



الخليل للمathematics

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

تمارين شامل مع الحل في المتتاليات العددية

10

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 04 / 14

التمرين

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول u_0 ، ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{\alpha u_n}{u_n + 1}$$

مع $\alpha \in \mathbb{R}^*$

(I) نفرض أن: $u_0 = 1$ و $\alpha = 1$.

① أحسب u_1, u_2 و u_3 .

② برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

③ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

④ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \frac{1}{u_n}$$

① بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول v_0 .

② اكتب بدلالة n عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

⑤ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = v_{n+2021} + v_{n+2022} + \dots + v_{2n}$$

(II) نضع $u_0 = 6$ و $\alpha = 4$:

① برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$.

② (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$w_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$$

① بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، يطلب تعيين حددها الأول.

② اكتب عبارة (w_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

③ اكتب بدلالة n ما يلي:

$$\begin{aligned} A_n &= w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n \\ B_n &= w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2 \\ C_n &= \sqrt{w_0} + \sqrt{w_1} + \sqrt{w_2} + \dots + \sqrt{w_n} \\ D_n &= \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \dots + \frac{1}{w_n} \\ E_n &= w_0 + 2w_1 + 4w_2 + \dots + 2^n w_n \end{aligned}$$

$$F_n = w_1 + w_3 + w_5 + \dots + w_{2n-1}$$

$$G_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

$$H_n = w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n$$

$$I_n = \ln(w_0) + \ln(w_1) + \ln(w_2) + \dots + \ln(w_n)$$

(III) نفرض أن: $u_0 = \alpha$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$t_n = \frac{u_n - (\alpha - 1)}{u_n}$$

1 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$t_{n+1} = \frac{1}{\alpha} t_n$$

2 اكتب عبارة u_n بدلالة n و α

(1)

① حساب u_1, u_2 و u_3 :

$$u_{0+1} = \frac{\alpha u_0}{u_0 + 1} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{1 + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{2}}$$

$$u_{1+1} = \frac{\alpha u_1}{u_1 + 1} \Rightarrow u_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{1}{3}}$$

$$u_{2+1} = \frac{\alpha u_2}{u_2 + 1} \Rightarrow u_3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{1}{4}}$$

② البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > 0$:

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 > 0 \dots (*)$$

• نفرض أن $[u_n > 0]$ ونثبت أن $[u_{n+1} > 0]$:

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n + 1} \\ &= \frac{u_n + 1 - 1}{u_n + 1} \\ &= 1 - \frac{1}{u_n + 1} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\Rightarrow u_n + 1 > 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n + 1} < 1 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{u_n + 1} > -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{u_n + 1} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0 \dots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من (*) و (**) نجد أن: $(u_n > 0)$

③ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{u_n + 1} - u_n \\ &= \frac{u_n - (u_n)^2 - u_n}{u_n + 1} \\ &= \frac{-(u_n)^2}{u_n + 1} \end{aligned}$$

بما أن $u_n > 0$ فإن $u_n + 1 > 0$ ومنه الإشارة من $-(u_n)^2$

وعليه $u_{n+1} - u_n < 0$

إذن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

- استنتاج أن (u_n) متقاربة:

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل بـ 0 فهي متقاربة

④

① تبين أن المتتالية (v_n) حسابية :

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{u_n + 1}{u_n} \\ &= 1 + \frac{1}{u_n} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1 وحدها الأول 1.

② كتابة بدلالة n عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) :

$$v_n = v_0 + rn \Rightarrow \boxed{v_n = 1 + n}$$

- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

$$v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{1+n}}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = \boxed{0}$$

⑤ كتابة بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_{n+2021} + v_{n+2022} + \dots + v_{2n} \\ &= \frac{2n - n - 2021 + 1}{2} \left(\underbrace{\frac{1+2n}{v_{2n}}} + \underbrace{\frac{1+n+2021}{v_{n+2021}}} \right) \\ &= \frac{(n-2020)(2n+2023)}{2} \end{aligned}$$

(II) من أجل $u_0 = 6$ و $\alpha = 4$ لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 1}$$

$$:u_n > 3$$

① برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 6 > 3 \dots (*)$$

• نفرض أن $[u_n > 3]$ ونثبت أن $[u_{n+1} > 3]$:

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{4u_n}{u_n + 1} \\ &= \frac{4u_n + 4 - 4}{u_n + 1} \\ &= \frac{4(u_n + 1) - 4}{u_n + 1} \\ &= 4 - \frac{4}{u_n + 1} \end{aligned}$$

ولدينا حسب فرض التراجع:

$$\begin{aligned} u_n > 3 &\Rightarrow u_n + 1 > 4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n + 1} < \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{u_n + 1} > -\frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 4 - \frac{1}{u_n + 1} > \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 3 \dots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من (*) و (**) نجد أن: $(u_n > 3)$

②

① تبين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{4u_n}{u_n + 1} - 3}{\frac{4u_n}{u_n + 1}} \\ &= \frac{4u_n - 3u_n - 3}{4u_n} \\ &= \frac{u_n - 3}{4u_n} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{u_n - 3}{u_n} \right) \\ &= \frac{1}{4} w_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$w_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = \frac{6 - 3}{6} = \frac{1}{2}$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$.

