

الملخص الشامل في الأعداد المركبة

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبا + التركيز + المرافقة اليومية

1 الأعداد المركبة

تعريف : نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z = x + iy$ ، حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$

ملاحظات وترميز : نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ : $\mathbb{C}$

$$Z = x + iy$$

↙ الجزء الحقيقي $Re(z)$
↘ الجزء التخيلي $Im(z)$

- ❖ إذا كان $y = 0$ ، فإن العدد z حقيقي .
- ❖ إذا كان $x = 0$ ، فإن العدد z تخيلي صرف .
- ❖ يكون z معدوما إذا وفقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما وجزؤه التخيلي معدوما
- ❖ يتساوى عددان مركبان z و z' إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي

تمرين : z عدد المركب حيث : $z = (x^2 + x) + i(x^2 + y - 1)$

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوما

الحل :

$$z = 0 \text{ معناه } x^2 + x = 0 \text{ و } x^2 + y - 1 = 0 ، \text{ أي } x(x + 1) = 0 \text{ و } x^2 + y - 1 = 0$$

إذا كان $x = 0$ ، فإن $(0)^2 + y - 1 = 0$ ، أي أن $y = 1$ ومنه يكون z معدوما من أجل النقطة $(0; 1)$

إذا كان $x = -1$ ، فإن $(-1)^2 + y - 1 = 0$ ، أي أن $y = 0$ ومنه يكون z معدوما من أجل النقطة $(-1; 0)$

مرافق عدد مركب : z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ ، حيث x و y عددان حقيقيان

العدد المركب $x - iy$ والذي نرمز له : $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z

ملاحظة : للحصول على مرافق مركب z نغير إشارة الجزء التخيلي .

أمثلة :

$$\bar{2} = 2 ، \quad \overline{5i} = -5i ، \quad \overline{4 - 7i} = 4 + 7i ، \quad \overline{2 + 3i} = 2 - 3i$$

الشكل الجبري لعدد مركب :

الكتابة $z = x + iy$ يسمى الشكل الجبري للعدد المركب z حيث x و y عددا حقيقيان

تمرين : أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري

$$z_4 = \frac{1+i}{1-i} \odot , z_3 = \frac{4}{3+i\sqrt{2}} \odot , z_2 = \frac{7}{-3-i} \odot , z_1 = \frac{-5}{i} \odot$$

$$z_1 = \frac{-5}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-5i}{i^2} = \frac{-5i}{-1} = 5i$$

الحل :

$$z_2 = \frac{7}{-3-i} \times \frac{-3+i}{-3+i} = \frac{-21+7i}{(-3)^2+(1)^2} = \frac{-21+7i}{10} = \frac{-21}{10} + \frac{7}{10}i$$

$$z_3 = \frac{4}{3+i\sqrt{2}} \times \frac{3-i\sqrt{2}}{3-i\sqrt{2}} = \frac{12-4\sqrt{2}i}{(3)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{12-4\sqrt{2}i}{11} = \frac{12}{11} - \frac{4\sqrt{2}}{11}i$$

$$z_4 = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1)^2+(1)^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

حل معادلة من الدرجة الأولى :

تمرين : حل المعادلات الآتية

$$\frac{z+1}{z-1} = 2i \quad \textcircled{3} , (3-4i)z^2 = iz \quad \textcircled{2} , (1-i)z = 3+i \quad \textcircled{1}$$

الحل :

$$\textcircled{1} \text{ لدينا : } (1-i)z = 3+i \text{ ، ومنه } z = \frac{3+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+i-1}{(1)^2+(1)^2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

$$\textcircled{2} \text{ لدينا : } (3-4i)z^2 = iz \text{ ، ومنه } (3-4i)z^2 - iz = 0 \text{ ، ومنه } z[(3-4i)z - i] = 0$$

$$\text{ومنه } z=0 \text{ أو } (3-4i)z - i = 0 \text{ ، ومنه } (3-4i)z - i = 0$$

$$\text{ومنه } z = \frac{i}{3-4i} \text{ بالضرب في المرافق نجد } z = \frac{i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3i-4}{(3)^2+(4)^2} = \frac{-4}{25} + \frac{3}{25}i$$

$$\text{ومنه حلول المعادلة هي : } z = \frac{-4}{25} + \frac{3}{25}i \text{ أو } z = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ لدينا : } \frac{z+1}{z-1} = 2i \text{ ، ومنه } z+1 = 2iz - 2i \text{ ، ومنه } z - 2iz = -1 - 2i \text{ ، ومنه } z(1-2i) = -1-2i$$

$$z = \frac{-1-2i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-1-2i-2i+4}{(1)^2+(2)^2} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

التمثيل الهندسي لعدد مركب :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لكل نقطة $M(x; y)$ من المستوي نرفق العدد

المركب $z = x + iy$

✓ نقول إن النقطة M هي صورة العدد المركب z ، والشعاع $\vec{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z

✓ كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، ونقول أن z لاحقة النقطة M والشعاع $\vec{OM}$

✓ محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ، ومحور التراتيب يسمى المحور التخيلي .

