : يعطى: } f(2) \approx 2,3$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) \approx 5,75 \text{ و } f(1,64) \approx 1$$

$$f(1) = e^1 - e + \frac{\ln 1}{1} = 0$$

4. حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل

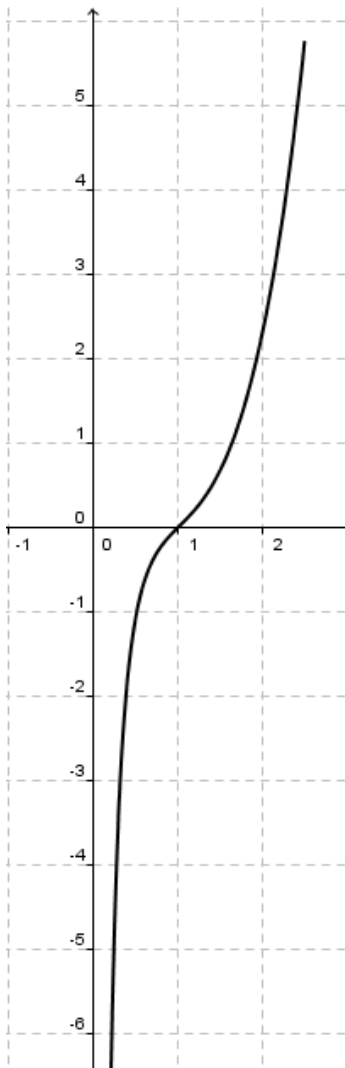
$$\text{والمستقيمين اللذين معادليهما على الترتيب: } x = \frac{1}{2} \text{ و } x = 2.$$

نرمز بـ S إلى المساحة المطلوبة.

$$S = -\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_1^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

$$\int_1^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \left(e^x - ex + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \left[e^x - \frac{e}{2} x^2 + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{أي } \int_1^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \left[e^{\frac{1}{2}} - \frac{e}{8} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} \right)^2 \right] - \left[e - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} (\ln 1)^2 \right]$$



$$\int_1^{\frac{1}{2}} f(x) dx = e^{\frac{1}{2}} - \frac{5e}{8} + \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(e^x - ex + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^2 \text{ ولدينا:}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[e^2 - 2e + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 \right] - \left[e - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}(\ln 1)^2 \right] \text{ أي}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = e^2 - \frac{5}{2}e + \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

$$\text{إذن } S = e^2 + e^{\frac{1}{2}} - \frac{25e}{8} + (\ln 2)^2 \approx 1,024 \text{ ua} \text{ أي } S = e^{\frac{1}{2}} - \frac{5e}{8} + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + e^2 - \frac{5}{2}e + \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

التمرين (6) (باك 2014) (م 1) (ن 6)

I الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2-x)e^x - 1$.

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن للمعادلة: $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$.

3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وفسر النتيجة هندسيا.

2. بين أنه من أجل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ واستنتج حصرًا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

4. احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f) .

5. λ عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 1.

أ- احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda) = \int_1^\lambda [f(x) - 1] dx$.

ب- احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$.

حل مقترح للتمرين (6) (باك 2014)

I الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2-x)e^x - 1$.

1. دراسة تغيرات الدالة g : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - 1 = -1$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x - 1 = -\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

ليكن x عددا حقيقيا: $g'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ وعليه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(1-x)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$	-1	$e-1$	$-\infty$

2. تبين أن للمعادلة: $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$.

الدالة g مستمرة على كل من المجالين $]-\infty; 1]$ و $[1; +\infty[$ إذن صورة كل من هذين المجالين هو مجال ولدينا $g(]-\infty; 1]) =]-1; e-1]$ و $g([1; +\infty[) =]-\infty; e-1]$ و $0 \in]-\infty; e-1]$ و $0 \in]-1; e-1]$ فإن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا α في $]-\infty; 1]$ وحلا β في $[1; +\infty[$ وبما أن الدالة g رتيبة على كل من المجالين $]-\infty; 1]$ و $[1; +\infty[$ فإن α و β حلان وحيدان

$g(-1,2) \approx -0,036$ ؛ $g(-1,1) \approx 0,032$ إذن $g(-1,2) \times g(-1,1) < 0$ ومنه $-1,2 < \alpha < -1,1$.

$g(1,8) \approx 0,21$ ؛ $g(1,9) \approx -0,33$ إذن $g(1,8) \times g(1,9) < 0$ ومنه $1,8 < \beta < 1,9$.

3. استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	0

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 - \frac{x}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 - \frac{x}{e^x}} = 1$$

التفسير الهندسي للنهائيتين:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ إذا (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$ وهذا في $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ إذا (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 1$ وهذا في $+\infty$.

2. تبين أنه من أجل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ وهذا يعني أن $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$.

لدينا من أجل كل x من $]-\infty; \alpha[\cup]\beta; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ ومعناه $f'(x) < 0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; \alpha[$ و $]\beta; +\infty[$.

و $[\beta; +\infty[$.

ولدينا من أجل x من $[\alpha; \beta]$ ، $g(x) > 0$ ومعناه $f'(x) > 0$ إذا الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; \beta]$.
- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		0	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	1	

3. تبين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$

$$e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha} \text{ ومعناه } (2-\alpha)e^\alpha - 1 = 0 \text{ ومعناه } g(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha} = \frac{1-2+\alpha}{2-\alpha} \times \frac{2-\alpha}{1-2\alpha+\alpha^2} = \frac{-1+\alpha}{(\alpha-1)^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} \text{ أي}$$

- استنتاج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

$$-1,1 < \alpha < -1,2 \text{ ومعناه } -2,1 < \alpha - 1 < -2,2 \text{ ومعناه } -\frac{1}{2,2} < \frac{1}{\alpha-1} < -\frac{1}{2,1} \text{ أي}$$

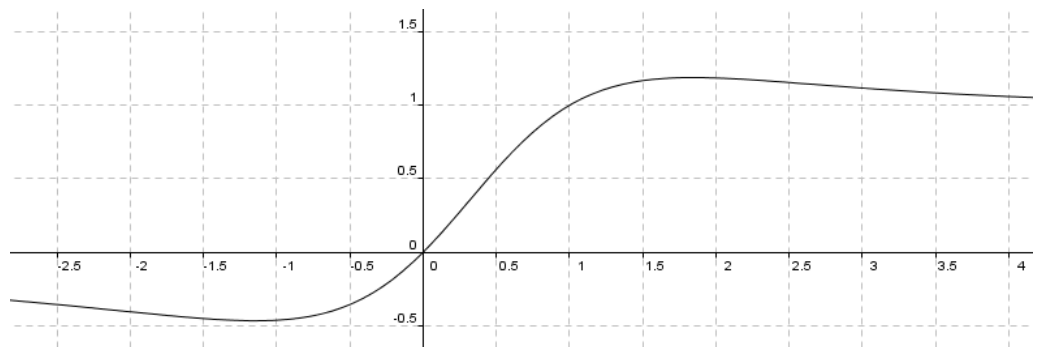
$$-0,476 < f(\alpha) < -0,455$$

$$\text{بنفس الطريقة نجد } f(\beta) = \frac{1}{\beta-1} \text{ ولدينا } 1,8 < \beta < 1,9 \text{ ومعناه}$$

$$0,8 < \beta - 1 < 0,9 \text{ ومعناه } \frac{1}{0,9} < \frac{1}{\beta-1} < \frac{1}{0,8} \text{ يكافئ } 1,11 < f(\beta) < 1,25$$

$$4. \text{ حساب } f(1) : f(1) = \frac{e-1}{e-1} = 1$$

- رسم المنحنى (C_f) :



5. λ عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 1.

أ- حساب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda) = \int_1^\lambda [f(x) - 1] dx$

$$a(\lambda) = \int_1^\lambda [f(x) - 1] dx = \int_1^\lambda \left[\frac{e^x - 1}{e^x - x} - 1 \right] dx = \left[\ln(e^x - x) - x \right]_1^\lambda$$

$$a(\lambda) = \ln(e^\lambda - \lambda) - \lambda - \ln(e - 1) + 1 = \ln(e^\lambda - \lambda) - \ln e^\lambda + 1 - \ln(e - 1)$$

$$a(\lambda) = \ln\left(\frac{e^\lambda - \lambda}{e^\lambda}\right) + 1 - \ln(e - 1) = \ln(1 - \lambda e^{-\lambda}) + 1 - \ln(e - 1)$$

ب- حساب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\lambda e^{-\lambda} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0 \text{ لأن } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln(1 - \lambda e^{-\lambda}) + 1 - \ln(e - 1) = 1 - \ln(e - 1)$$

$$\cdot \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln(1 - \lambda e^{-\lambda}) = \ln 1 = 0$$

التمرين 7 (بال 2015) (م 2) (ن 7)

1. الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.
 المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2. احسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4. أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.

ب- استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلاته.

5. g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

6. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) > x$.

ب- استنتج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج- أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

7. (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 0$.

ب- حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

8. m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ: $h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$.

أ- احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .

ب- باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$.

حل مقترح للتمرين 7 (بال 2015)

1. الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.
 المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. دراسة استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$$

إذا الدالة f مستمرة على يسار 0.

2. حساب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x-1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} - \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ أي}$$

- التفسير الهندسي: الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار 0 وعددها المشتق من اليسار معدوم وعليه فالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس مواز لحامل محور الفواصل عند المبدأ O ، $y = 0$ معادلة له.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = -\infty \quad \text{3. أ- حساب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{x-1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}} :]-\infty; 0[$$

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]-\infty; 0[$ ، $x^2 - x + 1 > 0$ وبالتالي $f'(x) > 0$ وعليه $\Delta = 1 - 4 = -3$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، f متزايدة تماما على $]-\infty; 0[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	0

$$4. \text{ أ- تبين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0 :$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} - x$$

$$t = \frac{1}{x} \text{ حيث } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t}{t} - e^t - \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t - 1}{t} - e^t = 1 - 1 = 0$$

ب- استنتاج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) في $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0 \text{ إذا المنحنى } (\mathcal{C}_f) \text{ يقبل مستقيما مقاربا مائلا } (\Delta) \text{ في } -\infty \text{ ، } y = x \text{ معادلة له.}$$

$$5. g \text{ الدالة المعرفة على المجال }]-\infty; 0[\text{ بـ } g(x) = \frac{f(x)}{x} .$$

أ- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} = 1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $] -\infty; 0[$:

$$g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{x \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}} - (x-1) e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} - x + 1 \right)$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -\infty; 0[$: $e^{\frac{1}{x}} > 0$ ، $x^2 > 0$ و

$$g'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left(x - 1 + \frac{1}{x} - x + 1 \right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \times \frac{1}{x}$$

إذا $x < 0$ ، $g'(x) < 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $] -\infty; 0[$.

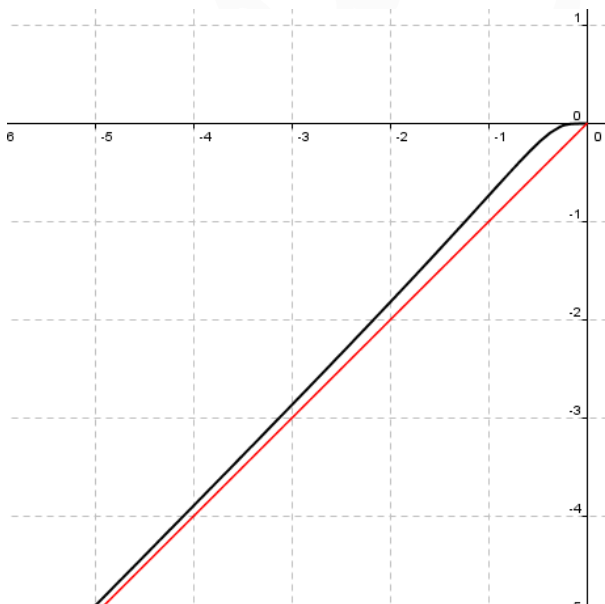
- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0
$g'(x)$		-
$g(x)$	1	

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0$$

6. أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -\infty; 0[$ ، $f(x) > x$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $] -\infty; 0[$ ، $0 < g(x) < 1$ معناه $0 < \frac{f(x)}{x} < 1$ ومعناه $x < f(x) < 0$



ب- استنتاج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) :

من أجل كل $x \in] -\infty; 0[$ ، $x < f(x)$ ، ولدينا $f(0) = 0$

إذا $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ) ويتقاطع في المبدأ O .

ج- إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

7. (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد

طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 0$:

استعمال البرهان بالتراجع :

لدينا $u_0 = -3$ ومنه $u_0 < 0$ الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أن $u_n < 0$ من أجل عدد طبيعي n أي $u_n \in]-\infty; 0[$ إذا حسب جدول تغيرات الدالة f ، $f(u_n) \in]-\infty; 0[$ وهذا يعني أن $u_{n+1} \in]-\infty; 0[$ أي $u_{n+1} < 0$ إذا الخاصية وراثية ؛ وعليه فحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 0$.

ب- تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $x < f(x)$ ، وبما أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in]-\infty; 0[$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < u_{n+1}$ ، وعليه فالمتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ج- تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 إذا هي متقاربة .
- تعيين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ مع $\ell \in \mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $x < f(x)$ ، إذن المعادلة $f(x) = x$ لا تقبل حلا في المجال $]-\infty; 0[$ ولدينا $f(0) = 0$ إذن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا معدوما في المجال $]-\infty; 0[$ وبما أن الدالة f مستمرة على $]-\infty; 0[$ فإن $f(\ell) = \ell$ ومنه $\ell = 0$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

8. m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغير x المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ : $h_m(x) = x e^{\frac{1}{x}} - m x$:

أ- حساب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m :

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]-\infty; 0[$. $h'_m(x) = e^{\frac{1}{x}} + x \left(-\frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}} - m = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) - m$.

ب- المناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$:

$h'_m(x) = 0$ معناه $e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) - m = 0$ ومعناه $\frac{e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x} = m$ أي $f(x) = mx$ و $x \neq 0$.

نسمي (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = mx$

إذا كان $m \in]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$ فإن (Δ) يقطع $(\mathcal{C}_f)$ في نقطة وحيدة وهي المبدأ وبما أن $x \in]-\infty; 0[$ فإن المعادلة $h'_m(x) = 0$ لا تقبل حلا .

