

الحل

$$f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$$

(1) أ- كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة:

لدينا:

$$|x + 1| = \begin{cases} -x - 1 ; x \in]-\infty ; -1[\\ \text{و} \\ x + 1 ; x \in [-1 ; +\infty[\end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} ; x \in]-\infty ; -1[\\ \text{و} \\ x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} ; x \in [-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\end{cases}$$

(1) ب- حساب نهايات f عند أطراف مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة على المجال $]-\infty ; -1[\cup [-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - 1 + \frac{x}{x \left(x - \frac{1}{x} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - 1 + \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right) \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 1) = +\infty \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right) = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

دراسة دالة عددية بالقيمة المطلقة**المسألة**

f هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ بـ :

$$f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب- أحسب نهايات f عند أطراف مجموعة التعريف.

(2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ- بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') مقاربين مائلين للمنحنى

(C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب حيث:

$$(\Delta) : y = x + 1 \text{ و } (\Delta') : y = -x - 1$$

ب- أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) على المجال

$]-\infty ; -1[$ ووضعية (C) بالنسبة إلى (Δ') على المجال $]-\infty ; -1[$.

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال

$]-1 ; 1[$ ثم أعط حصر α سعته 10^{-1} .

(5) أرسم (C) والمستقيمات المقاربة.

(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة

حلول المعادلة:

$$f(x) = m$$

حساب: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = +\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \frac{x}{x \left(x - \frac{1}{x} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right) \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right) = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

تفسير النتائج بيانياً:

المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين عموديين (يوازن حامل محور الترتيب) معادلتيهما $x = -1$ و $x = 1$.

حساب: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(-x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} (-x - 1) = 0 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = -\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

حساب: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = +\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

حساب: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \\ \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = -\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

دراسة إشارة $f'(x)$:- من أجل $x \in]-\infty; -1[$:

$$f'_1(x) = \frac{-(x^4 - x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; -1[$:

$$\begin{cases} -(x^4 - x^2 + 2) < 0 \\ (x^2 - 1)^2 > 0 \end{cases}$$

ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; -1[$:

$$f'_1(x) < 0$$

يعطى جدول إشارة $f'_1(x)$ على المجال $]-\infty; -1[$ كما يلي:

x	$-\infty$	-1
$f'_1(x)$		-

- من أجل $x \in]-1; 1[\cup]1; +\infty[$:

$$f'_2(x) = \frac{x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{(x^2 - 1)^2}$$

لاحظ أن:

الدالة $f'_2(x)$ تنعدم من أجل $x = -\sqrt{3}$ و $x = 0$ و $x = \sqrt{3}$.

انتبه:

لا نأخذ القيمة $x = -\sqrt{3}$ بعين الاعتبار لأنها لا تنتمي إلىالمجال $]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.يعطى جدول إشارة $f'_2(x)$ على المجال $]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ كما يلي:

x	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2	+	0	+	+	+
$x + \sqrt{3}$	+	+	+	+	+
$x - \sqrt{3}$	-	-	-	0	+
$x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$	-	0	-	-	+
$f'_2(x)$	-	0	-	-	+

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	-	-	+

(2) أ- حساب $f'(x)$:الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ حيث:- من أجل $x \in]-\infty; -1[$:

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= -1 + \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= -1 + \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-(x^2 - 1)^2 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-x^4 + 2x^2 - 1 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-x^4 + x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-(x^4 - x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

ومنه:

$$f'_1(x) = \frac{-(x^4 - x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2}$$

- من أجل $x \in]-1; 1[\cup]1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'_2(x) &= 1 + \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= 1 + \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 1)^2 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

ومنه:

$$f'_2(x) = \frac{x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{(x^2 - 1)^2}$$

(2) ب- تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	$1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

(3) أ- البرهان أن (Δ) و (Δ') مقاربن مائلين للمنحنى (C):البرهان أن (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$:المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_2(x) - y_{(\Delta)}) = 0$$

حيث:

$$\begin{cases} f_2(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \\ \text{و} \\ (\Delta) : y = x + 1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_2(x) - y_{(\Delta)}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x \left(x - \frac{1}{x} \right)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_2(x) - y_{(\Delta)}) = 0$$

ومنه:

المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

حيث:

$$(\Delta) : y = x + 1$$

البرهان أن (Δ') مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$:المستقيم (Δ') مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$ إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_1(x) - y_{(\Delta')}) = 0$$

حيث:

$$\begin{cases} f_1(x) = -x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \\ \text{و} \\ (\Delta') : y = -x - 1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_1(x) - y_{(\Delta')}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x \left(x - \frac{1}{x} \right)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{1}{x}} \right)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_1(x) - y_{(\Delta')}) = 0$$

ومنه:

المستقيم (Δ') مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

حيث:

$$(\Delta') : y = -x - 1$$

(3) ب- دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) على المجال: $[1; +\infty[$ لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) ندرس إشارةالفرق $f_2(x) - y_{(\Delta)}$ على المجال $[1; +\infty[$.

