

الوحدة: الطوال المجهية

موضوع الحصة: الدالة التآلفية

المكتسبات القبلية: عموميات حول الدوال العددية

الكفاءات القاعدية: حساب معامل التوجيه، تعيين عبارة دالة تآلفية

مدة الإجازة: ساعتان

نشاط:

نعتبر الدالتين f و g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = 3x - 2$ و $g(x) = -2x + 1$ ، ليكن (C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان المرفقان في الشكل المقابل.

(1) أحسب النسبة $\frac{f(6) - f(8)}{6 - 8}$ ، $\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)}$ ، $\frac{g(4) - g(2)}{4 - 2}$ و $\frac{g(-9) - g(0)}{-9 - 0}$ ، ماذا

تلاحظ؟ عمم النتائج من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 (حيث $x_1 \neq x_2$).

(2) أدرس اتجاه تغير كل من الدالتين f و g على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج؟

(3) عيّن إشارة كل من f و g على $\mathbb{R}$ ؟

الحل:

(1) لدينا (بعد إجراء مختلف الحسابات): $\frac{f(6) - f(8)}{6 - 8} = 3$ ، $\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = 3$ ، $\frac{g(-9) - g(0)}{-9 - 0} = -2$ و $\frac{g(4) - g(2)}{4 - 2} = -2$

نلاحظ أن: $\frac{f(6) - f(8)}{6 - 8} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 3$ وأن $\frac{g(4) - g(2)}{4 - 2} = \frac{g(-9) - g(0)}{-9 - 0} = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = -2$ ، ويمكن أن نقول أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 يكون $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 3$ و $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = -2$ أي أن قيمة النسبة $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ أو النسبة $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$ مستقلة عن قيمة العددين x_1 و x_2 .

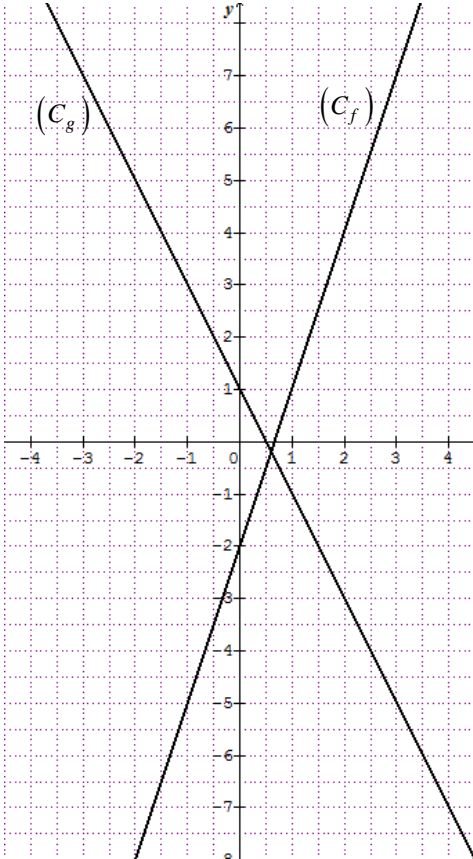
(2) من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $a < b$ يستلزم $3a - 2 < 3b - 2$ يستلزم $f(a) < f(b)$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.
• من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $a < b$ يستلزم $-2a + 1 > -2b + 1$ يستلزم $g(a) > g(b)$ وبالتالي الدالة g متناقضة تماماً على $\mathbb{R}$.

• نستنتج أن اتجاه تغير الدالتين f و g متعلق بإشارة النسبة $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ و $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$ على الترتيب، فإذا كانت النسبة موجبة تماماً كانت الدالة متزايدة تماماً وإذا كانت النسبة سالبة تماماً كانت الدالة متناقضة تماماً.

(3) الدالة f موجبة تماماً على المجال $\left[\frac{2}{3}, +\infty \right[$ ، سالبة تماماً على المجال $]-\infty, \frac{2}{3}]$ ، وتنعدم من أجل $x = \frac{2}{3}$ ،

بينما تكون الدالة g موجبة تماماً على المجال $]-\infty, \frac{1}{2}]$ ، سالبة تماماً على المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right[$ وتنعدم من

أجل $x = \frac{1}{2}$.



(1) الدالة التآلفية:

تعريف:

تُسمَّى دالة تآلفية كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x) = ax + b$ حيث a و b عددين حقيقيين مفروضان.

مثال:

- (1) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 4 - 5x$ هي دالة تآلفية.
- (2) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 4x + 9$ هي دالة تآلفية.
- (3) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 5x^2 + 2$ ليست دالة تآلفية.

