

ثانويات : البياضة الجديدة - حميدانو أحمد - حساني عبد الكريم - داسي خليفة - دوار الماء - كركوبية خليفة - لبامة - لقرع محمد الضيف - سيدي عون - شعباني عباس - علي حنكة - العقلة - هواري بومدين.

المدة : 3 ساعات و 30 دقيقة

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط : $A(0, -2, 2)$ ، $B(3, 1, 5)$ ، $C(3, -2, -1)$ و $E(-3, 4, -1)$.

1- حدد طبيعة المثلث ABC .

2- أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظمي له.

3- نعتبر المستوي (Q) تمثيله الوسيطى :
$$\begin{cases} x = t + \alpha \\ y = 2t - 2 \\ z = t + \alpha + 2 \end{cases} \quad t, \alpha \in \mathbb{R}$$

أ) تحقق أن النقطة A تنتمي للمستوي (Q)

ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(1, 0, -1)$ ناظمي للمستوي (Q) .

4- عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q) .

5- بين أن المستقيم (AE) عمودي على المستوي (ABC) .

6- أ) احسب حجم رباعي الوجوه $EABC$ ، ثم عين قياسا للزاوية BEC .

ب) احسب مساحة المثلث BEC ، ثم استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BEC) .

التمرين الثاني : (03.5 نقطة)

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0 = -6$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n - 1$

1- أ) برهن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ أن : $U_n > 0$

ب) أكتب U_n بدلالة U_{n-1} ، ثم استنتج من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ أن : $U_n > 2n - 3$

ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) .

2- (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n - 4n + 10$

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية احسب أساسها و حدها الأول.

ب) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n أن : $U_n = 2^{2-n} + 4n - 10$

ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

التمرين الثالث: (05 نقط)

- 1- $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث :
 أ) احسب $P(-1)$ ، ثم عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون : $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$.
 ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.
- 2- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C و G لواحقها على الترتيب
 $z_G = 3$ و $z_C = 2 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_A = -1$
 أ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.
 ب) احسب الأطوال AB, AC و BC ، ثم عين طبيعة المثلث ABC .
- 3- أ) اكتب $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج أن صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيينه.
 ب) جد مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACG .
- 4- أ) بين أن النقطة G مرجح الجملة $\{(A, -1), (B, 2), (C, 2)\}$.
 ب) عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$
- 5- أنشئ النقطة H لاحتها $z_H = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ دون حساب ، ثم عين بطريقة هندسية عمدة للعدد المركب z_H .

التمرين الرابع: (06.5 نقطة)

- I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (1 + ax^2)e^{bx}$ حيث a و b عددان حقيقيان ، C_g تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ و (d) مماس C_g في النقطة فاصلتها 0 ، (أنظر الشكل المقابل)
- 1- براءة بيانية احسب $g(-1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$.
- 2- اكتب معادلة للمماس (d) .
- 3- باستعمال المعطيات السابقة بين أن : $g(x) = (1 - x^2)e^{-x}$
- II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (1 + x)^2 e^{-x}$
- C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$
- 1- احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.
- 2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3- أ) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
 ب) اكتب معادلة لـ : (Δ) مماس C_f عند النقطة فاصلتها 0.
- 4- أ) أنشئ C_f و (Δ) .
 ب) عين قيم الوسيط m حتى يكون للمعادلة : $f(x) = m$ حل سالب.
- 5- h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x^2) - 1$
 - دون كتابة عبارة الدالة h احسب $h'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقط)

1- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C لواحقتها على الترتيب :

$$z_C = 1 + z_A, \quad z_B = 2 + 4i, \quad z_A = 1 + 3i$$

(أ) اكتب $z_B - z_A$ على الشكل الأسّي .

(ب) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

2- (أ) اكتب العبارة المركبة للتحاكي T الذي مركزه G و نسبته 2-

(ب) عين احداثي النقطة H سابقة النقطة C بالتحويل T ، ثم تحقق أن H منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

3- (γ) مجموعة النقط M لاحقتها z حيث : $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{4}}$ و k يتغير في $\mathbb{R}_+$.

