

الملخص الشامل في الدوال الأسية

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

1 قواعد الحساب (الخواص)

- $e^a * e^b = e^{a+b}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $(e^a)^n = e^{na}$

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^0 = 1$

أمثلة :

$$(e^{3x})' = 3e^{3x}$$

$$(e^{-4x})' = -4e^{-4x}$$

$$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

2 الاشتقاق

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$$

3 النهايات الشهيرة

باستعمال التزايد المقارن : بما أن $e^x > x$ فإن نهاية x مهمة أمام نهاية e^x ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

تمرين: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات:

- 1) $e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}}$
- 2) $e^{x^2} = e^{-3(x+1)}$
- 3) $\frac{x+4}{e^{6-x}} = e^{\frac{1}{x}}$

الحل:

$$1) e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x+3 = \frac{4}{x}$$

$$x(x+3) = 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = 25 > 0 \Rightarrow x_1 = -4 \text{ أو } x_2 = 1$$

$$S = \{-4; 1\}$$

$$2) e^{x^2} = e^{-3(x+1)} \Leftrightarrow x^2 = -3(x+1)$$

$$x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$\Delta = -3 < 0$$

إذن المعادلة (2) لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$

$$3) \frac{x+4}{e^{6-x}} = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x}$$

$$x(x+4) = 1(6-x)$$

$$x^2 + 4x - 6 + x = 0$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Delta = 49 > 0 \Rightarrow x_1 = -6 \text{ أو } x_2 = 1$$

$$S = \{-6; 1\}$$

ملاحظة: لو ظهر أحد الحلين 6 لرفضناه لأنه غير مقبول لأن مجموعة التعريف هي $\mathbb{R} - \{0, 6\}$

$$\text{توضيح: } \frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{لو وضعنا } x = 6 \text{ يصبح لدينا: (مستحيل) } \frac{6+4}{6-6} = \frac{10}{0}$$

تمرين: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات:

- 1) $e^{3x} \leq 1$
- 2) $e^{2x^2} > e^{5x+3}$
- 3) $e^{-x^2+x} \geq 1$

الحل:

$$e^{3x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{3x} \leq e^0 \Rightarrow 3x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$S =]-\infty; 0] \text{ إذن}$$

$$2) e^{2x^2} > e^{5x+3}$$

$$2x^2 > 5x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 > 0 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$$

$$x_1 = 3 \quad \text{أو} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$	+	○	○	+

$$S =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]3; +\infty[\text{ إذن}$$

$$3) e^{-x^2+x} \geq 1 \Leftrightarrow -x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x(-x+1) \geq 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x^2 + x$	-	○	○	-

$$S = [0; 1] \text{ إذن}$$

6 نهاية دالة أسية وتفسيرها الهندسي

تمرين : عين نهاية الدالة f

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1} \text{ عند } -\infty \text{ و } +\infty \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{2e^x + 1} = -1$$

$y = -1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{2e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{e^x(2 + \frac{1}{e^x})} = \frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2x} \text{ عند } 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}(e^{3x} - 1) \text{ عند } 0 \text{ و } +\infty \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(e^{3x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^0}{x - 0} = (e^{3(0)})' = 3e^0 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}(e^{3x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{3x}}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{3x}}{3x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

$f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ✓

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = -\infty \times 0 = \text{ح ع ت}$$

نستعمل تغيير المتغير وذلك بوضع: $x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$
لما $x \rightarrow -\infty$ فإن $t = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(e^t - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(e^t - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t - 0} = (e^0)' = 1$$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ عند حدود D_f ✓

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$

$f(x) = \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1}$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ➤

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1} = -3$$

$y = -3$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x} \left(1 - \frac{3}{e^{4x}}\right)}{e^{4x} \left(1 + \frac{3}{e^{4x}}\right)} = 1$$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$

$f(x) = x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ عند $+\infty$ و $-\infty$ و 0 ✓

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) = +\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) = -\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي

$f(x) = xe^x$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ✓

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

$f(x) = (2x - 3)e^x$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ✓

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x - 3e^x = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3)e^x = +\infty$$

$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ✓

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x + xe^x + e^x = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3 + 1)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = +\infty$$

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ عند $\mathbb{R}^*$ ✓

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

7 مشتقة الدالة الأسية وتغيراتها

تمرين: أدرس اتجاه تغير الدوال الآتية :

$$f(x) = xe^x \quad (1)$$

$$f(x) = (2x - 3)e^x \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 1} \quad (4)$$

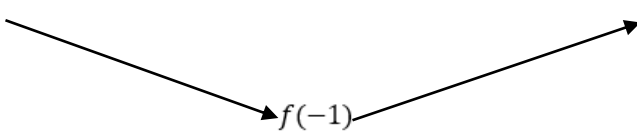
$$1) f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = 1 \times e^x + e^x \times x$$

$$f'(x) = e^x(1 + x)$$

لدينا $e^x > 0$ إذن إشارة المشتق من إشارة $(x + 1)$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	-	$\circ$	+
$f'(x)$	-	$\circ$	+
$f(x)$			