حالات خاصة:

- (1) إذا كان $b = 0$ فإن الدالة $ax : x \mapsto$ تُسمَّى دالة خطية.
- (2) إذا كان $a = 0$ فإن الدالة $b : x \mapsto$ تُسمَّى دالة ثابتة.

(3) الخاصّة المميّزة للدالة التآلفية:

مبرهنة 1:

النسبة $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ تُسمَّى نسبة تزايد الدالة f .

تكون دالة f تآلفية إذا وفقط إذا كانت النسبة $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ ثابتة من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x_1 و x_2 . (بمعنى أنّ تزايد الصورة متناسب مع تزايد المتغير).

(4) التمثيل البياني لدالة تآلفية:

التمثيل البياني لدالة تآلفية في معلم هو مستقيم (D) معامل توجيهه a ويشمل النقطة $B(0, b)$ حيث b هي الترتيب إلى المبدأ، كما أنّ المعادلة $y = ax + b$ هي المعادلة المبسّطة للمستقيم (D).

(5) اتجاه تغيّر دالة تآلفية:

مبرهنة 2:

- لتكن f دالة تآلفية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = ax + b$.
- (1) تكون الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $a > 0$.
 - (2) تكون الدالة f متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $a < 0$.

برهان:

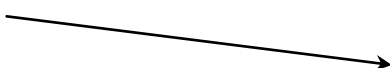
(1) إذا كان $a > 0$:

من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 لدينا: $x_1 < x_2$ يستلزم $ax_1 + b < ax_2 + b$ يستلزم $f(x_1) < f(x_2)$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ، وجدول تغيّراتها هو:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

(2) إذا كان $a < 0$:

من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 لدينا: $x_1 < x_2$ يستلزم $ax_1 + b > ax_2 + b$ يستلزم $f(x_1) > f(x_2)$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ ، وجدول تغيّراتها هو:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

تطبيق:

- (1) عيّن عبارة الدالة التآلفية f التي تحقّق $f(2) = -1$ وبيانها يشمل النقطة $A(0, 3)$.
- (2) عيّن عبارة الدالة التآلفية g التي يشمل بيانها النقطتين $A(-1, 2)$ و $B(2, 5)$.

الحل:

(1) بما أن f دالة تآلفية فإنها معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = ax + b$ ، وكون بيانها يشمل النقطة $A(0,3)$ فإن $b = 3$ ، ومن جهة أخرى الدالة f تحقق $f(2) = -1$ فإن $a(2) + 3 = -1$ ومنه $a = -2$ ، إذن عبارة الدالة f هي: $f(x) = -2x + 3$.

(2) بما أن g دالة تآلفية فإنها معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = ax + b$ ، وكون بيانها يشمل النقطة $A(-1,2)$ والنقطة $B(2,5)$ فإن:
$$\begin{cases} g(-1) = 2 \\ g(2) = 5 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a(-1) + b = 2 \\ a(2) + b = 5 \end{cases}$$
 إذن بطرح المعادلتين طرفاً لطرف نجد أن $3a = 3$ ومنه $a = 1$ ، وبالتعويض عن قيمة a في إحدى المعادلتين نجد أن $b = 3$ ، وعليه تكون عبارة الدالة g هي: $g(x) = x + 3$.

الوحدة: التحوّل إلى الجعّة

موضوع الحصة: الدالة مربع

المكتسبات القبلية: عموميات حول الدوال العددية

الكفاءات القاعدية: التعرف على الدالة مربع وخواصها

مدة الإجازة: ساعة واحدة

نشاط¹:

اقترحت سلطات منطقة سياحية بيع أراضي لا تفوق مساحاتها $3600m^2$ وسعر كل متر مربع هو 1 وحدة (الوحدة هي مليون سنتيم).

قال حميد لشريكه عثمان: "سعر القطعة الأرضية يزداد كلما يزداد طول ضلعها 1" وأضاف عثمان: "وكذلك ينقص كلما ينقص الضلع".

يرمز x لطول القطعة الأرضية المربعة (الوحدة هي المتر) ولسعرها الوحدة هي مليون سنتيم).

(1) عيّن مجموعة تعريف الدالة f باعتبار شروط النص ثم عبّر عن $f(x)$ بدلالة x .

(2) لخص أقوال حميد و عثمان باستعمال الدالة x .

(3) اتمم الجدول الآتي:

x	0	10	20	30	40	50
$f(x)$						

(4) استعمل معلماً متعامداً $(O, \vec{i}, \vec{j})$ واختر $1cm$ من أجل $10m$ و $2cm$ من أجل 10^9 مليون سنتيم لتمثّل بيانياً الدالة f .