إذا كان $m \in]0; 1[$ فإن (Δ) يقطع $(\mathcal{C}_f)$ في نقطتين إحداها المبدأ وأخرى تختلف عنه وبما أن $x \in]-\infty; 0[$ فإن المعادلة $h'_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $]-\infty; 0[$.

التمرين (8) بالأسبوع 2016 م 2 6 نه

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$$

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1 ثم تحقق أن $2,79 < \alpha < 2,80$.

3. استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f و g الدالتان العدديتان المرفعتان على $\mathbb{R}$ ، على الترتيب كما يلي: $f(x) = (2x - 1)e^{-x+1}$ و

$$g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \quad ; \quad (\mathcal{C}_f) \text{ و } (\mathcal{C}_g) \text{ على الترتيب تمثيلهما البيانيان في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس } (O; \vec{i}, \vec{j})$$

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1، ثم جد معادلة له.

3. ارسم المماس (T) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - g(x) = \frac{(2x - 1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1}$.

ب- ادرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$.

ج- باستعمال مكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة x : $\int_1^x f(t) dt$.

د- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = 2$.

(II) 1. احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخميناً لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

$f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f .

2. برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n + 1)]e^{1-x}$.

3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$.

أ- احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: $u_k + u_{k+1}$.

ب- استنتج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$.

ملف مقترح للتلميذ (8) (بالك 2016)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$$

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x+1} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2}{e^x}} - 1 = -1 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -1$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة φ :

$$\text{ليكن } x \in \mathbb{R} : \varphi'(x) = (2x - 1)e^{-x+1} + (x^2 - x + 1)(-1)e^{-x+1}$$

$$\varphi'(x) = (-x^2 + 3x - 2)e^{-x+1}$$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $e^{-x+1} > 0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ هي من إشارة $(-x^2 + 3x - 2)$ ؛

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \text{ ومنه } x' = \frac{-3-1}{-2} = 2 \text{ و } x'' = \frac{-3+1}{-2} = 1 \text{ ، وعليه فمن أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من}$$

$$]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[\text{ ، } -x^2 + 3x - 2 < 0 \text{ أي } \varphi'(x) < 0 \text{ ومنه الدالة } \varphi \text{ متناقصة تماما على كل من المجالين }]-\infty; 1[\text{ و }]2; +\infty[$$

$$\text{ومن أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]1; 2[\text{ ، } -x^2 + 3x - 2 > 0 \text{ أي } \varphi'(x) > 0 \text{ ومنه الدالة } \varphi \text{ متزايدة تماما على المجال }]1; 2[$$

- جدول تغيرات الدالة φ :

x	$-\infty$	1	2	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	-
$\varphi(x)$	$+\infty$	0	$\frac{3}{e} - 1$	0	-1

2. تبين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1 :

من خلال جدول تغيرات الدالة φ لدينا من أجل كل $x \in]-\infty; 1[\cup]1; 2[$ ، $\varphi(x) > 0$ و $\varphi(1) = 0$ إذا المعادلة

$$\varphi(x) = 0 \text{ تقبل في }]-\infty; 2[\text{ حلا وحيدا وهو } 1$$

لدينا الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[2; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left[-1; \frac{3}{e} - 1\right]$ إذا يوجد عدد حقيقي وحيد

$$\alpha \text{ من المجال } [2; +\infty[\text{ حيث } \varphi(\alpha) = 0 \text{ أي } \alpha \text{ حل للمعادلة } \varphi(x) = 0$$

- تحقق أن $2,79 < \alpha < 2,80$:

لدينا $\varphi(2,79) \approx 0,000776$ و $\varphi(2,80) \approx -0,00159$ إذا $\varphi(2,80) < 0$ و $\varphi(2,79) > 0$ ومنه $2,79 < \alpha < 2,80$.

3. استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $\varphi(1) = \varphi(\alpha) = 0$ ؛ من أجل كل $x \in]1; \alpha[\cup]-\infty; 1[$ ، $\varphi(x) > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $\varphi(x) < 0$.

(II) f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ ، على الترتيب كما يلي: $f(x) = (2x - 1)e^{-x+1}$ و

$g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$ ؛ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على الترتيب تمثيلهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$ ومنه

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^{-x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)e^{-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) e = 0$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = 2e^{-x+1} + (2x - 1)(-1)e^{-x+1} \text{ ليكن } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (2 - 2x + 1)e^{-x+1} = (3 - 2x)e^{-x+1}$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x+1} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(3 - 2x)$ ؛

$$f'(x) = 0 \text{ تكافئ } 3 - 2x = 0 \text{ ومعناه } x = \frac{3}{2} ;$$

$$f'(x) > 0 \text{ تكافئ } 3 - 2x > 0 \text{ ومعناه } x < \frac{3}{2} .$$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}[$ ومتناقصة تماما على المجال $]\frac{3}{2}; +\infty[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	0

2. تبين أن للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1:

$$g'(x) = \frac{2(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} : x \in \mathbb{R} \text{ ليكن}$$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2 - 4x^2 + 4x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} \text{ أي}$$

$$f'(1) = (3 - 2)e^{-1+1} = 1 \text{ و } g'(1) = \frac{-2 + 2 + 1}{(1 - 1 + 1)^2} = 1 \text{ ومنه}$$

إذا للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسين لهما نفس معامل التوجيه 1 في النقطة ذات الفاصلة 1 ، ولدينا

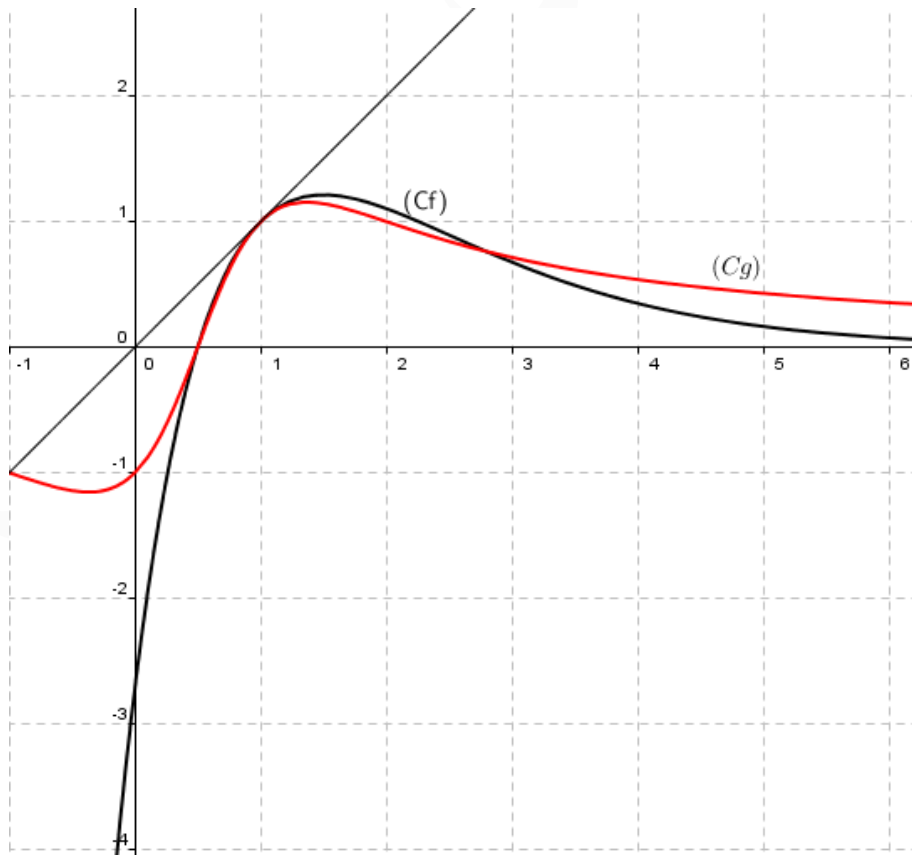
$$g(1) = \frac{2 - 1}{1^2 - 1 + 1} = 1 \text{ و } f(1) = (2 - 1)e^{-1+1} = 1 \text{ إذا للمنحنيين } (C_f) \text{ و } (C_g) \text{ نقطة مشتركة}$$

$A(1;1)$ وهي نقطة التماس ومنه للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة $A(1;1)$.

- إيجاد معادلة للمستقيم (T) :

$$y = x - 1 + 1 \text{ أي } y = x$$

3. رسم المماس (T) والمنحنى (C_f) :



4. أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1}$$

$$f(x) - g(x) = (2x-1)e^{-x+1} - \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} \quad \text{ليكن } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)[(x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1]}{x^2 - x + 1}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1} \quad \text{أي}$$

ب- دراسة إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لندرس إشارة ثلاثي الحدود $x^2 - x + 1$: $\Delta = 1 - 4 = -3$ ومنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $x^2 - x + 1 > 0$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	α	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+	+	+
$\varphi(x)$	+	+	0	+	-
$x^2 - x + 1$	+	+	+	+	+
$f(x) - g(x)$	-	0	+	+	-

- استنتاج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$:

يتقاطعان $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ في النقط $A(1;1)$ ، $B\left(\frac{1}{2};0\right)$ و $C(\alpha;f(\alpha))$.

في المجالين $\left[-\infty; \frac{1}{2}\right]$ و $[\alpha; +\infty[$ ، $(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل $(\mathcal{C}_g)$ ؛

وفي المجالين $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ و $[\alpha; 1]$ ، $(\mathcal{C}_f)$ يقع أعلى $(\mathcal{C}_g)$.

ج- باستعمال مكالمة بالتجزئة ، احسب بدلالة x : $\int_1^x f(t)dt$:

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x (2t-1)e^{-t+1}dt \quad \text{ليكن } x \in \mathbb{R}$$

نضع $u(t) = 2t-1$ و $v(t) = e^{-t+1}$ ومنه $u'(t) = 2$ و $v(t) = -e^{-t+1}$.

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x (2t-1)e^{-t+1}dt = \int_1^x u(t)v'(t)dt$$

$$\int_1^x f(t)dt = u(t)v(t) - \int_1^x u'(t)v(t)dt$$

$$\int_1^x f(t)dt = \left[-(2t-1)e^{-t+1} \right]_1^x - \int_1^x -2e^{-t+1}dt$$

$$\int_1^x f(t) dt = -(2x-1)e^{-x+1} + 1 - 2[e^{-t+1}]_1^x$$

$$\int_1^x f(t) dt = -(2x-1)e^{-x+1} + 1 - 2(e^{-x+1} - 1)$$

$$\int_1^x f(t) dt = -(2x+1)e^{-x+1} + 3$$

د- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$:

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx$$

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = [-(2x+1)e^{-x+1} + 3]_1^2 - \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx$$

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = -5e^{-1} + 3 - [\ln(x^2-x+1)]_1^2$$

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = (-5e^{-1} + 3 - \ln 3) ua$$

المساحة المطلوبة هي $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$ حيث:

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = (-5e^{-1} + 3 - \ln 3) ua \approx 0,0619905 ua$$

(II) 1. حساب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (3-2x)e^{-x+1}$ ومنه

$$f''(x) = -2e^{-x+1} - (3-2x)e^{-x+1} = (2x-5)e^{-x+1}$$

$$f^{(3)}(x) = 2e^{-x+1} - (2x-5)e^{-x+1} = -(2x-7)e^{-x+1}$$

$$f^{(4)}(x) = -2e^{-x+1} + (2x-7)e^{-x+1} = (2x-9)e^{-x+1}$$

- تخمين عبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم، $f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n+1)] e^{1-x}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

2. البرهان بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n+1)] e^{1-x}$:

$$f'(x) = (-1) [2x - (2+1)] e^{1-x} = -(2x-3)e^{1-x} \text{ ومنه الخاصية الابتدائية محققة.}$$

نفرض أنه $f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n+1)] e^{1-x}$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ولنبرهن أن

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} [2x - (2n+3)] e^{1-x}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n 2e^{1-x} + (-1)^n [2x - (2n+1)] (-1) e^{1-x} \text{ لدينا}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{1-x} [2x - (2n+1) - 2]$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{1-x} [2x - (2n+3)]$$

ومنه الخاصية وراثية وعليه فحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ،
 $f^{(n)}(x) = (-1)^n [2x - (2n + 1)] e^{1-x}$

3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$

أ- حساب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: $u_k + u_{k+1}$

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = f^{(n)}(1) = (-1)^n [2 - (2n + 1)] = (-1)^{n+1} (2n - 1)$ ،

ليكن $k \in \mathbb{N}^*$ ، $u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1} (2k - 1) + (-1)^{k+2} (2k + 1)$

$$u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1} (2k - 1 - 2k - 1)$$

$$u_k + u_{k+1} = 2(-1)^{k+2} = 2(-1)^k \text{ أي}$$

ب- استنتاج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} = \frac{(u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}) + (u_1 + u_2 + \dots + u_{2n})}{2}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$$

$$= \frac{u_1 - u_{2n+1} + (u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}) + (u_2 + \dots + u_{2n} + u_{2n+1})}{2}$$

$$= \frac{u_1 - u_{2n+1}}{2} + \frac{1}{2} [(u_1 + u_2) + (u_2 + u_3) + \dots + (u_{2n} + u_{2n+1})]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - ((-1)^{2n+2} (4n + 1)) \right] + \frac{1}{2} \times 2 [(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{2n}]$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} = -2n + [(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{2n}] = -2n$$

التمرين 11 بال 2018 م 7 ن

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = (1+x+x^2)e^{\frac{1}{x}} - 1$.

1. بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,9 < \alpha < 1$ ، واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{\frac{1}{x}}$.

و $(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

ب- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = -1$ (يمكن وضع $t = -\frac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل

للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في $+\infty$.

3. الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{\frac{1}{x}}$.

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- تحقق أن $f(x) - x = (1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ (نأخذ $f(\alpha) \approx 1,73$).

5. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$ بحدها العام u_n حيث:

أ- اكتب u_n بدلالة n ثم بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1 .

ب- احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث:

$$S_n = \left(\frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \right)$$

ملح مقترح للتمرين 11 باك 2018

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$.

1. تبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$.

ليكن $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = (1+2x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}$.