تمرين : A نقطة من المستوي لاحقتها $z_A = -1 + 2i$

عين لاحقة النقطة M نظيرة A بالنسبة لمبدأ المعلم ، ومحور الفواصل ، محور التراتيب

الحل : لاحقة النقطة M نظيرة A بالنسبة لمبدأ المعلم هي $z_M = 1 - 2i$
 لاحقة النقطة M نظيرة A بالنسبة لمحور الفواصل هي $z_M = -1 - 2i$
 لاحقة النقطة M نظيرة A بالنسبة لمحور الترتيب هي $z_M = 1 + 2i$

خواص المرافق :

$$z \times \bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 , \quad z - \bar{z} = 2iIm(z) , \quad z + \bar{z} = 2Re(z) , \quad \bar{\bar{z}} = z$$

المرافق والعمليات : من أجل كل عددين مركبين z و z' لدينا :

$$z' \neq 0 \text{ مع } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} , \quad z \neq 0 \text{ مع } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} , \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'} , \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} , \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

تمرين : حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية :

$$\textcircled{1} \quad 2\bar{z} = -1 + i , \quad \textcircled{2} \quad \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i , \quad \textcircled{3} \quad z^2 + z\bar{z} - 4 - 6i = 0$$

الحل :

$$\textcircled{1} \quad 2\bar{z} = -1 + i \text{ ومنه } \bar{z} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ ومنه } z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i \text{ ومنه } \bar{z} - 1 = i\bar{z} + i \text{ ومنه } \bar{z} - i\bar{z} = 1 + i \text{ ومنه } \bar{z}(1 - i) = 1 + i$$

$$\textcircled{3} \quad z^2 + z\bar{z} - 4 - 6i = 0 \text{ ومنه } \bar{z} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+i^2}{(1)^2+(1)^2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

نضع $z = x + iy$ ، ومنه $\bar{z} = x - iy$ بالتعويض نجد

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 + (x + iy)(x - iy) - 4 - 6i &= 0 \\ x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 + y^2 - 4 - 6i &= 0 \\ 2x^2 + 2ixy - 4 - 6i &= 0 \\ (2x^2 - 4) + i(2xy - 6) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ومنه } \begin{cases} 2x^2 - 4 = 0 \\ 2xy - 6 = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x^2 = 2 \\ xy = 3 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2} \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$$\diamond \text{ إذا كان } x = \sqrt{2} \text{ ، فإن } y = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ ، ومنه } y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ ، ومنه نستنتج أن : } z = \sqrt{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\diamond \text{ إذا كان } x = -\sqrt{2} \text{ ، فإن } y = -\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ ، ومنه } y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ ، ومنه نستنتج أن : } z = -\sqrt{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

طويلة عدد مركب :

تعريف : z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ ، حيث x و y عدداً حقيقيين

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له : $|z|$ حيث : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

أمثلة : $\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ ☺ ، $|-5i| = 5$ ☺ ، $|3 - 4i| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$ ☺

خواص الطويلة :

☺ $|\bar{z}| = |z|$ ، ☺ $|-z| = |z|$ ، ☺ $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ ، ☺ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ مع $z' \neq 0$ ، ☺ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ ، ☺ $|z^n| = |z|^n$

أمثلة :

$$|(1 + i)(2 + 3i)| = |1 + i| \times |2 + 3i| = \sqrt{2} \times \sqrt{13} = \sqrt{26}$$

$$\left|\frac{3 - 4i}{\sqrt{3} - i}\right| = \frac{|3 - 4i|}{|\sqrt{3} - i|} = \frac{5}{2}$$

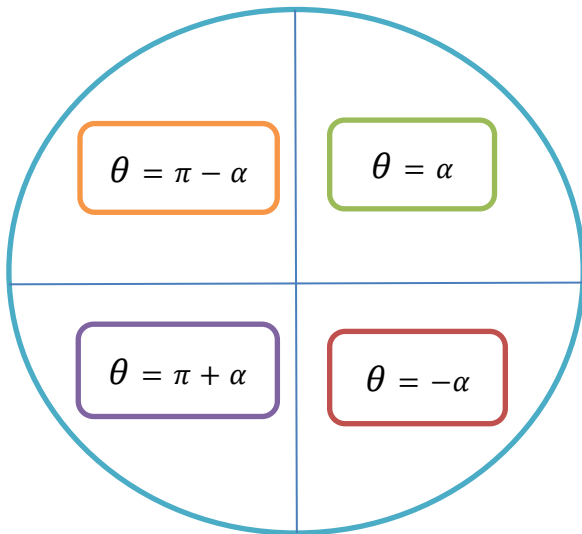
$$|(-1 + 2i)^4| = |-1 + 2i|^4 = (\sqrt{5})^4 = 25$$