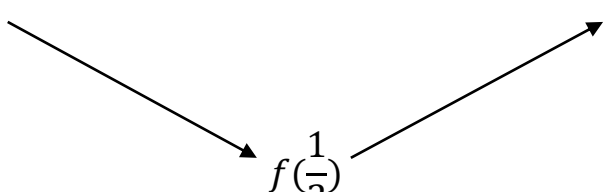
$$2) f(x) = (2x - 3)e^x$$

$$f'(x) = 2e^x + e^x(2x - 3)$$

$$= e^x(2 + 2x - 3)$$

$$= e^x(2x - 1)$$

ومنه إشارة المشتق من إشارة $(2x - 1)$ لأن $e^x > 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	-	$\circ$	+
$f'(x)$	-	$\circ$	+
$f(x)$			

$$3) f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x \times x) - 1 \times (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{(x - 1)e^x + 1}{x^2}$$

ومنه إشارة المشتق من إشارة البسط

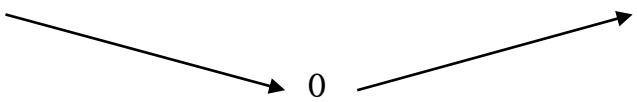
$$f'(x) = \frac{(x - 1)e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

حيث : $g(x) = (x - 1)e^x + 1$

$$g'(x) = e^x + e^x(x - 1)$$

$$g'(x) = e^x(1 + x - 1)$$

$$g'(x) = xe^x$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$g(x)$			

من جدول التغيرات لدينا $g(x) > 0$ إذن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$
ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^*$

$$4) f(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - [e^x(3e^x - 2)]}{(e^x + 1)^2} = \frac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} + 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

لأن: $5e^x > 0$ و $(e^x + 1)^2 > 0$

إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

8 الدالة الأسية ومبرهنة القيم المتوسطة

تمرين :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = e^{-x} - x - 2$

✓ أحسب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$

✓ شكل جدول تغيرات الدالة f

✓ بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له

✓ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.45 < \alpha < -0.44$

✓ استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

الحل:

✓ النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - x - 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - x - 2) = -\infty$$

✓ اتجاه التغير: الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

$$e^{-x} > 0 \Rightarrow -e^{-x} < 0$$

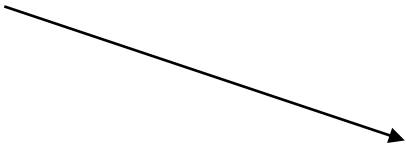
$$-1 - e^{-x} < -1$$

لدينا

بإضافة العدد (-1)

$$f'(x) < 0 \text{ إذن}$$

إذن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$  $-\infty$	

✓ البرهان أن (C_f) يقبل مقارب مائل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x}] = 0$$

ومنه $y = -x - 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

✓ برهان أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

بما أن الدالة مستمرة ومتناقصة على المجال $[-0.45; -0.44]$ وبما أن $f(-0.45) \times f(-0.44) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.45 < \alpha < -0.44$

✓ استنتج إشارة $f(x) = 0$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	+		-

9 حساب $f(\alpha)$

تمرين: g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

① بين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1.14; 1.15]$

② نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^{x+1}}$

أ/ بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ ، ب/ أعط حصرا لـ: $f(\alpha)$

الحل:

① تبين أن $g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 - e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1 \right) = -\infty$$

$$g'(x) = 1 - e^x$$

$g'(x) > 0$ يكافئ $1 - e^x > 0$ ، يكافئ $-e^x > -1$ ، يكافئ $e^x < 1$

يكافئ $x < \ln 1$ ، يكافئ $x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$g(0)$	$-\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة ومتناقصة على المجال $[1.14; 1.15]$

$$g(1.14) \times g(1.15) < 0 \text{ لدينا}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1.14 ; 1.15[$

2 / تبين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$

من السؤال السابق لدينا : $g(\alpha) = 0$ يكافئ : $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$

$$e^\alpha = \alpha + 2 \dots \dots \dots (1)$$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^{\alpha+1}} \dots \dots \dots (2) \text{ ولدينا:}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1} : \text{ نجد (2) في (1) بتعويض}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2 \text{ معلومة:}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$$

وهو المطلوب

ب/ حصر $f(\alpha)$

$$1.14 < \alpha < 1.15$$

بإضافة العدد 1 نجد

$$2.14 < \alpha + 1 < 2.15$$

بأخذ المقلوب نجد

$$\frac{1}{2.14} > \frac{1}{\alpha + 1} > \frac{1}{2.15}$$

$$0.467 > f(\alpha) > 0.465$$

$$0.465 < f(\alpha) < 0.467$$

تمرين: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$
 بين أن $A(0; \frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)
 الحل :

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

$$f(2(0) - x) + f(x) = 2(\frac{1}{2})$$

$$f(-x) + f(x) = 1$$

أولا من أجل كل $x \in D_f$ لدينا أيضا $-x \in D_f$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{1}{e^x} \times \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$$

بالتعويض نجد

$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{e^x+1} + \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{1+e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1$$

وهو المطلوب

إذن $A(0; \frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)