(أ) عين قياسا للزاوية الموجمة $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

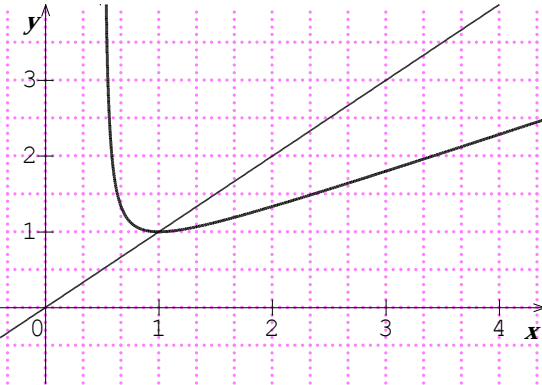
(ب) تحقق أن المجموعة (γ) هي نصف المستقيم $[AB]$.

4- بين أن : $\frac{z_C - z}{z_B - z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - k \right)$ ، ثم تحقق أن النقطة H تنتمي إلى (γ) .

- استنتج أن المستقيمين (AB) و (CH) متعامدان.

التمرين الثاني : (04 نقط)

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0 = 4$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{U_n^2}{2U_n - 1}$



f دالة معرفة على $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$ ، C_f تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم معادلته : $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس (أنظر الشكل المقابل)

1- (أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور

الفواصل الحدود U_0, U_1, U_2 دون حسابها.

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها.

2- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $U_n \geq 1$

3- (V_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ : $V_n = \ln \left(1 - \frac{1}{U_n} \right)$

(أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية احسب أساسها و حدها الأول.

(ب) اكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج أن : $U_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}}$

(ج) تحقق من صحة تخمينك السابق ، فيما يخص اتجاه التغير و التقارب.

التمرين الثالث : (05 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر المستقيم (Δ) المار بالنقطة $A(-3, -1, -3)$

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R} \quad \text{تمثيله الوسيطى}$$

و $\vec{u}(2, -2, -1)$ شعاع توجيه له ، و المستقيم (d) تمثيله الوسيطى :

(ب) بين أن المستقيمين (Δ) و (d) متعامدين ، و ليسا من نفس المستوي.

(ج) اكتب معادلة ديكرتية للمستوي الذي يحوي (Δ) و يوازي (d) .

2- (S) سطح كرة مركزها $C(-1, 0, -1)$ و نصف قطرها 6. و (P) مستو معادلته : $2x + y + 2z + 13 = 0$

(أ) أثبت أن (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها A ، يطلب تعيين نصف قطرها .

(ب) بين أن المستقيم (d) مماس لسطح الكرة في النقطة B .

3- (أ) احسب AB ، ثم استنتج أن النقطة C تنتمي للقطعة المستقيمة $[AB]$.

(ب) عين مستقيما عموديا على كل من المستقيمين (Δ) و (d) .

التمرين الرابع : (07 نقط)

$I - g$ و h دالتان معرفتان على $D =]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - 1 - \ln x$ و $h(x) = x + (x - 2)\ln x$

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- استنتج حسب قيم x من D إشارة $g(x)$.

3- (أ) تحقق من أجل كل x من D أن : $h(x) = 1 + g(x) + (x - 1)\ln x$

(ب) أثبت من أجل كل x من D أن : $(x - 1)\ln x \geq 0$ ، ثم استنتج أن : $h(x) > 0$

$II - f$ دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + x \ln(x) - (\ln x)^2$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إل معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا.

2- بين من أجل كل x من D أن : $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$ ، ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]0, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3- (أ) اكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس C_f عند النقطة $A(1, 1)$.

(ب) بين من أجل كل x من D أن : $f(x) - x = (-1 + \ln x)g(x)$

(ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى C_f و المماس (Δ) ، هل أن A نقطة انعطاف للمنحنى C_f ؟

4- أنشئ C_f و (Δ) . (تعطى فاصلة نقطة تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل $x_0 \approx 0.5$)

5- (أ) بين أن الدالة : $x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln(x) - \frac{x^2}{4} - x - x (\ln(x))^2$ دالة أصلية للدالة f على $]0, +\infty[$

(ب) احسب التكامل : $\int_1^e (x - f(x)) dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.