عمدة عدد مركب : z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ ، $|z| = r$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dots + 2k\pi$$

جيب وجيب تمام زوايا شهيرة

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



تمرين : عين عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية :

① $z_1 = \sqrt{3} - i$ ، ② $z_2 = 6i$ ، ③ $z_3 = -3i$ ، ④ $z_4 = -1 + i$

⑤ $z_5 = -1 - i$ ، ⑥ $z_6 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

الحل :

لدينا $|z_2| = |6i| = 6$ ، نسمي $Arg(z_2) = \theta_2$

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{0}{6} = 0 \\ \sin \theta_2 = \frac{6}{6} = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

قيمة $\cos$ موجبة وقيمة $\sin$ موجبة إذن الربع الأول

لدينا $|z_1| = \sqrt{3 + 1} = 2$ ، نسمي $Arg(z_1) = \theta_1$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$$

ب قيمة $\cos$ موجبة وقيمة $\sin$ سالبة فإننا في الربع الرابع

لدينا $Arg(z_4) = \theta_4$ ، نسمي $|z_4| = |-1 + i| = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos \theta_4 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_4 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

قيمة $\cos$ سالبة وقيمة $\sin$ موجبة إذن الربع الثاني

لدينا $Arg(z_6) = \theta_6$ ، نسمي $|z_6| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$

$$\begin{cases} \cos \theta_6 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_6 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

قيمة $\cos$ موجبة وقيمة $\sin$ موجبة إذن الربع الأول

لدينا $Arg(z_3) = \theta_3$ ، نسمي $|z_3| = |-3i| = 3$

$$\begin{cases} \cos \theta_3 = 0 \\ \sin \theta_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

قيمة $\cos$ موجبة وقيمة $\sin$ سالبة فإننا في الربع الرابع

لدينا $Arg(z_5) = \theta_5$ ، نسمي $|z_5| = |-1 - i| = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos \theta_5 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_5 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_5 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

قيمة $\cos$ سالبة وقيمة $\sin$ سالبة فإننا في الربع الثالث

ملاحظات :

- ☺ عمدة أي عدد تخيلي صرف موجب هي $\frac{\pi}{2}$ ☺ عمدة أي عدد تخيلي صرف سالب هي $-\frac{\pi}{2}$
- ☺ عمدة أي عدد حقيقي موجب هي 0 أو 2π ☺ عمدة أي عدد حقيقي سالب هي π

خواص العمدة : z و z' عددان مركبان غير معدومين

$$Arg\left(\frac{z}{z'}\right) = Arg(z) - Arg(z') \quad \text{☺} , \quad Arg(z \times z') = Arg(z) + Arg(z') \quad \text{☺}$$

$$Arg(\bar{z}) = -Arg(z) \quad \text{☺} , \quad Arg(z^n) = n.Arg(z) \quad \text{☺} , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

تمرين : عين عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية :

$$z_2 = \frac{1+i}{-1-\sqrt{3}i} \quad \text{②}$$

$$z_1 = (1+i)(-1-\sqrt{3}i) \quad \text{①}$$

الحل :

$$\text{① لدينا : } |z_1| = |1+i| \cdot |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{لدينا : } Arg(z_1) = Arg(1+i) + Arg(-1-\sqrt{3}i)$$

$$Arg(-1-\sqrt{3}i) = \theta_2 \quad \text{نسمي}$$

$$Arg(1+i) = \theta_1 \quad \text{نسمي}$$

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{ومنه}$$

$$Arg(z_1) = Arg(1+i) + Arg(-1-\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{أن نستنتج أنه}$$

$$\text{② لدينا : } Arg(z_2) = Arg(1+i) - Arg(-1-\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$

2 الشكل المثلثي والأسّي لعدد مركب

تعريف : z عدد مركب غير معدوم

تسمى الكتابة $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ بالشكل المثلثي للعدد المركب z حيث : $|z| = r$ و $\theta = Arg(z)$

حذاري : إذا كان $r < 0$ فإن الكتابة " $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ " لا تمثل الشكل المثلثي

تعريف : العدد مركب z غير المعدوم الذي طويلته r ، و θ عمدة له : يكتب $z = re^{i\theta}$

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسّي للعدد المركب z

خاصية : يكون عدداً مركبان مكتوبان على الشكل الأسّي أو الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت

لهما نفس الطويلة وعمدتان متوافقتان بترديد 2π

تمرين : أكتب الشكل المثلثي للعدد المركب z في كل حالة :

$$z_2 = -3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \textcircled{2}, \quad z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \textcircled{1}$$

$$z_4 = -\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \quad \textcircled{4}, \quad z_3 = \sqrt{5} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right) \quad \textcircled{3}$$

