

1. الدالة الأصلية.

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال:

تعريف: f دالة معرفة على مجال I .

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f .

من أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$

خواص:

* إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالاً أصلية على I .

* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي

الدوال $x \mapsto F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

2. الدوال الأصلية لـ $f + g$ و kf (k عدد حقيقي)

خواص:

* إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لدالتين f و g على مجال I فإن $F + G$ دالة

أصلية للدالة $f + g$ على المجال I .

* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I ($k \in \mathbb{R}$)

3. الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

c عددا حقيقي كفي.

المجال I هو	الدوال الأصلية لـ f على I هي الدوال المعرفة بـ $F(x) =$	f دالة معرفة على I بـ $f(x) =$
$\mathbb{R}$	$ax + c$	a (a عدد حقيقي)
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x^2 + c$	x
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)
$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$	$-\frac{1}{x} + c$	$\frac{1}{x^2}$
$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$)
$]0; +\infty[$	$2\sqrt{x} + c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$

4. الدوال الأصلية والعمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

شروط على الدالة u	الدوال الأصلية للدالة f على I	الدالة f
	$\frac{1}{2}u^2 + c$	$u'u$
	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
من أجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$	$-\frac{1}{u} + c$	$\frac{u'}{u^2}$

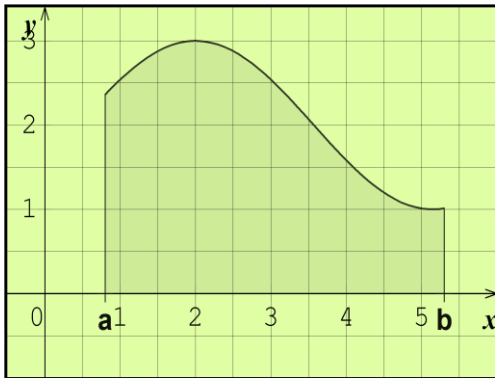
$(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) \frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	من أجل كل x من I ، $u(x) > 0$

2. الحساب التكاملي

1. الدالة الأصلية ومساحة حيز تحت منحن:

خاصية

f دالة مستمرة وموجبة على مجال I . a و b عددين حقيقيين
من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحن f في معلم متعامد $(O; A, B)$ و F دالة أصلية لـ f على I .
مساحة الحيز تحت المنحن (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$.



ملاحظات:

الحيز تحت المنحن (C_f) بين العددين a و b هو
الحيز المحدد بالمنحن (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين
اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$.

تعريف:

f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددين حقيقيين من I . يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ ، حيث F دالة
أصلية لـ f على I ، التكامل من a إلى b لـ f . ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x) dx$.

ملاحظات:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x) dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ نكتب:}$$

$$2. \text{ يمكن تبديل المتغير } x \text{ بأحد الحروف } t, q, \dots \text{ فيكون لدينا مثلا } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

نتيجة:

f دالة مستمرة وموجبة على مجال I . a و b عددين حقيقيين من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحن f في
معلم متعامد $(O; A, B)$ و F دالة أصلية لـ f على I .

مساحة الحيز تحت المنحن (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x) dx$

2. خواص التكامل:

f و g دالتان معرفتان ومستمرتان على مجال I .

أ- الخطية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

ب- الترتيب

خواص: a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$.

$$(1) \text{ إذا كان من أجل كل } x \text{ من } [a; b], f(x) \geq 0 \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$(2) \text{ إذا كان من أجل كل } x \text{ من } [a; b], f(x) \leq g(x) \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

ج- علاقة شال

خواص: من أجل كل أعداد حقيقية a, b, c و من I لدينا:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

3. القيمة المتوسطة لدالة على مجال:

تعريف:

f دالة معرفة ومستمرة على مجال I . a و b عددان حقيقيان من I حيث $a < b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a; b]$ هي العدد الحقيقي: $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

التفسير البياني:

نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a; b]$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; I, J)$.

$$m(b-a) = \int_a^b f(x) dx \text{ يعني } m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

نعلم أن $\int_a^b f(x) dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b .

$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعده $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).

وهكذا فإن m ، القيمة المتوسطة لـ f على $[a; b]$ ، هي "ارتفاع" المستطيل

الذي قاعدته $b-a$ والذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b .

نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق والأحمر نفس المساحة.

من اعداد الأستاذ:

شعبان أسامة