② كتابة عبارة (w_n) بدلالة n :

$$w_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{u_n - 3}{u_n} \Rightarrow u_n w_n - u_n = -3 \\ &\Rightarrow u_n (w_n - 1) = -3 \\ &\Rightarrow u_n = -\frac{3}{w_n - 1} \\ &\Rightarrow u_n = -\frac{3}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^n - 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n} \right) = \boxed{3}$$

لأن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n \right) = 0$$

3

$$\begin{aligned} A_n &= w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \right) \\ &= \boxed{\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2(n+1)}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2(n+1)}}{\frac{15}{16}} \right) \\ &= \boxed{\frac{4}{15} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2(n+1)} \right)} \end{aligned}$$

$$C_n = \sqrt{w_0} + \sqrt{w_1} + \sqrt{w_2} + \dots + \sqrt{w_n}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^{n+1}}{1 - \sqrt{\frac{1}{4}}} \right)$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \dots + \frac{1}{w_n} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1 - (4)^{n+1}}{1 - 4} \right) \\ &= \boxed{\frac{2}{3} ((4)^{n+1} - 1)} \end{aligned}$$

$$E_n = w_0 + 2w_1 + 4w_2 + \dots + 2^n w_n$$

لدينا:

$$2^n w_n = 2^n \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right) \left(2 \times \frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ومنه $(2^n w_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $2^0 w_0 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} E_n &= w_0 + 2w_1 + 4w_2 + \dots + 2^n w_n \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= \boxed{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_n &= w_1 + w_3 + w_5 + \dots + w_{2n-1} \\ &= w_1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1-1+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}}{\frac{3}{4}} \right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{6} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1} \right)}$$

$$G_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1-w_0}{3} + \frac{1-w_1}{3} + \frac{1-w_2}{3} + \dots + \frac{1-w_n}{3}$$

$$= \frac{1}{3} (1-w_0 + 1-w_1 + 1-w_2 + \dots + 1-w_n)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 \times (n+1) - \underbrace{(w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n)}_{A_n} \right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} \left(n+1 - \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) \right)}$$

$$H_n = w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \dots \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+2+\dots+n}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}n\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2\left(\frac{n+1}{2}n\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)+(n+1)n}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)^2}$$

$$I_n = \ln(w_0) + \ln(w_1) + \ln(w_2) + \dots + \ln(w_n)$$

$$= \ln(w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots \times w_n)$$

$$= \ln(H_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{(n+1)^2} \right) \\
&= (n+1)^2 \ln \left(\frac{1}{2} \right) \\
&= -(n+1)^2 \ln(2)
\end{aligned}$$

(III)

1 تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $t_{n+1} = \frac{1}{\alpha} t_n$

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - (\alpha - 1)}{u_{n+1}} \\
&= \frac{\frac{\alpha u_n}{u_n + 1} - (\alpha - 1)}{\frac{\alpha u_n}{u_n + 1}} \\
&= \frac{\alpha u_n - (\alpha - 1)(u_n + 1)}{\alpha u_n} \\
&= \frac{\alpha u_n - \alpha u_n - \alpha + u_n + 1}{\alpha u_n} \\
&= \frac{u_n - (\alpha - 1)}{\alpha u_n} \\
&= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{u_n - (\alpha - 1)}{u_n} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} t_n
\end{aligned}$$

2 كتابة عبارة u_n بدلالة n و α :

لدينا:

$$t_{n+1} = \frac{1}{\alpha} t_n$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
t_0 &= \frac{u_0 - (\alpha - 1)}{u_0} \\
&= \frac{\alpha - (\alpha - 1)}{\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

ومنه t_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ و حدها الأول $\frac{1}{\alpha}$.
أي:

$$t_n = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n \Rightarrow \boxed{t_n = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n+1}}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{u_n - (\alpha - 1)}{u_n} \Rightarrow t_n u_n - u_n = -(\alpha - 1) \\ &\Rightarrow u_n(t_n - 1) = -(\alpha - 1) \\ &\Rightarrow u_n = -\frac{\alpha - 1}{t_n - 1} \\ &\Rightarrow u_n = \frac{\alpha - 1}{1 - t_n} \\ &\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{\alpha - 1}{1 - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n+1}}} \end{aligned}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