الحل :

طريقة : نستعمل الدائرة المثلثية لإستخراج بعض العلاقات المثلثية

$$\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} \quad \text{ومنه} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \quad \text{ومنه} \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] \quad \textcircled{1} \text{ لدينا :}$$

$$\sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \quad \text{ومنه} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad \textcircled{2} \text{ لدينا :}$$

$$\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \quad \text{ومنه} \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$z_2 = -3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 3 \left[-\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] = 3 \left[\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \quad \text{ومنه} \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x \quad \textcircled{3} \text{ لدينا :}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \quad \text{ومنه} \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$$

$$z_3 = \sqrt{5} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{5} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \sqrt{5} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \quad \text{ومنه} \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \cos x \quad \textcircled{4} \text{ لدينا :}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \quad \text{ومنه} \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin x$$

$$z_4 = -\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right)$$

تمرين : أكتب الشكل الجبري للعدد المركب z حيث $z = \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right]$

$$z = \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right] = \frac{\sqrt{6}}{2} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{الحل :}$$

دستور موافر :

$$\begin{aligned} (e^{i\theta})^n &= \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \textcircled{\text{☺}} & (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} \quad \textcircled{\text{☺}} \\ (re^{i\theta})^n &= r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] \quad \textcircled{\text{☺}} & (re^{i\theta})^n &= r^n e^{in\theta} \quad \textcircled{\text{☺}} \end{aligned}$$

تمرين : ليكن العدد المركب z حيث $z = 2 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right]$

أحسب z^{100} (تعطى النتائج على الشكل الجبري)

الحل : لدينا :

$$z^{100} = 2^{100} \left[\cos \left(\frac{200\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{200\pi}{3} \right) \right] =$$

$$= 2^{100} \left[\cos \left(\frac{198\pi + 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{198\pi + 2\pi}{3} \right) \right] = 2^{100} \left[\cos \left(66\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(66\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 2^{100} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] = 2^{100} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right]$$

تعيين قيم n حتى يكون z^n :

☺ z^n حقيقي معناه $n\theta = k\pi$ ، ☺ z^n حقيقي موجب معناه $n\theta = 2k\pi$

☺ z^n حقيقي سالب معناه $n\theta = (2k+1)\pi$ ، ☺ z^n تخيلي صرف معناه $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

☺ z^n تخيلي موجب معناه $n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، ☺ z^n تخيلي سالب معناه $n\theta = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$

تمرين : نعتبر العدد المركب $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ، عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون z^n حقيقي موجب - تخيلي سالب

الحل : يكون z^n حقيقي موجب معناه $n\frac{\pi}{4} = 2k\pi$ ، ومنه $\frac{n}{4} = 2k$ ، ومنه $n = 8k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

يكون z^n تخيلي سالب معناه $n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ ، ومنه $\frac{n}{4} = \frac{1}{2} + 2k + 1$ ، ومنه $n = 8k + 6$

Bac 2009

3 القيم المضبوطة لـ $\sin$ و $\cos$

تمرين : $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ عدنان حيث :

① أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري والأسّي

② إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$

③ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا

الحل : ① أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-\sqrt{3}i} \times \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}i+i-\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

لدينا $|z_2| = |1 - \sqrt{3}i| = 2$ ، نسمي $\arg(z_2) = \theta_2$ ، $\arg(z_1) = \theta_1$ ، نسمي $|z_1| = |1 + i| = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ومنّه $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ولدينا : $\arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{7\pi}{12}$

ومنّه $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7\pi}{12}i}$

② إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\sin \frac{7\pi}{12}$

لدينا من جهة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ، ومن جهة أخرى $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) \right]$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \div \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \div \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases} \text{ ومنه بالمطابقة :}$$

③ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \text{ حقيقيا معناه } \frac{n7\pi}{12} = k\pi, \text{ ومنه } \frac{7n}{12} = k, \text{ ومنه } n = \frac{12k}{7}$$

يكون n طبيعي إذا فقط إذا كان $12k$ يقبل القسمة على 7 ، أي أن k مضاعف لـ 7

المعادلة من الدرجة الثانية :

