

تمارين المتتاليات العددية في البكالوريا

شبهة : رياضيات

التمرين [1] [باك 2008] [م1] [ن6]

لتكن f الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2cm)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ وفسر النتيجة هندسيا .

- أدرس تغيرات الدالة f .
- باستعمال منحنى دالة "الجزر التربيعي" أنشئ (C_f) .
- أرسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته : $y = x$.

(2) نعرف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

أ- باستعمال (D) و (C_f) مثل u_0, u_1, u_2 على حامل محور الفواصل .
ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(3) أبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \leq u_0 \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$.
ب- استنتج أن (u_n) متقاربة . أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

التمرين [2] [باك 2008] [م2] [ن4]

(u_n) المتتالية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

(1) أحسب u_0, u_1, u_2 .

(2) (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- برهن بالتراجع أن (v_n) ثابتة .
- استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

أحسب المجموع : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

التمرين [3] [باك 2009] [م1] [ن6]

(1) نعرف الدالة f على المجال $[1; 5]$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{x} \right)$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 3cm)
أ- أدرس تغيرات الدالة f .

ب- أنشئ (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$ في نفس المعلم .

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول $u_0 = 5$ وبالعبارة : $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{5}{u_n} \right)$.

أ- أحسب u_1 و u_2 .

بـ أـ باستعمال (Δ) و (C_f) مثل u_0, u_1, u_2 على حامل محاور الفواصل .

أـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n \geq \sqrt{5}$.

بـ بين أن (u_n) متناقصة تماما، ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها ؟

4) أـ برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي $n, (u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$.

بـ استنتج أن : $(u_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$. ما هي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [4] [باك 2009] [2م] [4ن]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$.

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عدنان حقيقيان .

1) عين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية ، يطلب حساب أساسها وحدها الأول .

2) أحسب كلا من u_n و v_n بدلالة n .

3) أحسب المجموعين S'_n و S_n بحيث : $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

التمرين [5] [باك 2014] [2م] [4,5ن]

الدالة العددية f معرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$ و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب المعلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (أنظر الشكل) .

1) بين أن الدالة f متزايدة تماما .

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 3$ من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = f(u_n)$.

و (Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$.

أـ باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل ، على حامل محور

الفواصل ، الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 دون حسابها .

بـ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

3) أـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 3$.

بـ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

جـ استنتج أن (u_n) متقاربة .

4) أـ أدرس إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد

طبيعي $n, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{6}{7}u_n$.

بـ برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

جـ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين [6] [باك 2018] [1م] [4ن]

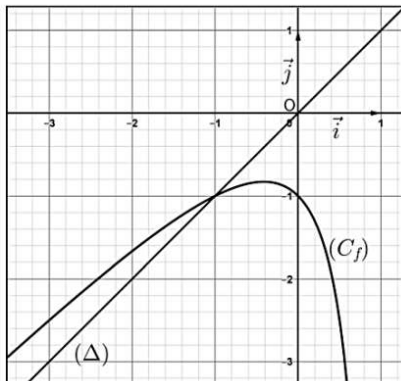
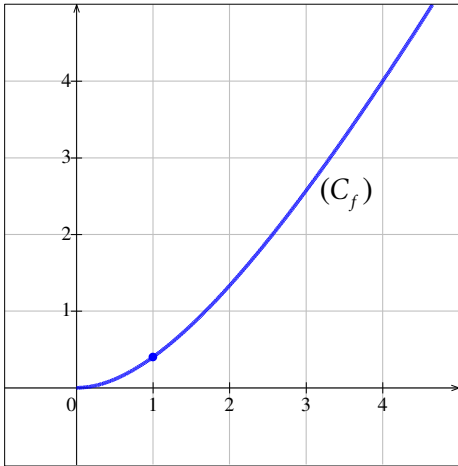
f الدالة العددية المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = -3$ و من أجل كل عدد

طبيعي $n, u_{n+1} = f(u_n)$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (الشكل)



- (1) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزاً خطوط التمثيل ، أعط تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .
- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : -3 \leq u_n \leq -1$.
- أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$.
- ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (3) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) < 0$: واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين [7] [باك 2020] [1م] [ن4]

- الدالة العددية f معرفة على المجال $[1; 4]$ بـ : $f(x) = \frac{4x+4}{9-x}$.
- (1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1; 4]$.
- ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; 4]$ فإن : $f(x) \in [1; 4]$.
- (2) المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ وبحيث : $u_{n+1} = f(u_n)$ ، n عدد طبيعي .
- أبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n < 4$.
- ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .
- (3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 4}$.
- أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يَطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .
- ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (4) المجموع S_n معرف بـ : $S_n = v_0 + 8v_1 + 8^2v_2 + \dots + 8^n v_n$. أحسب S_n بدلالة n .

التمرين [8] [باك 2020] [2م] [ن5]

- المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :
- $$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \end{cases}$$
- المتتالية العددية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = v_n - u_n$.
- (1) أ- أحسب w_0 ثم أحسب w_1 بدلالة α .
- ب- بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha - 1)$.
- ج- أكتب عبارة w_n بدلالة n و α ، ثم عيّن قيم α حتى تكون $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.
- نفرض في كل ما يلي : $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$.
- (2) أ- أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً وأن (v_n) متناقصة تماماً .
- ب- استنتج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ .
- ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n + v_n = 2$ واستنتج قيمة ℓ .
- (3) أحسب بدلالة α المجموع S بحيث : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2020}$.

“The only way to learn mathematics is to do mathematics”

كتابة : خالرجاخشة

نشر يوم 2021/01/29