الحل:

(1) مجموعة تعريف الدالة f باعتبار شروط النص هي: $[0, 60]$.

(2) سعر المتر المربع الواحد هو $DA = 10^4$ إذن ثمن القطعة الأرضية هو $f(x) = 10^4 x^2$.

(3) إتمام الجدول:

x	0	10	20	30	40	50
$f(x)$	0	10^6	4×10^6	9×10^6	16×10^6	25×10^6

(4) التمثيل البياني للدالة f موضح في الرسم المقابل.

1) الدالة مربع:

تعريف:

الدالة مربع هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x مربعه x^2 ، أي إذا رمزنا للدالة مربع بالرمز f فإننا نكتب: $f(x) = x^2$ أو $x \xrightarrow{f} x^2$ أو $f: x \mapsto x^2$.

2) اتجاه التغير:

مبرهنة:

الدالة مربع متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $]-\infty, 0]$.

برهان:

• ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $[0, +\infty[$ ، لدينا $a < b$ يستلزم $a^2 < b^2$ يستلزم $f(a) < f(b)$.

¹ نشاط 01 صفحة 84 من الكتاب المدرسي.



ومنه الدالة مربع متزايدة تماماً على المجال $[0, +\infty[$.

• ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $]-\infty, 0]$ ، لدينا $a < b$ يستلزم $a^2 > b^2$ يستلزم $f(a) > f(b)$ ومنه الدالة مربع متناقصة تماماً على المجال $]-\infty, 0]$.

وجداول تغيرات الدالة مربع هو:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

(3) شفعية الدالة مربع:

مبرهنة:

الدالة مربع دالة زوجية.

برهان:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ومنه الدالة مربع دالة زوجية ببيانها متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب، وتمثيلها البياني موضح في الشكل المقابل.

تطبيق:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2$.

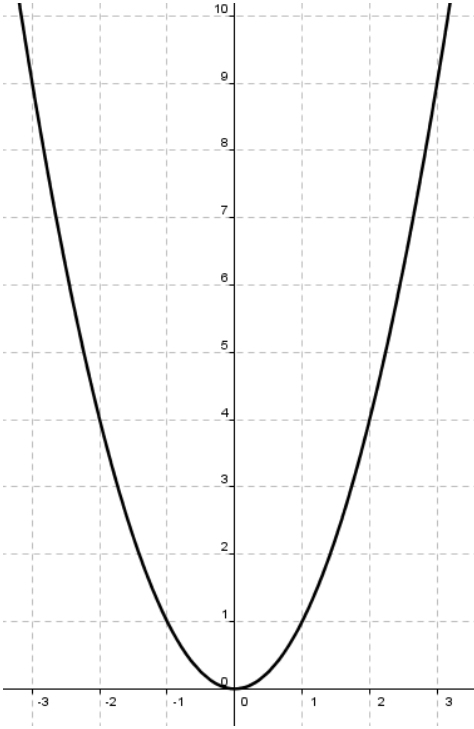
(1) أحسب صور الأعداد: $\sqrt{3}$ ، $1 - \sqrt{2}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{3}$.

(2) قارن بين صورتي العددين: $2 - \sqrt{3}$ و $\sqrt{3} - 2$.

الحل:

(1) لدينا: $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$ ، $f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ ، $f(\frac{3}{4}) = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ ، و $f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$.

(2) لدينا: $f(2 - \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ و $f(\sqrt{3} - 2) = (\sqrt{3} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ ومنه يكون لدينا $f(2 - \sqrt{3}) = f(\sqrt{3} - 2)$ (لأن الدالة مربع زوجية).



الوحدة: الطوال المجهية

موضوع الحصة: الدالة مقلوب

المكتسبات القبلية: عموميات حول الدوال العددية

الكفاءات القاعدية: التعرف على الدالة مقلوب وخواصها

مدة الإجازة: ساعة واحدة

نشاط:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x}$.

(1) أحسب $f(1)$ و $f(-1)$ ثم قارن بينهما، أحسب $f(2)$ و $f(-2)$ ثم قارن بينهما واستنتج شغية الدالة f .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجالين: $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

الحل:

(1) لدينا: $f(-1) = -1$ و $f(1) = 1$ إذن $f(1) = -f(-1)$ ، كذلك $f(-2) = -\frac{1}{2}$ و $f(2) = \frac{1}{2}$ إذن $f(2) = -f(-2)$.