تمرين : حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية :

$$\textcircled{1} z^2 - 2z + 2 = 0, \textcircled{2} (-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$$

$$\textcircled{3} z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0$$

الحل :

$$\textcircled{1} \text{ لحل المعادلة } z^2 - 2z + 2 = 0 \text{ نستخدم المميز } \Delta = -4 = 4i^2, \text{ ومنه للمعادلة حلان } \begin{cases} z_1 = 1 - i \\ z_2 = 1 + i \end{cases} \text{ أو}$$

$$\textcircled{2} \text{ لحل المعادلة } (-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0, \text{ نضع } t = -iz + 3i + 3, \text{ ومنه}$$

$$t^2 - 2t + 2 = 0, \text{ ومنه } \begin{cases} t_1 = 1 - i \\ t_2 = 1 + i \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} -iz_1 + 3i + 3 = 1 - i \\ -iz_2 + 3i + 3 = 1 + i \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = 4 - 2i \\ z_2 = 2 - 2i \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \text{ لحل المعادلة } z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0, \text{ نستخدم المميز :}$$

$$\Delta = 4 \cos^2 \theta - 4 = 4(\cos^2 \theta - 1) = -4 \sin^2 \theta = 4i^2 \sin^2 \theta = (2i \sin \theta)^2$$

$$\text{ ومنه للمعادلة حلان : } \begin{cases} z_1 = \frac{2 \cos \theta - 2i \sin \theta}{2} \\ z_2 = \frac{2 \cos \theta + 2i \sin \theta}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} z_1 = \cos \theta - i \sin \theta \\ z_2 = \cos \theta + i \sin \theta \end{cases} \text{ ومنه } \text{ أو}$$

الجذران التربيعيان لعدد مركب

تعريف : z عدد مركب غير معدوم

الجذر التربيعي للعدد المركب z هو العدد المركب w حيث : $z = w^2$

مثال : الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $3i$ و $-3i$

ملاحظة : كل عدد مركب غير معدوم يقبل جذرين تربيعيين متناظرين

البحث عن الجذرين التربيعيان لعدد مركب

$z = a + ib$ عدد مركب و $w = x + iy$ جذر تربيعي له أي أن $w^2 = z$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} |w^2| = |z| \\ \text{Re}(w^2) = \text{Re}(z) \\ \text{Im}(w^2) = \text{Im}(z) \end{cases} \text{ معناه } w^2 = z$$

تمرين : عين الجذرين التربيعين للعددين : $z_2 = 4 + 3i$ ، $z_1 = -8 + 6i$

الحل :

$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{بجمع (1) مع (2) نجد } 2x^2 = 2 \text{ ، ومنه} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \dots (1) \\ x^2 - y^2 = -8 \dots (2) \\ 2xy = 6 \dots (3) \end{cases}$$

بالتعويض في (3) نجد

✓ إذا كان $x = 1$ ، فإن $2y = 6$ ، أي أن $y = 3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = 1 + 3i$
 ✓ إذا كان $x = -1$ ، فإن $-2y = 6$ ، أي أن $y = -3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = -1 - 3i$

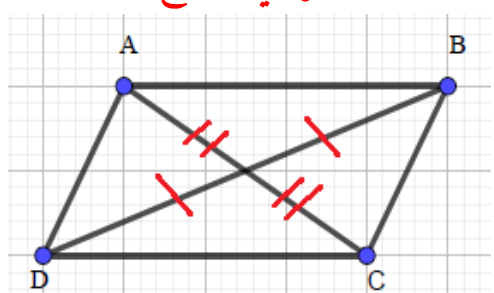
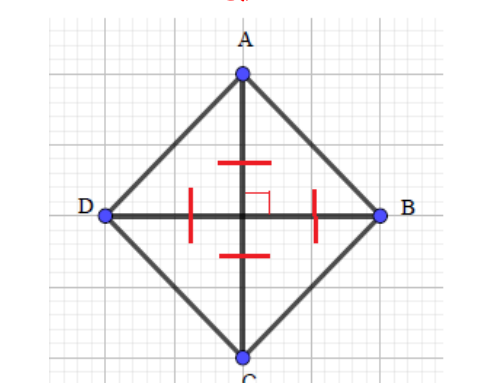
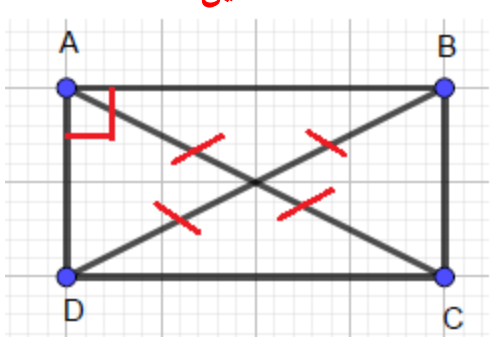
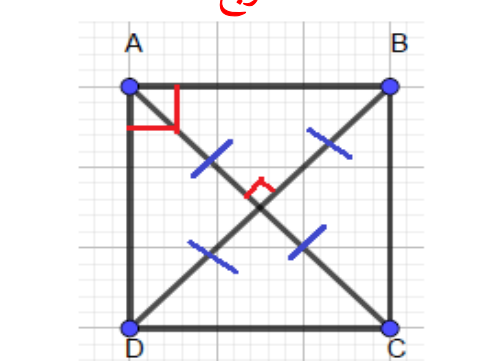
$$\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \text{أو} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{بجمع (1) مع (2) نجد } 2x^2 = 9 \text{ ، ومنه} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \dots (1) \\ x^2 - y^2 = 4 \dots (2) \\ 2xy = 3 \dots (3) \end{cases}$$

بالتعويض في (3) نجد

✓ إذا كان $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، فإن $3\sqrt{2}y = 3$ ، أي أن $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ومنه نستنتج أن : $w_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
 ✓ إذا كان $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، فإن $-3\sqrt{2}y = 3$ ، أي أن $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ومنه نستنتج أن : $w_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

المفهوم الهندسي	التفسير الهندسي بالأعداد المركبة
الطول AB	$AB = z_B - z_A $
لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$	$z_{AB} = z_B - z_A$
لاحقة G مرجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$	$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC	$z_H = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$
لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
لاحقة النقطة B نظيرة A بالنسبة إلى C	$z_C = \frac{z_A + z_B}{2} \Rightarrow z_B = 2z_C - z_A$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل	$z_{M'} = \overline{z_M}$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمحور الترتيب	$z_M = x + iy \Rightarrow z_{M'} = -x + iy$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمبدأ المعلم	$z_M = x + iy \Rightarrow z_{M'} = -x - iy$
قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$	$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right)$
النقاط A ، B ، C على إستقامة واحدة $((\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}))$	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$ (عددا حقيقيا)
الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان $((\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}))$	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ يساوي عددا تخيليا صرفا
طويلة النسبة $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$	$\left \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right = \frac{AB}{AC}$

التعرف على طبيعة الرباعي :

طريقة 2 للإثبات	طريقة 1 للإثبات	طريقة الإثبات نوع الرباعي
القطران متناصفان $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$	الشعاعان المتقابلان في نفس الاتجاه متساويان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $z_B - z_A = z_D - z_C$	متوازي أضلاع 
القطران متناصفان ومتعامدان $\begin{cases} \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases}$	الشعاعان المتقابلان في نفس الاتجاه متساويان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ الضلعان المتتابعان متساويان $AB = AD$	معين 
القطران متناصفان ومتساويان $\begin{cases} \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \\ AC = BD \end{cases}$	الشعاعان المتقابلان في نفس الاتجاه متساويان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ الضلعان المتتابعان متعامدان $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$	مستطيل 
القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان $\begin{cases} \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \\ AC = BD \end{cases}$	الشعاعان المتقابلان في نفس الاتجاه متساويان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ الضلعان المتتابعان متعامدان ومتساويان $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \\ AB = AD \end{cases}$	مربع 

طبيعة المثلث :

❖ المثلث القائم : يكون المثلث ABC قائم إذا كان $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

❖ **المثلث المتساوي الساقين** : يكون المثلث ABC متساوي الساقين إذا كان $\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$

❖ **المثلث القائم والمتساوي الساقين** : يكون المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين إذا كان

$$\arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ ، و } \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$$

❖ **المثلث المتقايس الأضلاع** :: يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا كان

$$\arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) = \frac{\pi}{3} \text{ ، و } \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$$

ملاحظات مهمة :

✓ تكون النقاط A ، B ، C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها E ونصف قطرها r ، إذا وفقط إذا كان

$$AE = BE = CE = r \text{ أي أن } |z_E - z_A| = |z_E - z_B| = |z_E - z_C| = r$$

✓ تكون النقاط A ، B ، C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r ، إذا وفقط إذا كان

$$AO = BO = CO = r \text{ أي أن } |z_A| = |z_B| = |z_C| = r$$

✓ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم هي منتصف الوتر

✓ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع هي مركز ثقل المثلث (مرجح)

4 مجموعات نقط من المستوي

A و B نقطتان من المستوي و z_A ، z_B لاحقتهما على الترتيب و (E) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتهما z

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $|z - z_A| = |z - z_B|$**

لدينا $|z - z_A| = |z - z_B|$ يكافئ $AM = BM$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي محور القطعة $[AB]$

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $|z - z_A| = r$ ، $r > 0$**

لدينا $|z - z_A| = r$ يكافئ $AM = r$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها r

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $(z - z_A)(\overline{z - z_A}) = r$ ، $r > 0$**

لدينا $(z - z_A)(\overline{z - z_A}) = r$ يكافئ $|z - z_A|^2 = r$ ، ويكون $AM^2 = r$ ، ومنه $AM = \sqrt{r}$ ، ومنه

مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{r}$

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $\arg \left(\frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = k\pi$ ، $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = k\pi$ ، ومنه مجموعة النقط (E)**