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}(x^2 + 2x^3 + 1 + x + x^2)e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}(2x^2 + 2x^3 + 1 + x)e^{-\frac{1}{x}}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $(x+1)(2x^2+1) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ إذا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $e^{-\frac{1}{x}} > 0$; $(x+1) > 0$; $(2x^2+1) > 0$ و $x^2 > 0$ إذا $g'(x) > 0$. وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,9 < \alpha < 1$.

لدينا الدالة g مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا $g(0,9) \approx -0,108$ و $g(1) \approx 0,104$ ومنه $g(0,9) \times g(1) < 0$ إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]0,9; 1[$ حيث $g(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ فإن α هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$.

• استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

من أجل كل $x \in]0; \alpha[$: $g(x) < 0$; من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$: $g(x) > 0$ و $g(\alpha) = 0$.

(II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و $(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} \right] = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x) = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)e^{-\frac{1}{x}} = 0 \text{ إذا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

ب- تبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$\text{ليكن }]0; +\infty[: x \in \left[(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right] : \frac{1}{x^2} \left[(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right] = f'(x) = -\frac{1}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \times g(x)$$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f : $g(\alpha) = 0$ معناه $f'(\alpha) = 0$

لدينا من أجل $]0; \alpha[$: $x \in]0; \alpha[$ أي $g(x) < 0$ أي $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; \alpha[$;

ولدينا من أجل كل $]\alpha; +\infty[$: $x \in]\alpha; +\infty[$ أي $g(x) > 0$ أي $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$.

• جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$2. \text{ تبين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = -1 \text{ (يمكن وضع } t = -\frac{1}{x} \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{-e^t + 1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} - \left(\frac{e^t - e^0}{t - 0} \right) = -1 ; x = -\frac{1}{t} \text{ معناه } t = -\frac{1}{x}$$

• استنتاج أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) في $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + e^{-\frac{1}{x}} \right] + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x e^{-\frac{1}{x}} - x \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1 - 1 = 0 ; \text{ ومنه المستقيم } (\Delta) \text{ ذا المعادلة } y = x \text{ مقارب مائل للمنحنى } (C_f) \text{ في } +\infty .$$

$$3. \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال }]0; +\infty[\text{ بـ } h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}$$

أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}} = 0 - 1 + 1 = 0$$

• دراسة اتجاه تغير الدالة h :

ليكن $x \in]0; +\infty[$: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \left(1 + e^{-\frac{1}{x}}\right)$ لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$:

$h'(x) < 0$ ومنه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

• استنتاج إشارة $h(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$h'(x)$		-
$h(x)$		$\searrow 0$

من خلال جدول تغيرات الدالة h ينتج أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $h(x) > 0$.

ب- التحقق أن $f(x) - x = (1+x)h(x)$:

ليكن $x \in]0; +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x = \frac{1}{x} + e^{-\frac{1}{x}} + xe^{-\frac{1}{x}} - x = h(x) + 1 + xe^{-\frac{1}{x}} - x$$

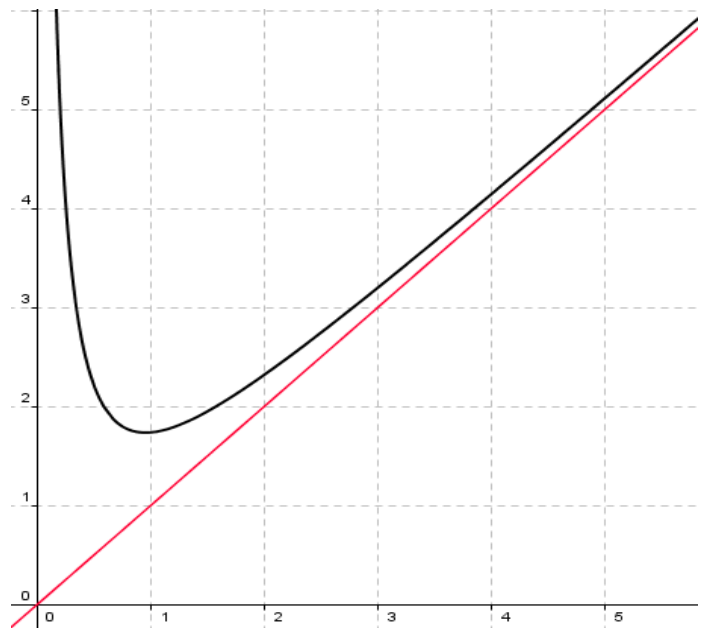
$$f(x) - x = h(x) + x \left(\frac{1}{x} + e^{-\frac{1}{x}} - 1 \right) = h(x) + xh(x) = (1+x)h(x)$$

• استنتاج الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f(x) - x = (1+x)h(x)$ و $h(x) > 0$ و $x+1 > 0$ إذا $f(x) - x > 0$:

وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق المستقيم (Δ) .

4. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ (نأخذ $f(\alpha) \approx 1,73$).



$$5. (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بحدها العام } u_n \text{ حيث: } u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$$

أ- كتابة u_n بدلالة n :

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N}^* : f\left(\frac{1}{n}\right) = n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{-n} = n + \left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n} \text{ ومنه}$$

$$u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1} \left[n + \left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n} \right] - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2}{n+1} + e^{-n} - \frac{n^2}{n+1} = e^{-n}$$

• تبين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1 :

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = u_n \times e^{-1} \text{ ومنه } (u_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } e^{-1} \text{ وحدها الأول } u_1 \text{ حيث:}$$

$$u_1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ب- حساب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث:

$$S_n = \left(\frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \right)$$

التمرين (12) باك 2019 م 7 ن

(I) f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي. ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.
2. احسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).
3. أ) احسب $f'_k(x)$ ، ثم حدد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k .
ب) شكل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.
4. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k ، الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$ و $(\mathcal{C}_{k+1})$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$.
نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right]$.
2. أ) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28 < \alpha < -1,27$.

ب) عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right| = \left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

3. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+1)e^{-2x}$.

- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.
- ب) باستعمال الكاملة بالتجزئة، احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = -1$ و $x = 0$.

ملح (9) باك 2017 - الدورة العادية -

(I) f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي. ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما:

ليكن $k \in \mathbb{R}$ ، نضع $y = (x+1)^2 e^{-kx}$ لدينا $y \geq 0$.

إذا كان $y = 0$ فإن $(x+1)^2 e^{-kx} = 0$ وهذا يعني أن $(x+1)^2 = 0$ أي $x = -1$.

إذا كان $y > 0$ فإن: $(x+1)^2 e^{-kx} = y$ تكافئ $\ln[(x+1)^2 e^{-kx}] = \ln y$ ومعناه

$$-kx + \ln(x+1)^2 = \ln y \quad \text{أي} \quad \ln(x+1)^2 + \ln e^{-kx} = \ln y$$

من أجل كل $k \in \mathbb{R}$: $(x+1)^2 e^{-kx} = y$ تكافئ $-kx + \ln(x+1)^2 = \ln y$ وتكافئ $\begin{cases} -x = 0 \\ \ln(x+1)^2 = \ln y \end{cases}$

ومعناه $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = 0 \\ y = (x+1)^2 \end{cases}$ ؛ إذا كل المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين هما: $B(-1;0)$ و $C(0;1)$.

2. حساب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 e^{-kx}$$

- إذا كان $k = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 = +\infty$

- إذا كان $k < 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = +\infty$

نضع $-kx = 2t$ وهذا يعني أن $x = -\frac{2}{k}t$ فإن $x \rightarrow -\infty$ و $t \rightarrow +\infty$ ومنه:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{k}t + 1 \right)^2 e^{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{2}{k}t + 1 \right) e^t \right]^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{k}te^t + e^t \right]^2 = 0$$

- إذا كان $k > 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} -kx = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 e^{-kx}$$

- إذا كان $k = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 = +\infty$

- إذا كان $k < 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} -kx = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = +\infty$

- إذا كان $k > 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = 0$

نضع $-kx = 2t$ وهذا يعني أن $x = -\frac{2}{k}t$ ، $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow -\infty$ ومنه:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{k}t + 1 \right)^2 e^{2t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\left(-\frac{2}{k}t + 1 \right) e^t \right]^2 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{2}{k}te^t + e^t \right]^2 = 0$$

الملخص:

	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$
$k < 0$	0	$+\infty$
$k = 0$	$+\infty$	$+\infty$
$k > 0$	$+\infty$	0

3. أ. حساب $f'_k(x)$:

ليكن $x \in \mathbb{R}$ وليكن $k \in \mathbb{R}$: $f'_k(x) = 2(x+1)e^{-kx} - k(x+1)^2 e^{-kx}$

أي $f'_k(x) = (-kx^2 - 2kx - k + 2x + 2)e^{-kx} = [-kx^2 + 2(1-k)x - k + 2]e^{-kx}$

• تحديد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k :

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $e^{-kx} > 0$ ومنه إشارة $f'_k(x)$ هي من إشارة $[-kx^2 + 2(1-k)x - k + 2]$

- إذا كان $k = 0$ فإن $[-kx^2 + 2(1-k)x - k + 2]$ يصبح $2x + 2$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x + 2$	$-$	0	$+$

تكون الدالة f_k متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1; +\infty[$.

- إذا كان $k \neq 0$ فإن المميز المختصر للعبارة $[-kx^2 + 2(1-k)x - k + 2]$ هو Δ' حيث:

$$\Delta' = (1-k)^2 - (-k)(2-k) = 1 - 2k + k^2 + 2k - k^2 = 1$$

$$x'' = \frac{k-1+1}{-k} \text{ و } x' = \frac{k-1-1}{-k} \text{ حيث: } [-kx^2 + 2(1-k)x - k + 2]$$

أي $x' = -1 + \frac{2}{k}$ و $x'' = -1$ وبالتالي:

- إذا كان $k < 0$ فإن $x' < x''$ ومنه:

x	$-\infty$	$-1 + \frac{2}{k}$	-1	$+\infty$
$-kx^2 + 2(1-k)x - k + 2$	$+$	0	$-$	0

إذا تكون الدالة f_k متناقصة تماما على المجال $[-1 + \frac{2}{k}; -1]$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -1 + \frac{2}{k}]$ و $[-1; +\infty[$.

إذا كان $k > 0$ فإن $x' > x''$ ومنه:

x	$-\infty$	-1	$-1 + \frac{2}{k}$	$+\infty$
$-kx^2 + 2(1-k)x - k + 2$	$-$	0	$+$	0

إذا تكون الدالة f_k متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -1]$ و $[-1 + \frac{2}{k}; +\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1; -1 + \frac{2}{k}]$.

(ب) جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما:

x	$-\infty$	-1	$-1 + \frac{2}{k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	$-$	0	$+$	0
$f_k(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4e^{k-2}}{k^2}$	0

$$f_k\left(-1 + \frac{2}{k}\right) = \left(-1 + \frac{2}{k} + 1\right)^2 e^{-k\left(-1 + \frac{2}{k}\right)} = \frac{4e^{k-2}}{k^2} ; f_k(-1) = (-1+1)^2 e^k = 0$$

4. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي k ، الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) :

ليكن $x \in \mathbb{R}$ وليكن $k \in \mathbb{R}$:

$$f_{k+1}(x) = (x+1)^2 e^{-(k+1)x} = (x+1)^2 e^{-kx} \times e^{-x} \text{ و } f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$$

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx} \times (e^{-x} - 1)$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ومن أجل كل $k \in \mathbb{R}$: $(x+1)^2 \geq 0$ و $e^{-kx} > 0$ ؛

$e^{-x} - 1 = 0$ تكافئ $e^{-x} = 1$ وتكافئ $-x = 0$ أي $x = 0$ ؛

$e^{-x} - 1 > 0$ تكافئ $e^{-x} > 1$ وتكافئ $-x > 0$ أي $x < 0$ ؛ $e^{-x} - 1 < 0$ تكافئ $x > 0$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f_{k+1}(x) - f_k(x)$		+	+	-
الوضعية	$(\mathcal{C}_{k+1})$ يقع فوق $(\mathcal{C}_k)$	$(\mathcal{C}_{k+1})$ يقع فوق $(\mathcal{C}_k)$	$(\mathcal{C}_{k+1})$ يقع تحت $(\mathcal{C}_k)$	
		$(\mathcal{C}_{k+1})$ يقطع $(\mathcal{C}_k)$ في $B(-1; 0)$	$(\mathcal{C}_{k+1})$ يقطع $(\mathcal{C}_k)$ في $C(0; 1)$	

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$.

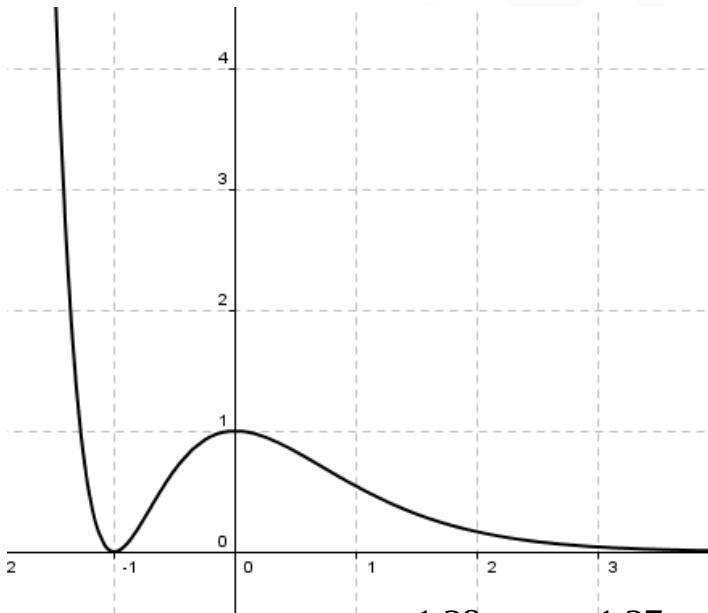
نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x} = f_2(x)$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
$f_2'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

• رسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $[-\frac{3}{2}; +\infty[$:



2. أ. تبين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28 < \alpha < -1,27$ ؛

لدينا $f(0) = 1$ ومن أجل كل $x \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[$ ، $0 \leq f(x) < 1$ إذا المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1; +\infty[$ وهو 0.