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ إذن الدالة f فردية. بيانها متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

(أ) على المجال $]-\infty, 0[$:

ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $]-\infty, 0[$ ، لدينا $a < b$ يستلزم $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ يستلزم $f(a) > f(b)$ إذن الدالة f متناقصة تماماً على $]-\infty, 0[$.

(ب) على المجال $]0, +\infty[$:

ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $]0, +\infty[$ ، لدينا $a < b$ يستلزم $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ يستلزم $f(a) > f(b)$ إذن الدالة f متناقصة تماماً على $]0, +\infty[$.

وجداول تغيرات الدالة f هو:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0

(1) الدالة مقلوب:

تعريف:

الدالة مقلوب هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x غير معدوم مقلوبه $\frac{1}{x}$ ، أي إذا رمزنا للدالة مقلوب

بالرمز f فإننا نكتب: $f(x) = \frac{1}{x}$ أو $x \xrightarrow{f} \frac{1}{x}$ أو $x \mapsto \frac{1}{x}$.

(2) اتجاه التغير:

مبرهنة:

الدالة مقلوب متناقصة تماماً على المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$.

برهان:

أنظر النشاط.

(3) شفعية الدالة مقلوب:

مبرهنة:

الدالة مربع دالة فردية.

برهان:

أنظر النشاط.

(4) التمثيل البياني للدالة مقلوب:

التمثيل البياني للدالة مقلوب موضح في الرسم المقابل:

تطبيق:

هل يمكن أن يشكل الجدول التالي الدالة مقلوب؟

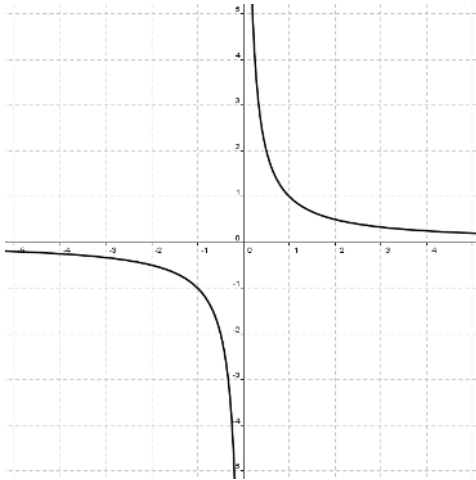
x	0,4	10^{-1}	1	$\sqrt{2}-1$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
$f(x)$	2,5	0,1	1	$\sqrt{2}+1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

الحل:

الدالة مقلوب معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x}$ ، ومنه لدينا: $f(0,4) = \frac{1}{0,4} = 2,5$ ،

$$f(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \text{ و } f\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, f(1) = 1, f(10^{-1}) = \frac{1}{10^{-1}} = 10$$

وعليه الجدول لا يُعرّف الدالة مقلوب.



الوحدة: التحويلات الجبرية

موضوع الحصة: دالة الجذر التربيعي

المكتسبات القبلية: عموميات حول الدوال العددية

الكفاءات القاعدية: التعرف على دالة الجذر التربيعي وخواصها

مدة الإجازة: ساعة واحدة

نشاط:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بـ: $f(x) = \sqrt{x}$.

(1) أحسب صور الأعداد: 0، 1، 3، 4 بواسطة الدالة f .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

الحل:

(1) لدينا: $f(0) = 0$ ، $f(1) = 1$ ، $f(3) = \sqrt{3}$ ، $f(4) = 2$.

ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $[0, +\infty[$ ، لدينا $a < b$ يستلزم $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ يستلزم

$f(a) < f(b)$ إذن الدالة f متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$.

وجداول تغيرات الدالة f هو:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	

(1) دالة الجذر التربيعي:

تعريف:

دالة الجذر التربيعي هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x موجب جذره التربيعي $\sqrt{x}$ ، أي إذا رمزنا لدالة

الجذر التربيعي بالرمز f فإننا نكتب: $f(x) = \sqrt{x}$ أو $x \xrightarrow{f} \sqrt{x}$ أو $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

(2) اتجاه التغير:

مبرهنة:

دالة الجذر التربيعي متزايدة تماماً على المجال $[0, +\infty[$.

برهان:

انظر النشاط.

تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

أحسب صور الأعداد: 0، 3، 10^4 ، 3×10^6 و

$(-a-b)^2$ حيث a و b عددين حقيقيين.

الحل:

لدينا: $f(0) = 0$ ، $f(3) = \sqrt{3}$ ،

و $f(10^4) = 10^2$ ، $f(3 \times 10^6) = 1000\sqrt{3}$

$$f((-a-b)^2) = |a+b|$$

(3) التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي:

التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي موضّح في الرسم المقابل:

