



I -  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متاليتين عدديتين حقيقيتين معرفتين على  $\mathbb{N}$  كيلي :

$$\begin{cases} U_0 = e + e^{-1} \\ U_{n+1} = \frac{eU_n + e^{-1}V_n}{e + e^{-1}} \end{cases} ; \begin{cases} V_0 = e - e^{-1} \\ V_{n+1} = \frac{eV_n + e^{-1}U_n}{e + e^{-1}} \end{cases}$$

- ① أثبت أن المتتالية  $(w_n)$  هندسية أساسها  $\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$  حيث  $w_n = U_n - V_n$  ، وعين حدها الأول .
- ② أكتب عبارة الحد العام للمتتالية  $(w_n)$  ، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$  .
- ③ أثبت أن المتتالية  $(U_n)$  متناقصة تماما والمتتالية  $(V_n)$  متزايدة تماما .
- ④ استنتج أن المتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$  تتقاربان نحو نفس النهاية  $l$  .
- ⑤ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $e - e^{-1} \leq V_n \leq U_n \leq e + e^{-1}$  .

II - نعتبر المتتالية العددية  $(t_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $t_n = U_n + V_n$  .

- ① أثبت أن المتتالية  $(t_n)$  ثابتة ، ثم استنتج قيمة العدد الحقيقي  $l$  .
- ② بين أن :  $U_n = \frac{1}{2}(t_n + w_n)$  وأن :  $V_n = \frac{1}{2}(t_n - w_n)$  .
- ③ استنتج عبارة الحد العام لكل من المتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$  .

III - نعتبر المجموع  $S_n$  و الجداء  $P_n$  حيث :

$$\begin{cases} S_n = (U_0^2 - V_0^2) + (U_1^2 - V_1^2) + (U_2^2 - V_2^2) + \dots + (U_{n-1}^2 - V_{n-1}^2) \\ P_n = (U_0^2 - V_0^2) \times (U_1^2 - V_1^2) \times (U_2^2 - V_2^2) \times \dots \times (U_n^2 - V_n^2) \end{cases}$$

- ① أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  .
- ② أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  .
- ③ أثبت أن :

$$P_n = 4^{n+1} \sqrt{\left(\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}\right)^{n^2 + n}}$$