لدينا الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty; -1]$ إذا هي مستمرة على المجال $[-1, 28]$ ولدينا $f(-1, 27) \approx 0,92$ و $f(-1, 28) \approx 1,014$ ومنه $f(-1, 28) < 1 < f(-1, 27)$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[-1, 28]$ يحقق $f(\alpha) = 1$ وبما أن الدالة f متناقصة ماما على المجال $]-\infty; -1]$ فإن α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 1$ في المجال $]-\infty; -1]$ ؛ وعليه فالمعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ هما 0 و α حيث: $\alpha \in]-1, 28]$

(ب) عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left| \frac{x+1}{e^x} \right| = \left| \frac{m+1}{e^m} \right|$ حلا وحيدا.

$$\left| \frac{x+1}{e^x} \right| = \left| \frac{m+1}{e^m} \right| \text{ تكافئ } \frac{|x+1|}{e^x} = \frac{|m+1|}{e^m} \text{ وتكافئ } \left(\frac{|x+1|}{e^x} \right)^2 = \left(\frac{|m+1|}{e^m} \right)^2 \text{ ومعناه}$$

$$\frac{(x+1)^2}{e^{2x}} = \frac{(m+1)^2}{e^{2m}} \text{ معناه } (x+1)^2 e^{-2x} = (m+1)^2 e^{-2m} \text{ أي } f(x) = f(m)$$

تقبل المعادلة $\left| \frac{x+1}{e^x} \right| = \left| \frac{m+1}{e^m} \right|$ حلا وحيدا معناه تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلا وحيدا وهذا يعني بياننا أن

$$f(m) = 0 \text{ أو } f(m) > 1 \text{ أي } m = -1 \text{ أو } m \in]-\infty; \alpha[$$

3. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (x+1)e^{-2x}$

(أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$

ليكن $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} = (-2x-1)e^{-2x}$ ومنه

$$g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = (-2x-1)e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} - e^{-2x} = (-2x-1+2x+2-1)e^{-2x} = 0$$

$$g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$$

• استنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$ معناه $g'(x) = -\frac{1}{2}g'(x) + \frac{1}{2}e^{-2x} = 0$ ومنه دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

$$G(x) = -\frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{4}e^{-2x} \text{ أي } G(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x}$$

(ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد المنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتاهما $x = -1$ و $x = 0$.

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{-2x} dx$$

$$\text{نضع } \begin{cases} u(x) = (x+1)^2 \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} u'(x) = 2(x+1) \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases} \text{ إذا}$$

$$A = \int_{-1}^0 u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'(x) \times v(x) dx$$

$$\begin{aligned} A &= \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x} \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 (x+1) e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{2} \right) e^{-2x} \right]_{-1}^0 \\ A &= -\frac{1}{2} \left[\left(x^2 + 2x + 1 + x + \frac{3}{2} \right) e^{-2x} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2} \left[\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2} \right) e^{-2x} \right]_{-1}^0 \\ A &\approx 0,6 \text{ ua} ; A = -\frac{1}{2} \left[\frac{5}{2} - \left(1^2 - 3 + \frac{5}{2} \right) e^2 \right] = \frac{e^2 - 5}{4} \text{ ua} \end{aligned}$$

حلول نماذج
الدوال الأسبعية
الواردة في البكالوريا
شعبة:
تقني رياضي

التمرين (1) بالك 2009 م 2,5 ن

نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$. وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

2. ادرس تغيرات الدالة f على $[0; +\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

3. بين أن المستقيم ذي المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)]$.

- استنتج المستقيم المقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$.

4. بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا واحدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$.

5. ارسم $(\mathcal{C}_f)$ من أجل $x \in \mathbb{R}$.

6. بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.

7. احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات ذات المعادلات: $y = x + 2$ ، $x = 0$ و $x = \alpha$.

- بين أن $\mathcal{A}(\alpha) = 2\ln(-\alpha)$ ثم استنتج حصرا للعدد $\mathcal{A}(\alpha)$.

حل مقترح للتمرين (1) بالك 2009 م

نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1}$.

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) + f(-x) = x + \frac{2}{e^x + 1} - x + \frac{2}{e^{-x} + 1}$$

$$f(x) + f(-x) = \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{1 + e^x} = \frac{2(e^x + 1)}{1 + e^x} = 2$$

• استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$:

النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ معناه أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(2 \times 0 - x) \in \mathbb{R}$ و

$$f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x) \text{ ومعناه أنه من أجل كل عدد حقيقي } x, (-x) \in \mathbb{R} \text{ و } f(-x) = 2 - f(x)$$

ليكن x عددا حقيقيا: لدينا $(-x) \in \mathbb{R}$ لأن 0 يتوسط المجموعة $\mathbb{R}$ ولدينا من السؤال السابق $f(x) + f(-x) = 2$ أي

$$f(-x) = 2 - f(x) \text{ إذن } \omega(0;1) \text{ هي مركز تناظر للمنحنى } (\mathcal{C}_f).$$

2. دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2}{e^x + 1} \right) = +\infty$

$$f(0) = 0 + \frac{2}{e^0 + 1} = 1$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{2x} > 0$ و $(e^x + 1)^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذن هي متزايدة تماما على $[0; +\infty[$.

استنتاج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [2 - f(t)] = -\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

3. تبين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$

إذا للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ وهذا عند $+\infty$.

• حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \frac{2}{e^x + 1} - (x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} - 2$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$

• استنتاج المستقيم المقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$ إذن للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ مستقيم مقارب مائل معادلته

$y = x + 2$ وهذا عند $-\infty$.

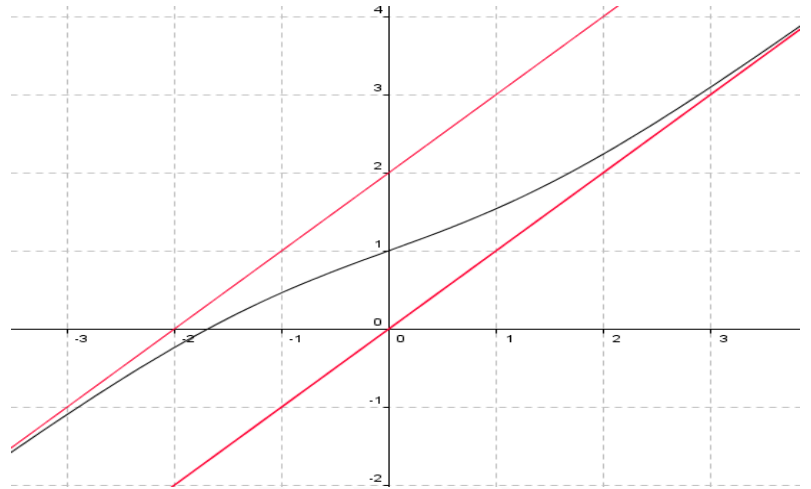
4. تبين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا واحدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة على المجال $[-1,7; -1,6]$ ولدينا $f(-1,7) \approx -0,0089$ و

$f(-1,6) \approx 0,064$ إذن $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي

α من المجال $[-1,7; -1,6]$ حيث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α يكون وحيد.

5. رسم (C_f) من أجل $x \in \mathbb{R}$:



6. تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1} = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}(e^x + 1)} = x + \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

7. حساب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات: $y = x + 2$ ، $x = 0$ ، $x = \alpha$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha) &= \int_{\alpha}^0 [x + 2 - f(x)] dx = \int_{\alpha}^0 \left[x + 2 - x - \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right] dx \\ &= \int_{\alpha}^0 \left[2 + 2 \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right] dx = 2 \left[x + \ln(1 + e^{-x}) \right]_{\alpha}^0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = 2 \left[\ln 2 - \alpha - \ln(1 + e^{-\alpha}) \right] \quad \text{أو} \quad \mathcal{A}(\alpha) = 2 \left[\ln \frac{2}{1 + e^{-\alpha}} - \alpha \right]$$

• تبين أن $\mathcal{A}(\alpha) = 2 \ln(-\alpha)$:

لدينا $f(\alpha) = 0$ معناه $\alpha + \frac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha} + 1} = 0$ ومعناه $\frac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha} + 1} = -\alpha$

يكافئ $\ln \frac{2}{e^{-\alpha} + 1} + \ln e^{-\alpha} = \ln(-\alpha)$ ويكافئ $\ln \frac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha} + 1} = \ln(-\alpha)$

معناه $\ln \frac{2}{e^{-\alpha} + 1} - \alpha = \ln(-\alpha)$ ومعناه $2 \left(\ln \frac{2}{e^{-\alpha} + 1} - \alpha \right) = 2 \ln(-\alpha)$ أي $\mathcal{A}(\alpha) = 2 \ln(-\alpha)$

• استنتاج حصر العدد $\mathcal{A}(\alpha)$:

$-1,7 < \alpha < -1,6$ معناه $1,6 < -\alpha < 1,7$ ومعناه $\ln 1,6 < \ln(-\alpha) < \ln 1,7$ يكافئ

$0,94 < \mathcal{A}(\alpha) < 1,06$ أي $2 \ln 1,6 < 2 \ln(-\alpha) < 2 \ln 1,7$

التمرين (2) باك 2010 م 2 7 نه

$$f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بالعلاقة: } f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$.

2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها.

3. بين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

4. أ- (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب: $y = x + \frac{4}{3}$ و $y = x$.

- بين أن (D) و (D') مقاربان للمنحني (C_f) ، ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث: $0,9 < x_0 < 0,91$ و $-1,66 < x_1 < -1,65$.

ج- احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f(x) + f(-x)$.
- فسر النتيجة هندسيا.

د- ارسم (D) و (D') و (C_f) .

هـ- m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرفة بالمعادلة $y = x + m$.

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

5. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = [f(x)]^2$.

- ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x .

حل مقترح للتمرين (2) باك 2010

$$f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بـ: } f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f الممثل في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)} = \frac{3x(e^x - 1)}{3(e^x - 1)} + \frac{-4}{3(e^x - 1)}$$

$$f(x) = x - \frac{4}{3(e^x - 1)}$$

2. حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها:

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{4}{3(e^x - 1)} = -\infty$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{3(e^x - 1)} = 0$ إذا $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{-4}{3(e^x - 1)} = +\infty$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \frac{-4}{3(e^x - 1)} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{-4}{3(e^x - 1)} = -\infty$

3. تبين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها:

$f'(x) = 1 + \frac{4e^x}{3(e^x - 1)^2}$ ومنه $f(x) = x + \frac{-4}{3(e^x - 1)}$

وبالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) > 0$ ، إذا f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

4.1. (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب $y = x + \frac{4}{3}$ و $y = x$

- تبين أن (D) و (D') مقاربان للمنحني (C_f)

وبالتالي (D) هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \frac{-4}{3(e^x - 1)} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{3(e^x - 1)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{4}{3} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \frac{-4}{3(e^x - 1)} - x - \frac{4}{3} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{4}{3} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{(e^x - 1)} + 1 \right) = 0$$

وبالتالي (D') هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

-وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x = \frac{-4}{3(e^x - 1)}$		+	-
الوضعية	(D) فوق (D)	(C_f) أسفل (C_f)	

-وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D') :

$$f(x) - \left(x + \frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{e^x - 1} + 1 \right) = -\frac{4}{3} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - \left(x + \frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)$		+	-
الوضعية	(D') فوق (C_f)	(D') أسفل (C_f)	

ب- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,9 < x_0 < 0,91$ و $-1,66 < x_1 < -1,65$:
لدينا الدالة f مستمرة على كل مجال من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ إذا هي مستمرة على كل مجال من المجالين $[0,9; 0,91]$ و $[-1,66; -1,65]$ ؛

ولدينا: $f(0,9) \approx -0,01$ و $f(0,91) \approx 0,01$ ومنه $f(0,9) \times f(0,91) < 0$
ولدينا: $f(-1,66) \approx -0,01$ و $f(-1,65) \approx 0,0002$ ومنه $f(-1,66) \times f(-1,65) < 0$
إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x_0) = 0$ و $f(x_1) = 0$.

ج- حساب $f(x) + f(-x)$:

$$f(x) + f(-x) = x + \frac{-4}{3(e^x - 1)} - x + \frac{-4}{3(e^{-x} - 1)}$$

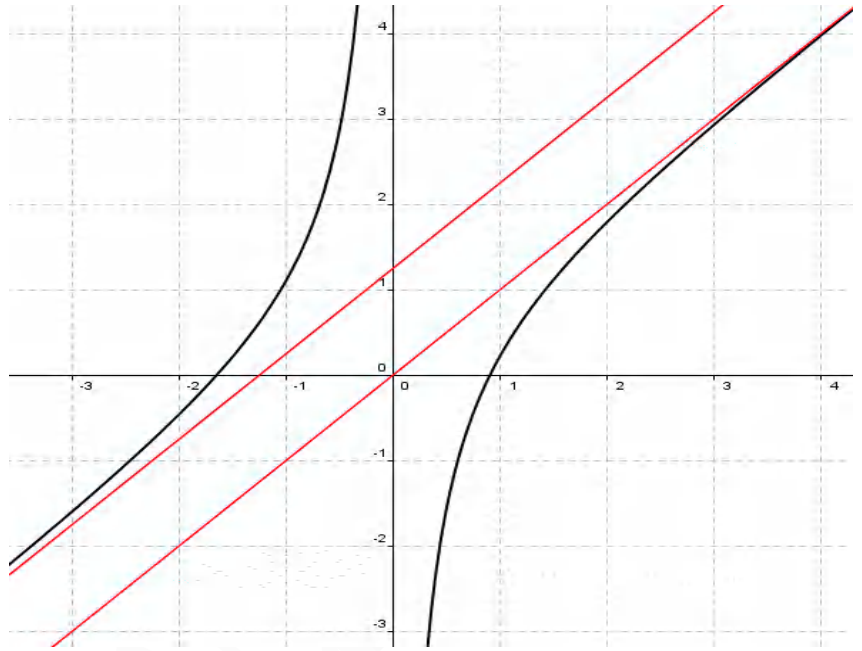
$$f(x) + f(-x) = \frac{-4}{3} \left[\frac{1}{(e^x - 1)} + \frac{e^x}{(1 - e^x)} \right] = \frac{-4}{3} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x - 1} \right] = \frac{4}{3}$$

-التفسير الهندسي:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}^*$ ولدينا $f(2 \times 0 - x) = 2 \times \frac{2}{3} - f(x)$

ومنه النقطة $\omega \left(0; \frac{2}{3} \right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

د- رسم (D) و (D') و (C_f) :



هـ- m عدد حقيقي، المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x + m$ (D_m)

المناقشة بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$

إذا كان $m \in]-\infty; 0[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $m \in [0; \frac{4}{3}]$ فإن المعادلة لا تقبل حلا.

5. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يأتي: $g(x) = [f(x)]^2$

دون حساب $g(x)$ بدلالة x ، دراسة تغيرات الدالة g :

لدينا: $g'(x) = 2f'(x) \times f(x)$

ولدينا من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، ولدينا أيضا إذا كان $x \in]0; x_0[$ فإن $f(x) < 0$ وإذا كان $x \in]x_0; +\infty[$ فإن $f(x) > 0$ وعليه فمن أجل كل $x \in]0; x_0[$ ، $g'(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]x_0; +\infty[$ ، $g'(x) > 0$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^2 = +\infty$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ إذا $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

التمرين (3) باك 2011 (م 2) (ن 7)

الجزء I :

- f الدالة المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$. $(\mathcal{C}_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
1. ادرس تغيرات الدالة f .
 2. عين المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
 3. بين أن للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة لمماس $(\mathcal{C}_f)$ عندها .
 4. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = f(x) - x$. ادرس تغيرات الدالة g .
 5. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.
ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2,7 < \alpha < 2,8$.
 - ب- ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$ والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

الجزء II :

- (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.
1. باستخدام $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) ، مثل U_0 ، U_1 ، U_2 على حامل محور الفواصل .
 2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq U_n < \alpha$.
 3. بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما .
 4. استنتج أن (U_n) متقاربة وبين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

عمل مقترح للتمرين (3) باك 2011

الجزء I :

- f الدالة المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$. $(\mathcal{C}_f)$ منحناها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
1. دراسة تغيرات الدالة f :
- لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \frac{4}{e^x + 1} = -1$
- ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{4}{e^x + 1} = 3$

$f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ ومنه $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ لدينا إذا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f

متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	3

2. تعيين المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathcal{C}_f)$:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ إذا المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = -1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ إذا المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 3$.

3. تبين أن للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها:

لدينا $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ ومنه

$$f''(x) = \frac{4e^x(e^x + 1)^2 - 8e^{2x}(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} = \frac{4e^x(e^x + 1)(e^x + 1 - 2e^x)}{(e^x + 1)^4}$$

$$= \frac{4e^x(e^x + 1)(1 - e^x)}{(e^x + 1)^4}$$

$f''(x) = 0$ معناه $1 - e^x = 0$ ومعناه $x = 0$ ؛ $f''(x) > 0$ معناه $1 - e^x > 0$ ومعناه $x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		+	-

العبارة $f''(x)$ تنعدم من أجل 0 وتغير من إشارتها وعليه فللمنحني $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف $\omega(0; f(0))$ أي $\omega(0; 1)$

• معادلة المماس للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $\omega(0; 1)$:

$y = f'(0)x + f(0)$ أي $y = x + 1$.

4. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = f(x) - x$.
أ- دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} - 1 = \frac{4e^x - e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x + 1)^2} = -\frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \text{ ومنه } g(x) = f(x) - x$$

لدينا $g'(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ، $g'(x) < 0$ ، وعليه فالدالة g متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

ب- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2,7 < \alpha < 2,8$:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ وكذلك الدالة $x \mapsto -x$ إذا الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ومنه هي مستمرة على المجال $[2,7; 2,8]$

ولدينا: $g(2,7) \approx 0,048$ و $g(2,8) \approx -0,029$ إذن $g(2,7) \times g(2,8) < 0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة

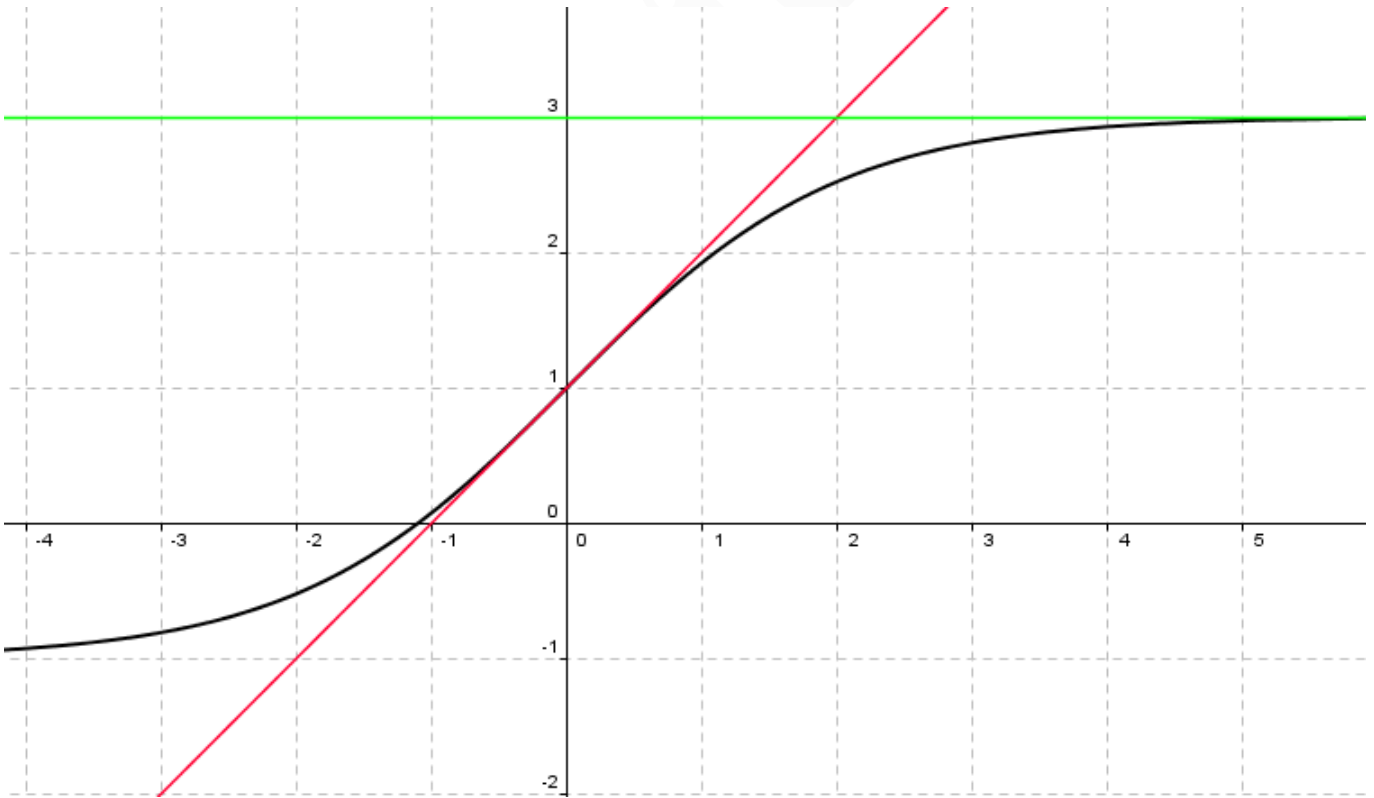
يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[2,7; 2,8]$ يحقق $g(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة g متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ فإن α يكون وحيداً.

1.5- أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \text{ معناه } 3 - \frac{4}{e^x + 1} = 0 \text{ ومعناه } 3 = \frac{4}{e^x + 1} \text{ يكافئ } 3e^x = 1$$

$$\text{ويكافئ } e^x = \frac{1}{3} \text{ أي } x = -\ln 3$$

ب- رسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$ والمنحني (C_f) :



الجزء II :

(U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. باستخدام (C_f) و (Δ) تمثيل U_0 ، U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل:

لدينا $U_0 = 1$ ، $U_1 = f(U_0)$ و $U_2 = f(U_1)$

2. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq U_n < \alpha$:

لدينا $U_0 = 1$ إذا $1 \leq U_0 < \alpha$ ؛ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1; \alpha[$

وبالتالي صورة المجال $[1; \alpha[$ بواسطة الدالة f هو المجال $[f(1); f(\alpha)[$ أي $\left[3 - \frac{4}{e+1}; \alpha\right[$

نفرض أن $U_k \in [1; \alpha[$ من أجل عدد طبيعي k إذن $f(U_k) \in \left[3 - \frac{4}{e+1}; \alpha\right[$ ولدينا $3 - \frac{4}{e+1} \approx 1,92$ إذن

$\left[3 - \frac{4}{e+1}; \alpha\right[\subset [1; \alpha[$ ومنه $f(U_k) \in [1; \alpha[$ أي $U_{k+1} \in [1; \alpha[$ وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من

أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n \in [1; \alpha[$.

3. تبين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما: $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = g(U_n)$

لدينا من أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) > 0$ وبما أن $U_n \in [1; \alpha[$ فإن $g(U_n) > 0$ أي $U_{n+1} - U_n > 0$ ومنه

المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4. استنتاج أن (U_n) متقاربة:

المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد α وهي متزايدة تماما إذن هي متقاربة،

• تبين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$:

بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \ell$

ولدينا $U_{n+1} = f(U_n)$ حيث f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن $\ell = f(\ell)$ وهذا يعني $f(\ell) - \ell = 0$ أي $g(\ell) = 0$

ولدينا المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α إذن $\ell = \alpha$ وعليه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

التمرين 4 (باك 2012) (م 2) (ن 7)

الجزء I :

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث:

$$1,59 < \alpha < 1,60$$

3. استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء II :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm).

1. بين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاريين معادلتيهما على الترتيب: $y = -1$ و $y = 0$.

2. أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$.

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- احسب $f(1)$ ، ثم استنتج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

3. أ- بين أن: $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ ، حيث α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء الأول.

ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

ج- ارسم المنحني $(\mathcal{C}_f)$.

4. ناقش بياننا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$$

5. h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كلام من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة h .

ملح مقترح للتمرين 4 (باك 2012)

الجزء I :

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$.

1. دراسة تغيرات الدالة g :

الدالة الأسية والدالة التآلفية تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن جءاهما كذلك وبالتالي الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g'(x) = -2e^x + (4 - 2x)e^x = (2 - 2x)e^x = 2(1 - x)e^x$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $(1 - x)$ إذا $g'(1) = 0$ ؛
من أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $1 - x < 0$ ومنه $g'(x) < 0$ إذا الدالة g متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$ ؛
من أجل $x \in]-\infty; 1]$ ، $1 - x > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ إذا الدالة g متزايدة تماما على المجال $] -\infty; 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 + 4e^x - 2xe^x = -4 \text{ إذا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4 + (4 - 2x)e^x = -\infty \text{ إذا } \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 2x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ لدينا}$$

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	+	0	-
$g(x)$	-4		$2e - 4$		$-\infty$

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث:

$$1,59 < \alpha < 1,60$$

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة على كل من المجالين $] -\infty; 1]$

و $]1; +\infty[$ وهي رتيبة تماما على كل من هذين المجالين؛

لدينا: $g([1; +\infty[) =]-\infty; 2e - 4]$ و $g(]-\infty; 1]) =]-\infty; 2e - 4]$ إذا $2e - 4 \approx 1,44$ ولدينا $0 \in]-\infty; 2e - 4]$

و $0 \in]-\infty; 2e - 4]$ ومنه بواسطة الدالة g العدد 0 يقبل سابقة وحيدة α في المجال $]1; +\infty[$ ويقبل سابقة وحيدة β في

المجال $] -\infty; 1]$ بما أن $g(0) = -4 + (4 - 2 \times 0)e^0 = 4 - 4 = 0$ فإن $\beta = 0$ ومنه $g(\alpha) = g(0) = 0$ لدينا

$$g(1,59) \approx 0,02 \text{ و } g(1,60) \approx -0,04 \text{ إذا } g(1,59) \times g(1,60) < 0 \text{ ومنه } 1,59 < \alpha < 1,60$$

3. استنتاج إشارة $g(x)$:

من أجل $x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ ؛

من أجل $x \in]0; \alpha[$ ، $g(x) > 0$ و $g(\alpha) = g(0) = 0$.

الجزء II :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x - 2}{e^x - 2x}$ ($\mathcal{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتمجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أن المنحنى ($\mathcal{C}_f$) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتيهما على الترتيب: $y = -1$ و $y = 0$ ؛

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2} = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = -1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$.

2. أ- البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(e^x - 2x) - (2x - 2)(e^x - 2)}{(e^x - 2x)^2} \\ &= \frac{2e^x - 4x - 2xe^x + 4x + 2e^x - 4}{(e^x - 2x)^2} = \frac{-4 + 4e^x - 2xe^x}{(e^x - 2x)^2} \\ &= \frac{-4 + (4 - 2x)e^x}{(e^x - 2x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2} \end{aligned}$$

ب- استنتاج إشارة $f'(x)$:

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ وعليه: $f'(\alpha) = f'(0) = 0$

من أجل $x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[$ ، $f'(x) < 0$ و $g(x) < 0$ ، ومنه $f'(x) < 0$

ومن أجل $x \in]0; \alpha[$ ، $f'(x) > 0$ و $g(x) > 0$ ، ومنه $f'(x) > 0$.

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	-1	-2	$f(\alpha)$	0	

جـ- حساب $f(1) = \frac{2-2}{e-2} = 0$:

• استنتاج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$:

$f(1) = 0$ ؛ من أجل $x \in]-\infty; 1[$ ، $f(x) < 0$ ،

ومن أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $f(x) > 0$.