هي المستقيم (AB) بإستثناء النقطتين A و B

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $\arg \left(\frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = 2k\pi$ ، $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = 2k\pi$ ، ومنه مجموعة النقط**

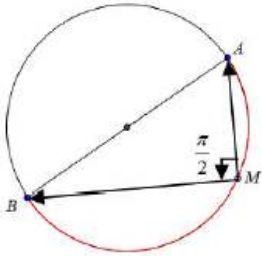
(E) هي المستقيم (AB) بإستثناء القطعة $[AB]$

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $\arg \left(\frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = (2k + 1)\pi$ ، $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = (2k + 1)\pi$ ، ومنه**

مجموعة النقط (E) هي القطعة $[AB]$ بإستثناء النقطتين A و B

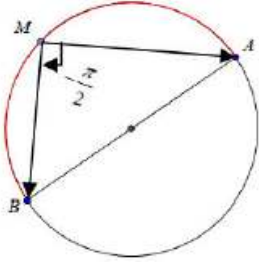
❖ **مجموعة النقط M بحيث : $\arg \left(\frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، ومنه مجموعة**

النقط (E) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ بإستثناء النقطتين A و B



❖ مجموعة النقط M بحيث : $Arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

يكافئ $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ بحيث الإتجاه من A إلى B يكون غير مباشر بإستثناء A و B



❖ مجموعة النقط M بحيث : $Arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

يكافئ $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ بحيث الإتجاه من A إلى B يكون مباشر بإستثناء A و B

❖ مجموعة النقط M بحيث : $z = z_A + ke^{i\theta}$ ، $k \in \mathbb{R}^*$ و $\theta \in \mathbb{R}$

☺ إذا كان k ثابت و θ متغير يكون $|z - z_A| = |k|$ ، وبالتالي المجموعة (E) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $|k|$

☺ إذا كان θ ثابت و k متغير يكون :

من أجل $k > 0$ تكون المجموعة (E) نصف المستقيم $[AM)$ المعروف بـ : $(\vec{i}; \overrightarrow{AM}) = \theta$ بإستثناء A

من أجل $k < 0$ تكون المجموعة (E) نصف المستقيم $[AM)$ المعروف بـ : $(\vec{i}; \overrightarrow{AM}) = \pi + \theta$ بإستثناء A

5 التحويلات النقطية

1- كيفية التعرف على التحويل النقطي وإستخراج عناصره المميزة $z' = az + b$

طبيعة التحويل	الكتابة المركبة
انسحاب شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $z_{\vec{u}} = b$	$a = 1$
تحاكي نسبته a ومركزه w ذو اللاحقة $z_w = \frac{b}{1-a}$	$a \neq 1$ $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$
دوران زاويته $\theta = Arg(a)$ ومركزه w ذو اللاحقة $z_w = \frac{b}{1-a}$	$a \neq 1$ $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ $ a = 1$
تشابه مباشر نسبته $k = a $ زاويته $\theta = Arg(a)$ ومركزه w ذو اللاحقة $z_w = \frac{b}{1-a}$	$a \neq 1$ $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ $ a \neq 1$

$z' = az + b$
حيث $a \in \mathbb{C}^*$
و $b \in \mathbb{C}$

ملاحظة : التحاكي نسبته a ، وهذا يعني أن نسبة التحاكي قد تكون موجبة و قد تكون سالبة أما التشابه فنسبته $|a|$ وهي موجبة دوما

2 - في حالة الصيغة المبسطة : $z' - z_w = a(z - z_w)$

- ❖ إذا كان $z' - z_w = k(z - z_w)$ فإن التحويل هو تحاكي نسبته k ولاحقة مركزه z_w
- ❖ إذا كان $z' - z_w = e^{i\theta}(z - z_w)$ فإن التحويل هو دوران زاويته θ ومركزه z_w
- ❖ إذا كان $z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w)$ فإن التحويل تشابه مباشر زاويته θ ونسبته k ولاحقة مركزه z_w

ملاحظات مهمة :

1 أوجد التحويل الذي يحول A إلى B ، ويحول C إلى D

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \dots \dots (1) \\ z_D = az_C + b \dots \dots (2) \end{cases}$$

بالطرح نجد : $a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$ ، نعوض بعد ذلك قيمة a في (1) أو (2) نجد b

2 أوجد التحويل حيث M صورة T و S صورة P

$$\begin{cases} z_M = az_T + b \dots \dots (1) \\ z_S = az_P + b \dots \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_H = az_I + b \\ z_N = az_P + b \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} F(I) = H \\ F(P) = N \end{cases}$$

تمرين : أذكر طبيعة التحويل في كل حالة :

$$\textcircled{1} z' = z + 1 - i \quad \textcircled{2} z' = -3z - 5i \quad \textcircled{3} z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z \quad \textcircled{4} z' = 2iz + 5 - i$$

الحل :

$$\textcircled{1} z' = z + 1 - i \quad \text{بما أن } a = 1 \text{ فإن التحويل هو إنسحاب لاحقة شعاعه } z_u = 1 - i$$

$$\textcircled{2} z' = -3z - 5i \quad \text{بما أن } a = -3 \text{ فإنه تحاكي نسبته } -3 \text{ ولاحقة مركزه } z_w = \frac{-5i}{1-(-3)} = \frac{-5}{4}i$$

$$\textcircled{3} z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z \quad \text{بما أن } \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1 \text{ فإنه دوران مركزه النقطة } O \text{ وزاويته } \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$$

ملاحظة : في عبارة التحويل $z' = az + b$ ، وإذا كان $b = 0$ فإن المركز هو النقطة O كما هو موضح أعلاه

$$\textcircled{4} z' = 2iz + 5 - i \quad \text{بما أن } |2i| = 2 \text{ فإنه تشابه مباشر نسبته } 2 \text{ وزاويته } \arg(2i) = \frac{\pi}{2} \text{ ولاحقة مركزه}$$

$$z_w = \frac{5-i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{5+10i-i+2}{(1)^2 + (2)^2} = \frac{7}{5} + \frac{9}{5}i$$

تمرين : عين في كل حالة مما يأتي العبارة المركبة للتحويل

$$\textcircled{1} \Omega(0; 0) , k = 2 , \theta = \frac{\pi}{2} \quad \textcircled{2} \Omega(1; 2) , k = -3$$

$$\textcircled{3} \Omega(-1; 3) , k = 1 , \theta = \frac{\pi}{4} \quad \textcircled{4} \Omega(0; 2) , k = 3 , \theta = \frac{3\pi}{2}$$

ملاحظة : ☺ إذا كان التحويل تشابه أو دوران فإن $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

☺ إذا كان التحويل تحاكي فإن a هو نسبة التحاكي أي أن $a = k$

الحل :

$$\textcircled{1} \Omega(0; 0) , k = 2 , \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{لدينا } z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w) \text{ ، ومنه } z' - 0 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}(z - 0)$$

$$z' = 2iz \quad \text{ومنه}$$

② $z' - (1 + 2i) = -3(z - (1 + 2i))$ ، ولدينا $z' - z_w = k(z - z_w)$ ، $k = -3$ ، $\Omega(1; 2)$

ومنه $z' = -3z + 4 + 8i$ ، ومنه $z' - 1 - 2i = -3z + 3 + 6i$

③ ، $z' - z_w = e^{i\theta}(z - z_w)$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $k = 1$ ، $\Omega(-1; 3)$

ومنه $z' + 1 - 3i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z + 1 - 3i)$ ، ومنه $z' + 1 - 3i = e^{\frac{\pi}{4}i}(z + 1 - 3i)$

ومنه $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z + 1 - 3i) - 1 + 3i$

④ $z' - 2i = 3e^{\frac{3\pi}{2}i}(z - 2i)$ ، ولدينا $z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w)$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ، $k = 3$ ، $\Omega(0; 2)$

ومنه $z' - 2i = -3i(z - 2i)$ ، ومنه $z' = -3iz - 6 + 2i$

إستنتاج طبيعة تحويل من نسبة

تمرين : نعتبر النقاط A ، B ، C ، D التي لواحقها على الترتيب

$z_D = 1 - 2i$ ، $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$ ، $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$ ، $z_A = 1 + 2i$

① بين أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$

② إستنتج أن صورة D بتشابه مباشر يطلب تعيين مركزه ونسبته وزاويته

الحل :

① بين أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$

$$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1 - 2i - 1 - \sqrt{3} - i}{1 + 2i - 1 - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} + i} \times \frac{-\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} - i} = \frac{3 + \sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i - 3}{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3}i$$

بما أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$ ، فإن $\begin{cases} |\sqrt{3}i| = \sqrt{3} \\ Arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

② لدينا : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$ ، ومنه $z_D - z_B = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}(z_A - z_B)$

ومنه $z_D - z_B = \sqrt{3}i(z_A - z_B)$

ومنه صورة D بتشابه مباشر مركزه B ونسبته $\sqrt{3}$ ، وزاويته $\frac{\pi}{2}$

" هجرنا المصاحف وإبتلينا بالهواتف ؛ فاللهم ردنا إليك رداً جميلاً "

" من خان حي على الصلاة ، تخونه حي على الفلاح وميزان الله أعدل "

كل مواقع الحياة تمحواها آية : " وعسى أن تكرهوا شيئاً وهو خيراً لكم "

اقرب من الله يقترب منك كل شيء جميل

"إن لم تقاتل من أجل ما نتمناه، ستقاتل أضعافه من أجل التأقلم مع وضع أنت لا تريده"