3. أ- تبين أن: $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$ ، حيث α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء الأول:

$g(\alpha) = 0$ معناه $-4 + (4-2\alpha)e^\alpha = 0$ ومعناه $e^\alpha = \frac{4}{4-2\alpha} - 2\alpha$ يكافئ $e^\alpha - 2\alpha = \frac{4}{4-2\alpha}$ أي

$$e^\alpha - 2\alpha = \frac{4-8\alpha+4\alpha^2}{4-2\alpha}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha} = \frac{(2\alpha-2)(4-2\alpha)}{4-8\alpha+4\alpha^2} = \frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{1-2\alpha+\alpha^2} \\ &= \frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{2-\alpha}{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1-\alpha}{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1} - 1 \end{aligned}$$

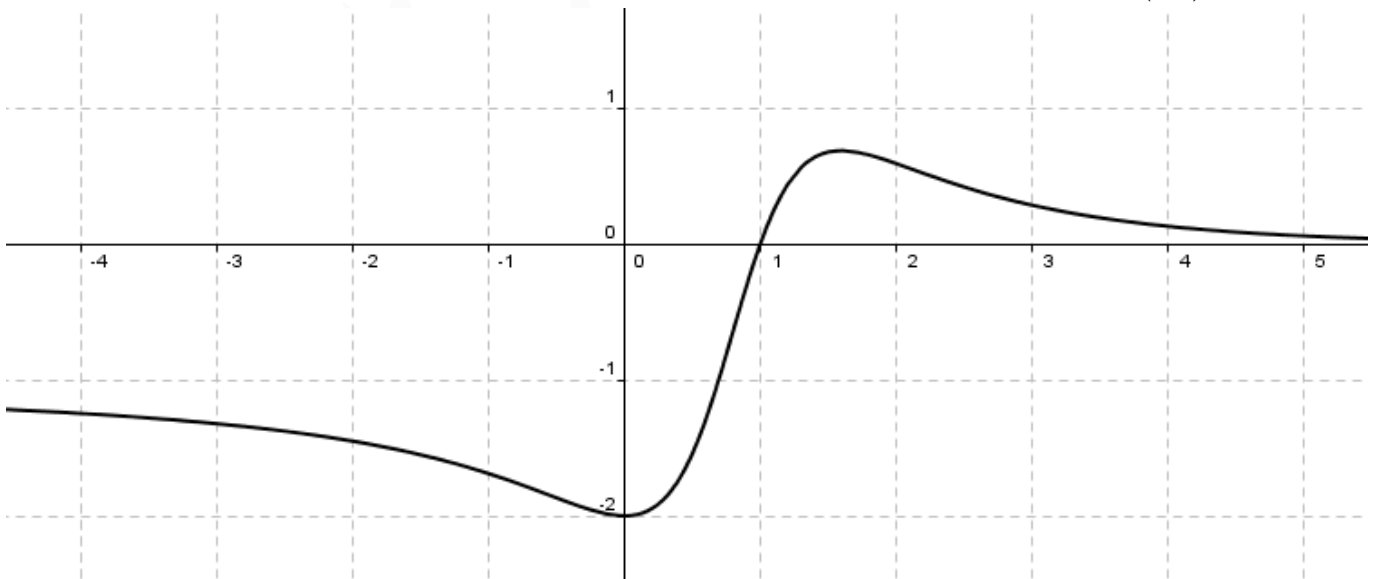
ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$: (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

$1,59 < \alpha < 1,60$ معناه $1,59-1 < \alpha-1 < 1,60-1$

ومعناه $0,59 < \alpha-1 < 0,60$ يكافئ $\frac{1}{0,60} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,59}$

ويكافئ $\frac{1}{0,60} - 1 < \frac{1}{\alpha-1} - 1 < \frac{1}{0,59} - 1$ أي $0,67 < f(\alpha) < 0,69$.

ج- رسم المنحني (C_f) :



4. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$$

$$f(x) = m + 1 \text{ أي } \frac{2x - 2}{e^x - 2x} = m + 1 \text{ معناه } 2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$$

إذا كان $\left[\frac{1}{\alpha - 1} - 2; +\infty \right] \cup]-\infty; -3]$ فإن $m \in]-\infty; -3]$ أو $m + 1 > \frac{1}{\alpha - 1} - 1$ ومنه المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $m = -3$ فإن $m + 1 = -2$ ومنه المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا.

إذا كان $m = \frac{1}{\alpha - 1} - 2$ فإن $m + 1 = \frac{1}{\alpha - 1} - 1$ ومنه المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا وهو α .

إذا كان $m \in]-3; -2]$ فإن $-2 < m + 1 < -1$ ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة (أحدهما سالب والآخر موجب).

إذا كان $m \in [-2; -1]$ فإن $-1 \leq m + 1 \leq 0$ ومنه المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا.

إذا كان $m \in \left[-1; \frac{1}{\alpha - 1} - 2 \right]$ فإن $0 < m + 1 < \frac{1}{\alpha - 1} - 1$ ومنه المعادلة تقبل حلين موجبين.

5. h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$.

أ- حساب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$:

نضع $u(x) = x^2$ الدالة المربع u تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $u'(x) = 2x$ ؛

لدينا $h(x) = [f(x)]^2 = u[f(x)] = [u \circ f](x)$ ومنه:

$$\begin{aligned} h'(x) &= [u \circ f]'(x) = f'(x) \times u'[f(x)] = f'(x) \times 2f(x) \\ &= 2f'(x) \times f(x) \end{aligned}$$

• استنتاج إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	-	-	0	+	+
$h'(x)$	+	0	-	0	-

ب- جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$	1	4	0	$[f(\alpha)]^2$	0

I- الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

II- الدالة f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. أ- بين أن الدالة f مستمرة على المجال $[0; +\infty[$.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

III- n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ، الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$ و $(\mathcal{C}_n)$ منحناها

البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $]0; +\infty[$.

2. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.

3. ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$.

4. بين أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر بنقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.

5. أ- بين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من المجال $]0, 3; 0, 4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $[\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6. أ- بالاعتماد على الجزء II-، بين أنه، من أجل كل x من المجال $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$:

$$\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}, \text{ ثم } \alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$$

ج- جد نهاية المتتالية (α_n) .

ملح مقترح للتدريس (5) باك 2013

I- الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.
1. دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) = 0$$

$$g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

$$g'(x) < 0 \text{ , }]-\infty; 0[$$

ومن أجل كل عدد حقيقي x من

$$g'(x) > 0 \text{ , }]0; +\infty[$$

وعليه فجدول تغيرات الدالة g يكون

على النحو التالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	-1	$+\infty$

2. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$

من خلال جدول تغيرات الدالة g لدينا القيمة الحدية الصغرى للدالة g هي -1 وتبلغها عند القيمة 0

أي من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq -1$ وهذا يعني أن $(x-1)e^x \geq -1$ يكافئ $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

$$\text{II- الدالة } f \text{ معرفة على المجال }]0; +\infty[\text{ كما يلي: } \begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x}; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. تبين أن الدالة f مستمرة على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا الدالتان $x \mapsto x$ و $x \mapsto e^x - 1$ مستمרותان على $\mathbb{R}$ فهما مستمרותان على المجال $]0; +\infty[$ وبما أن $x \neq 0$ فإن الدالة

f مستمرة على المجال $]0; +\infty[$.

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^0}{x - 0} \text{ هو العدد المشتق للدالة الأسية النيبيرية من أجل القيمة } 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{ وعليه فالدالة } f$$

مستمرة عند 1 من اليمين وبالتالي هي مستمرة على المجال $]0; +\infty[$.

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$$

$$\text{ليكن } x \text{ عددا حقيقيا من المجال }]0; +\infty[: f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا من الجزء I-2 ، من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$]0; +\infty[$: $1 + (x-1)e^x > 0$ وهذا يعني أن $\frac{e^x(x-1)+1}{x^2} > 0$ أي $f'(x) > 0$ وعليه فالدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	1	$+\infty$

- جدول تغيرات الدالة f .

III- n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ،

f_n الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب :

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$$

و $(\mathcal{C}_n)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. دراسة اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $]0; +\infty[$:

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]0; +\infty[$: $f_n'(x) = f'(x) + \frac{n}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) > 0$ و $\frac{n}{x} > 0$ إذن $f_n'(x) > 0$ أي $f_n'(x) > 0$ وعليه

فالدالة f_n متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

2. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} n \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} + n \ln x = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} n \ln x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

3. دراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$:

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، وليكن x عددا حقيقيا من المجال $]0; +\infty[$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} + (n+1) \ln x \right) - \left(\frac{e^x - 1}{x} + n \ln x \right)$$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln x \text{ وهذا يعني أن } f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x + \ln x - \frac{e^x - 1}{x} - n \ln x$$

من أجل $x = 1$ ، لدينا $\ln x = 0$ ومنه $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$ وبالتالي المنحنيان $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$ يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(1; e-1)$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; 1[$ لدينا $\ln x < 0$ ومنه $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ وبالتالي المنحنى $(\mathcal{C}_{n+1})$ يقع أسفل المنحنى $(\mathcal{C}_n)$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ لدينا $\ln x > 0$ ومنه $f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$ وبالتالي المنحنى $(\mathcal{C}_{n+1})$ يقع فوق المنحنى $(\mathcal{C}_n)$.

4. تبين أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر بنقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها:
نضع $B(x_0; y_0)$.

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n, f_n(x_0) = y_0, \text{ معناه } \frac{e^{x_0} - 1}{x_0} + n \ln x_0 = y_0 \text{ ومعناه } \ln x_0 = 0 \text{ و}$$

$$\frac{e^{x_0} - 1}{x_0} = y_0 \text{ يكافئ } x_0 = 1$$

و $y_0 = e - 1$ وعليه فجميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر بنقطة ثابتة $B(1; e - 1)$.

5. أ- تبين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من المجال $]0, 3; 0, 4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$:

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال }]0; +\infty[: f_1(x) = \frac{e^x - 1}{x} + \ln x$$

الدالتان f و $x \mapsto \ln x$ مستمرتان على المجال $]0; +\infty[$ إذا الدالة f_1 هي مستمرة على $]0; +\infty[$ وبالتالي هي مستمرة على المجال $]0, 3; 0, 4[$ ولدينا $f_1(0, 3) \approx -0,038$ و $f_1(0, 4) \approx 0,313$ إذا $f_1(0, 3) \times f_1(0, 4) < 0$ وعليه فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α_1 من المجال $]0, 3; 0, 4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$ وبما أن الدالة f_1 متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ فإن α_1 وحيد في المجال $]0; +\infty[$.

ب- تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$:

$$f_1(\alpha_1) = 0 \text{ معناه } \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} + \ln \alpha_1 = 0 \text{ ومعناه } \ln \alpha_1 = -\frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1}$$

$$f_n(\alpha_1) = \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} - n \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} = \frac{e^{\alpha_1} - 1}{\alpha_1} (1 - n) = (1 - n) f_1(\alpha_1)$$

من خلال جدول تغيرات الدالة f لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f(x) > 1$ ومنه $f(\alpha_1) > 0$ ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$ ، $1 - n < 0$ إذن $f_n(\alpha_1) < 0$.

- البرهان أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $[\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$ وهذا من أجل $n > 1$:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماما على $[\alpha_1; 1[$ ولدينا $f_n(\alpha_1) < 0$ و

$f_n(1) = e - 1$ أي $f_n(1) > 0$ ومنه $f_n(1) \times f_n(\alpha_1) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $[\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

$$6. \text{ أ- بالاعتماد على الجزء II-، تبين أنه، من أجل كل } x \text{ من المجال }]0; 1[: \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$$

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; 1[$: $1 < f(x) \leq f(1)$

$$\text{أي } 1 < \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1 \text{ وهذا يعني أن } 1 < \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{e^1 - 1}{1}$$

ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1 - e}{n}$

$$\ln \alpha_n = -\frac{e^{\alpha_n} - 1}{n\alpha_n} \text{ ومعناه } \frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} + n \ln \alpha_n = 0 \text{ معناه } f_n(\alpha_n) = 0$$

$$1 - e \leq \frac{1 - e^x}{x} \text{ معناه } \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1 :]0; 1] \text{ لدينا من أجل كل } x \text{ من المجال}$$

$$\text{ولدينا }]\alpha_1; 1[\text{ إذن } \alpha_n \in]0; 1] \text{ ومنه } 1 - e \leq \frac{1 - e^{\alpha_n}}{\alpha_n} \text{ وهذا يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq 1 :$$

$$\frac{1 - e}{n} \leq \ln(\alpha_n) \text{ أي } \frac{1 - e}{n} \leq \frac{1 - e^{\alpha_n}}{n\alpha_n}$$

$$- \text{ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq 1 : \alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$$

$$\text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq 1 : \ln(\alpha_n) \geq \frac{1 - e}{n} \text{ معناه}$$

$$\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}} \text{ ومعناه } e^{\ln(\alpha_n)} \geq e^{\frac{1-e}{n}} \text{ جـ إيجاد نهاية المتتالية } (\alpha_n).$$

$$\text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq 1 : \alpha_n \in]\alpha_1; 1[\text{ و } e^{\frac{1-e}{n}} \leq \alpha_n < 1 \text{ إذا } e^{\frac{1-e}{n}} \leq \alpha_n$$

$$\text{ولدينا } 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e}{n} \text{ إذا } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-e}{n}} = 1 \text{ وبما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1.$$

التمرين (6) باك 2014 (م 2) 6 نه

- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)e^x$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. عين نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.
 2. ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
 3. أ- بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $1,27 < \alpha < 1,28$.
ب- اكتب معادلة (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) .
ج- ارسم (T) و (C_f) .
 4. عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.
 5. h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (|x|+1)e^{-|x|}$
و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.
أ- بين أن الدالة h زوجية.
ب- ارسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .
 6. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^x$ حيث: a و b عدنان حقيقيان.
- عين a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = f(x)$.

حل مقترح للتمرين (6) باك 2015

- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)e^x$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. تعيين نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ إذا $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ إذا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x = +\infty$
 2. دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:
ليكن $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ ؛ $f'(x) = 0$ معناه $x = 0$.
من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ ، $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$.
من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0		-1	$+\infty$

3. أ- تبين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$:

لدينا من أجل كل $x \in]-\infty; 0]$ ، $f(x) < 0$ ومنه المعادلة $f(x) = 1$ لا تقبل حلول في $] -\infty; 0]$.

الدالة f مستمرة على المجال $[0; +\infty[$ إذا صورة المجال $[0; +\infty[$ هي مجال من $\mathbb{R}$ ولدينا $f([0; +\infty[) = [-1; +\infty[$ بما أن

$1 \in [-1; +\infty[$ فإن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل على الأقل حلا α في المجال $[0; +\infty[$ وبما أن الدالة f رتيبة تماما (متزايدة

تماما) على المجال $[0; +\infty[$ فإن الحل α وحيد في $[0; +\infty[$ وعليه فالمعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

- تحقق أن $1,27 < \alpha < 1,28$:

$f(1,27) \approx 0,96$ ، $f(1,28) \approx 1,01$ إذا $f(1,28) > 1 > f(1,27)$ ومنه $1,27 < \alpha < 1,28$.

ب- كتابة معادلة (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$y = e(x-1) \text{ معناه } y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

- تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) :

$$f(x) - e(x-1) = (x-1)e^x - e(x-1) = (x-1)(e^x - e)$$

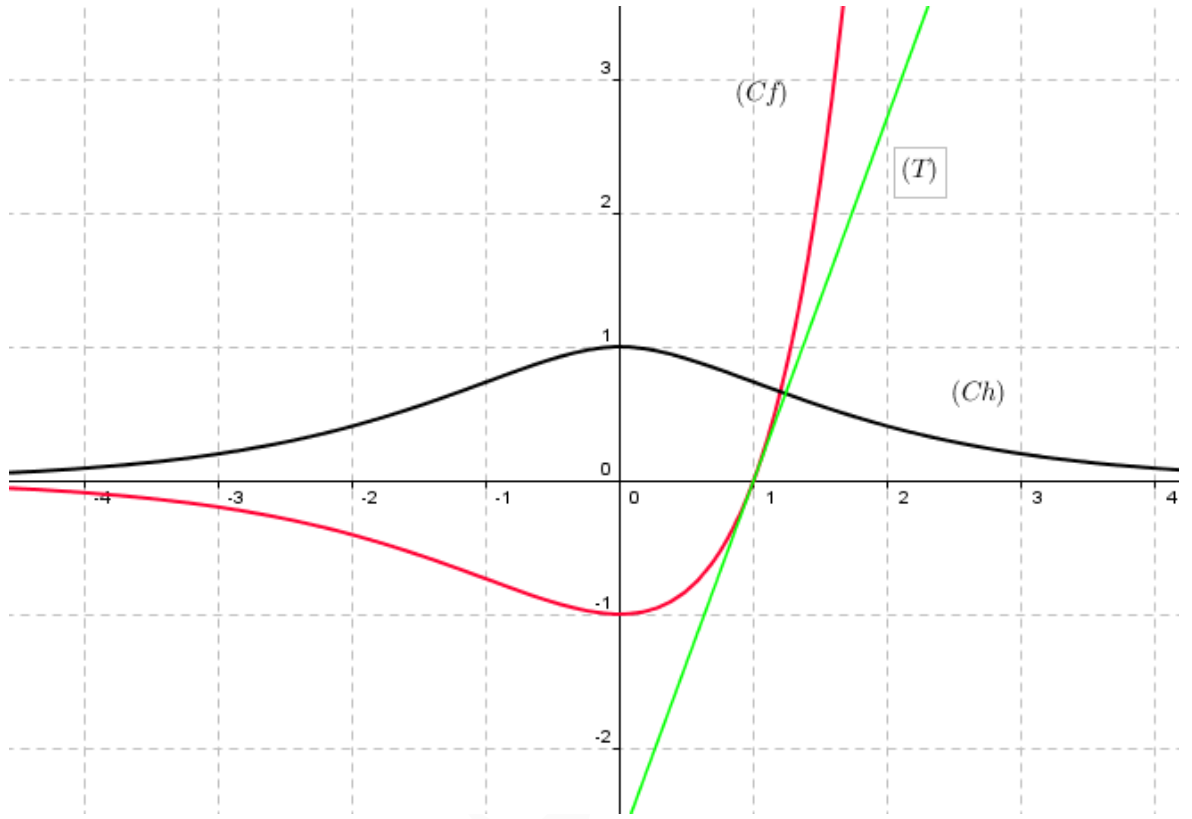
$$f(x) - e(x-1) = 0 \text{ معناه } (x-1)(e^x - e) = 0 \text{ ومعناه } (x-1=0) \text{ أو } (e^x - e = 0)$$

$$\text{يكافئ } (x=1) \text{ أو } (e^x = e) \text{ أي } (x=1)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)$		0	+
$(e^x - e)$		0	+
$f(x) - e(x-1)$		0	+

إذا المنحنى (C_f) يقع فوق (T) .

جـ رسم (T) و (C_f) :



4. تعيين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلا وحيدا في $\mathbb{R}$:

$$(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$$

معناه $f(x) = f(m) - 1$ ومعناه $f(m) - 1 = -1$ أو $f(m) - 1 \geq 0$

يكافئ $f(m) = 0$ أو $f(m) \geq 1$

أي $m = 1$ أو $m \geq \alpha$.

5. h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (|x| + 1)e^{-|x|}$

و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- تبين أن الدالة h زوجية:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $(-x) \in \mathbb{R}$ ؛

$$h(-x) = (|-x| + 1)e^{-|-x|} = (|x| + 1)e^{-|x|} = h(x)$$

لأن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $|-x| = |x|$ ؛ إذن الدالة h زوجية.

ب- رسم (C_h) مستعينا بالمتحنى (C_f) :

من أجل كل $x \in \mathbb{R}_-$ لدينا: $h(x) = (|x| + 1)e^{-|x|} = (-x + 1)e^{-(-x)}$

$$h(x) = -(x-1)e^x = -f(x) \text{ أي}$$

إذا في المجال $]-\infty; 0]$ يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل؛ وفي المجال $[0; +\infty[$ يرسم (C_h) بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب.

6. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax + b)e^x$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

- تعيين a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = f(x)$ ؛

ليكن x عددا حقيقيا: $g'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $g'(x) = f(x)$ ، معناه $(ax + a + b)e^x = (x - 1)e^x$ يكافئ $(ax + a + b) = (x - 1)$ ويكافئ $a = 1$ و $a + b = -1$ أي $a = 1$ و $b = -2$.

التمرين (7) (بال 2015) (م 2) (ن 7)

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = (x+2)e^x - 2$.

1. احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$.

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ ؛ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3. أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,56 < \beta < -1,55$.

ب- ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

4. أ- بين أن الدالة $x \mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب- احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ ، $x = \alpha$ (حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال 3. أ-).

ج- جد حصر العدد A .

حل مقترح للتمرين (7) (بال 2015)

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = (x+2)e^x - 2$.

1. حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 2e^x - 2 = -2 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^x - 2 = +\infty$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x > 0$

ومنه: $g'(x) < 0$ معناه $x \in]-\infty; -3[$ ؛ $g'(x) > 0$ معناه $x \in]-3; +\infty[$ و $g'(-3) = 0$

الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty; -3]$ ومتزايدة تماما على $[-3; +\infty[$.

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	-2	$-e^{-3} - 2$	$f(0)$	$+\infty$

- جدول تغيرات الدالة g :

3. حساب $g(0)$ ، واستنتاج إشارة $g(x)$: $g(0) = (0+2)e^0 - 2 = 0$.

حسب جدول تغيرات الدالة g لدينا :

$g(x) < 0$ معناه $]-\infty; 0[$ ، $x \in]-\infty; 0[$ معناه $g(x) > 0$ و $x \in]0; +\infty[$ و $g(0) = 0$

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. نبيان أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 3 - (x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(\frac{2x+3}{x+1} - e^x \right) = -\infty$$

- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 3 - (x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 3 - xe^x + e^x = -\infty$$

2. أ- نبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f'(x) = 2 - e^x - (x+1)e^x = 2 - (x+2)e^x = -g(x)$

ب- استنتاج إشارة $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ معناه $]-\infty; 0[$ ، $x \in]-\infty; 0[$ معناه $f'(x) < 0$ و $x \in]0; +\infty[$ و $f'(0) = 0$

x	$-\infty$	β	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$				2	$-\infty$

- جدول تغيرات الدالة f :

ج- نبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x+3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x + e^x = 0 \text{ ومنه المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = 2x + 3 \text{ مستقيم مقارب}$$

مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$:

• دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) - (2x+3) = -(x+1)e^x$

على $]-\infty; -1[$ ، $f(x) - (2x+3) > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

على $]-1; +\infty[$ ، $f(x) - (2x+3) < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) يقطع (C_f) في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 1)$.

3. أ- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,56 < \beta < -1,55$.

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ومنه هي مستمرة على كل من المجالين $] -\infty; 0[$ و $] 0; +\infty[$

و $] 0; +\infty[$ لدينا $f(] -\infty; 0[) =] -\infty; 2[$ و $f(] 0; +\infty[) =] -\infty; 2[$ بما أن $0 \in] -\infty; 2[$ فإنه يوجد عدد حقيقي

α ينتمي إلى $] 0; +\infty[$ حيث $f(\alpha) = 0$ ويوجد عدد حقيقي β ينتمي إلى $] -\infty; 0[$ حيث $f(\beta) = 0$

وبما أن الدالة f متناقصة تماما على $] 0; +\infty[$ فإن الحل α يكون وحيد وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $] -\infty; 0[$ فإن الحل β يكون وحيد.

لدينا: $f(0,92) \approx 0,02$ ؛ $f(0,93) \approx -0,03$ ومنه $f(0,92) < 0 < f(0,93)$

إذا $0,92 < \alpha < 0,93$

ولدينا: $f(-1,56) \approx -0,002$ ؛ $f(-1,55) \approx 0,01$ ومنه $f(-1,56) < 0 < f(-1,55)$

إذا $-1,56 < \beta < -1,55$

ب- رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $] -\infty; \frac{3}{2}]$:

الرسم في الشكل أدناه.

4. أ- تبين أن الدالة $x \mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^x + xe^x$$

ليكن x عددا حقيقيا: نضع $h(x) = xe^x$ ومنه $h(x) = (x+1)e^x$

إذا الدالة: $x \mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب- حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \alpha$ ، $x = 0$

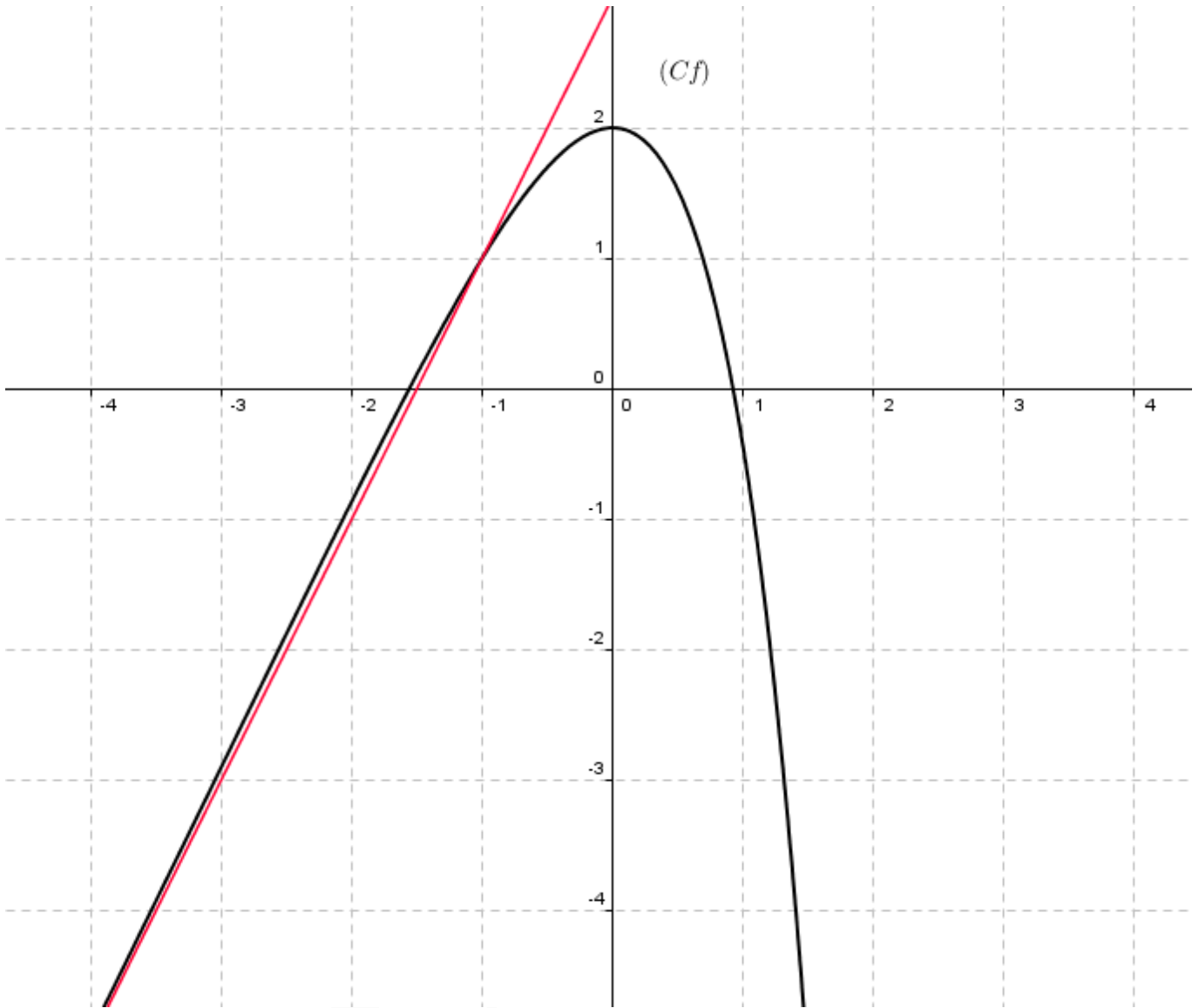
(حيث α هي القيمة المعروفة في السؤال 3 أ) :

$$A = \int_0^\alpha [2x + 3 - f(x)] dx = \int_0^\alpha [(x+1)e^x] dx = [xe^x]_0^\alpha$$

$$A = \alpha e^\alpha - 0e^0 = \alpha e^\alpha$$

ج- إيجاد حصر العدد A .

لدينا $0,92 < \alpha < 0,93$ ومنه $e^{0,92} < e^\alpha < e^{0,93}$ إذا $0,92e^{0,92} < \alpha e^\alpha < 0,93e^{0,93}$ أي $2,30 < A < 2,36$.



(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x+3)e^x - 1$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ كما هو مبين في الشكل.
بقراءة بيانية

أ) حدد إشارة $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$.

ب) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $[-1; -\frac{1}{2}]$ بحيث $g(\alpha) = 0$ ؛ ثم تحقق من أن $-0,8 < \alpha < -0,7$.
ج) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادله له.
ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

ج) اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ) .

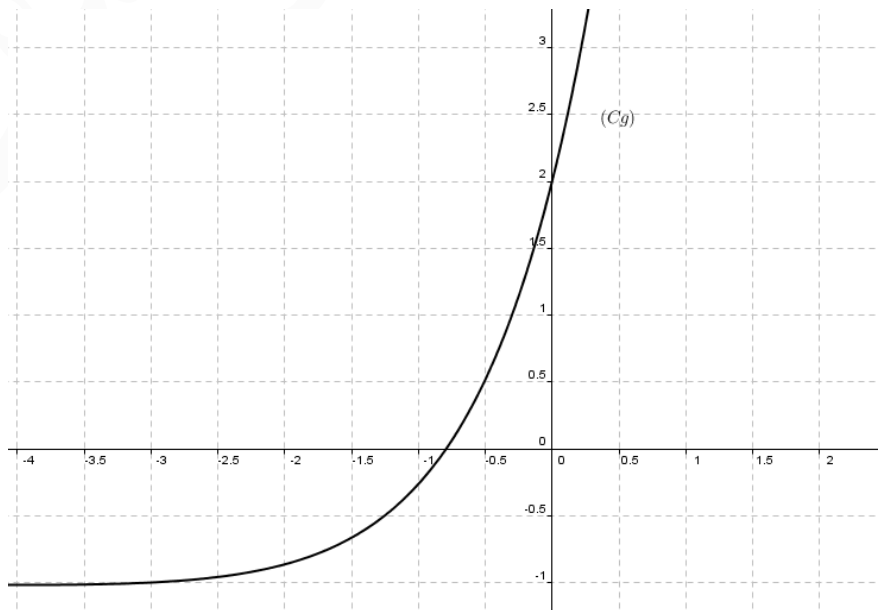
4. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 1]$. (يعطى $f(\alpha) \approx -0,7$).

5. احسب $f(x) - g(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = |x|^{x-2} - 1 + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
أ) بين أن الدالة h زوجية.

ب) تأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ فإن: $h(x) = f(x-2) + 1$.

ج) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_h) على المجال $[-3; 3]$.



حل مقترح للتمرين 12 باك 2019

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x+3)e^x - 1$ ؛
و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس
 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ؛ كما هو مبين في الشكل.
بقراءة بيانية:

أ) تحديد إشارة $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$: $g(-1) < 0$ و $g(-\frac{1}{2}) > 0$

ب) استنتاج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$ حيث
 $g(\alpha) = 0$

لدينا $(\mathcal{C}_g)$ مرسوم بدون تقطع ومنه الدالة g مستمرة على المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$

ولدينا $g(-1) \times g(-\frac{1}{2}) < 0$ إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$ يحقق
 $g(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α هو الحل الوحيد في $\mathbb{R}$ للمعادلة $g(x) = 0$.
• التحقق من أن $-0,8 < \alpha < -0,7$:

$g(-0,8) = (-0,8+3)e^{-0,8} - 1$ و $g(-0,7) = (-0,7+3)e^{-0,7} - 1$ أي $g(-0,8) \approx -0,0115$ و $g(-0,7) \approx 0,142$
و $-0,8 < \alpha < -0,7$ ومنه $g(-0,8) < g(\alpha) < g(-0,7)$ إذا
جم استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $g(\alpha) = 0$ ؛ ومن أجل كل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) < 0$ ، ومن أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.
(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$ ؛ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)(e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 2e^x - x - 2$
و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ إذا $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 2 = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)(e^x - 1)$
و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f'(x) = (e^x - 1) + (x+2)e^x = (x+3)e^x - 1 = g(x)$

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2)(e^x - 1) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 2e^x - x - 2 + x = -2$$

• استنتاج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يتطلب تعيين معادلة له:

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = -2$ إذا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x - 2)) = 0$ ومنه المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = -x - 2$ وهذا في $-\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) :

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x) - (-x - 2) = (x + 2)(e^x - 1) + (x + 2) = (x + 2)(e^x - 1 + 1)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - (-x - 2)$	-	+	
الوضعية	$(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ)	

$$f(x) - (-x - 2) = (x + 2)e^x$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

ومنه إشارة $f(x) - (-x - 2)$ هي

من إشارة العبارة $(x + 2)$.

$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ)
في $A(-2; 0)$

ج) كتابة معادلة (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ الموازي للمستقيم (Δ) :

(T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة x_0 إذا له معادلة من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ولدينا (T)

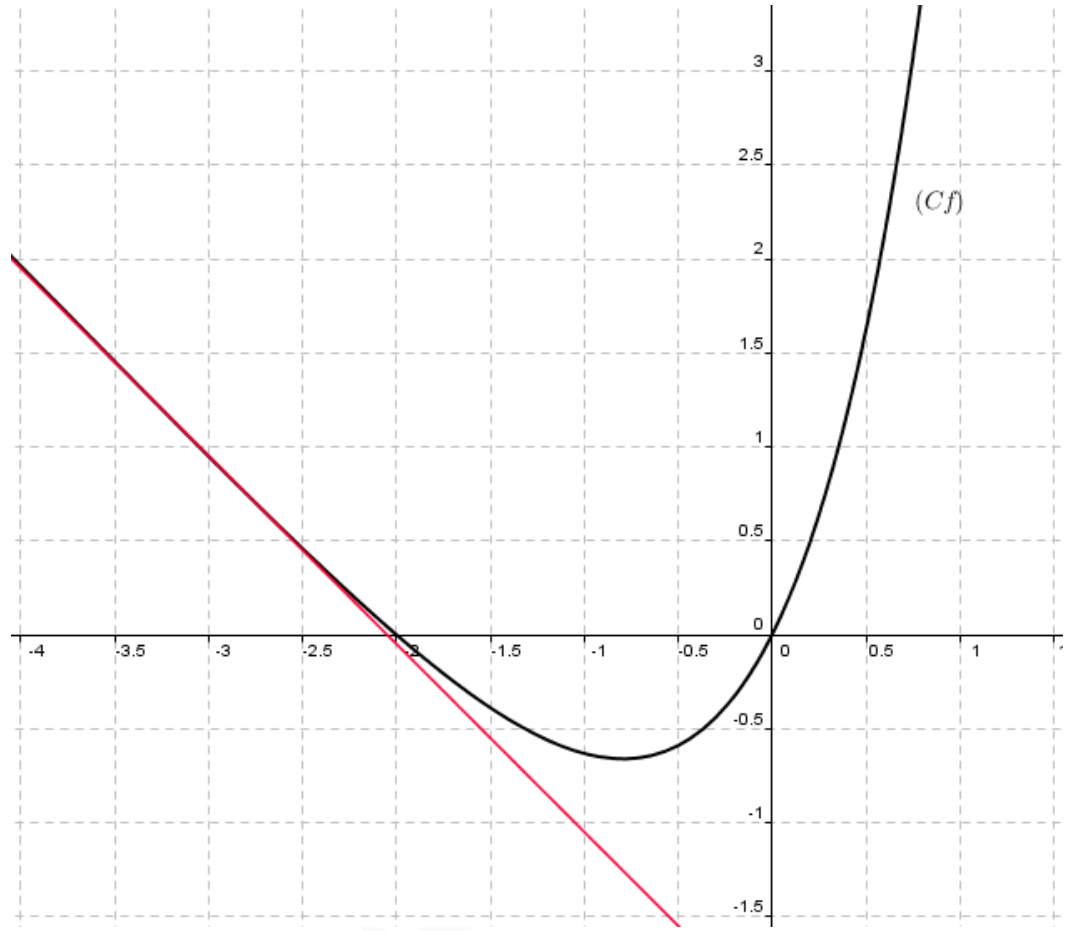
يوافق (Δ) إذا $f'(x_0) = -1$ أي $(x_0 + 3)e^{x_0} - 1 = -1$ وهذا يعني أن $(x_0 + 3)e^{x_0} = 0$ ومعناه $(x_0 + 3 = 0)$ أي

$x_0 = -3$ ومنه معادلة (T) من

الشكل $y = -(x + 3) - (e^{-3} - 1)$

$$y = -x - 2 - e^{-3}$$

4. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty; 1]$. (يعطى $f(\alpha) \approx -0,7$)



5. حساب $f(x) - g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x) - g(x) = (x+2)(e^x - 1) - (x+3)e^x + 1$ أي

$$f(x) - g(x) = (x+2-x-3)e^x - x - 2 + 1 = -e^x - x - 1$$

• استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x) - g(x) = -e^x - x - 1$ معناه $f(x) = g(x) - e^x - x - 1$ ومعناه

$f(x) = f'(x) - e^x - x - 1$ ؛ نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x) = f(x) - e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$ لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$ إذا F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1$ ، و $(\mathcal{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ) تبين أن الدالة h زوجية:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$ لأن 0 يتوسط المجموعة $\mathbb{R}$.

$$h(-x) = |-x|(e^{|-x|-2} - 1) + 1 = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1 = h(x) \text{، ولأنه من أجل كل } x \in \mathbb{R} \text{، } |-x| = |x| \text{، وعليه}$$

فالدالة h زوجية.

ب) التأكيد أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ فإن: $h(x) = f(x-2) + 1$:

لدينا من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ ، $|x| = x$ ومنه $h(x) = |x|(e^{|x|-2} - 1) + 1 = x(e^{x-2} - 1) + 1$

$$f(x-2) + 1 = (x-2+2)(e^{x-2} - 1) + 1 = x(e^{x-2} - 1) + 1$$

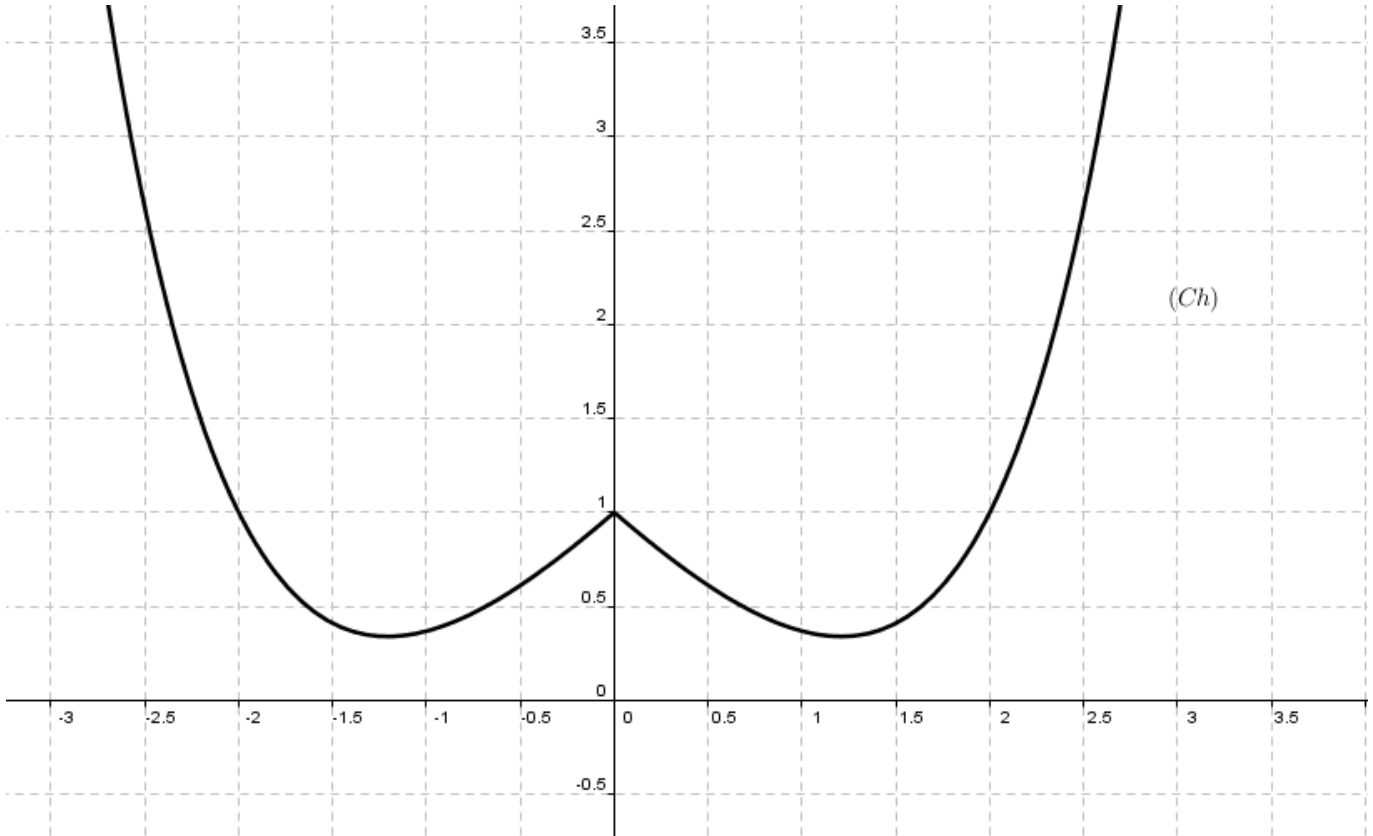
إذا من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ ، $h(x) = f(x - 2) + 1$.

(ج) شرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم رسم (C_h) على المجال $[-3; 3]$:

لدينا من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ ، $h(x) = f(x - 2) + 1$.

ولدينا من أجل $x \in [0; +\infty[$ ، $x - 2 \in [-2; +\infty[$ ، إذا في المجال $[0; +\infty[$ ، يكون (C_h) صورة بالانسحاب، الذي شعاعه

$\vec{u}(2; 1)$ ، للجزء من (C_f) المرسوم على المجال $[-2; +\infty[$ ؛ وفي المجال $]-\infty; 0]$ ، يرسم (C_h) بالتناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب.



بوشناق يوسف

بوشناق يوسف