حيث:

$$f_2(x) - y_{(\Delta)} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من $[1; +\infty[$ فإن:

$$f_2(x) - y_{(\Delta)} > 0$$

ومنه:

المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $[1; +\infty[$.

(أنظر الجدول المرافق).

إعطاء حصر لـ α سعة 10^{-1} :

لدينا:

$$-1 < \alpha < 1$$

ومن جدول تغيرات الدالة f لدينا:

$$f(0) = 1 \text{ (قيمة موجبة)}$$

ومنه:

$$0 < \alpha < 1$$

وفيما يلي إشارة $f(\alpha)$ الموافقة لقيم α على المجال $]0; 1[$:

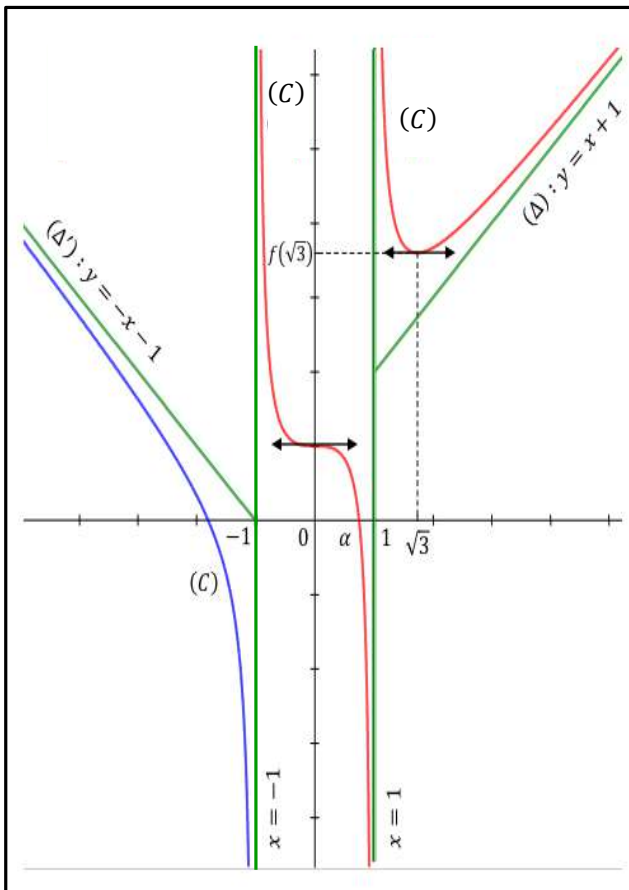
حيث:

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f(\alpha)$	+	+	+	+	+	+	+	-	-

ومنه:

$$0,7 < \alpha < 0,8$$

(5) رسم (C) والمستقيمات المقاربة:دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ') على المجال $]-\infty; -1[$:لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ') ندرس إشارة الفرق $f_1(x) - y_{(\Delta')}$ على المجال $]-\infty; -1[$.

حيث:

$$f_1(x) - y_{(\Delta')} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; -1[$ فإن:

$$f_1(x) - y_{(\Delta)} < 0$$

ومنه:

المنحنى (C) يقع تحت المستقيم (Δ') على المجال $]-\infty; -1[$.نلخص وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيمين (Δ) و (Δ') في الجدول المرافق التالي:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-				+
$x^2 - 1$	+				+
$\frac{x}{x^2 - 1}$	-				+
الوضعية	(C) تحت (Δ')			(C) فوق (Δ)	

(4) البرهان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α علىالمجال $]-1; 1[$:الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1; 1[$.

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

لاحظ أن:

$$0 \in]-\infty; +\infty[$$

ومنه:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلحلا وحيدا α على المجال $]-1; 1[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

6) المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x) = m \dots (*)$$

الحلول البيانية للمعادلة (*) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f)

الممثل للدالة f مع المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة:

$$(\Delta_m) : y = m$$

جميع المستقيمات $(\Delta_m) : y = m$ توازي حامل محور

الفواصل.

ومنه:

المناقشة البيانية أفقية.

- إذا كان: $m < 1$

للمعادلة (*) حلان متمايزان أحدهما موجب والآخر سالب.

- إذا كان: $m = 1$

للمعادلة (*) حلان متمايزان أحدهما معدوم والآخر سالب.

- إذا كان: $1 < m < 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة (*) حلان متمايزان سالبان.

- إذا كان: $m = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة (*) ثلاثة حلول أحدها موجب هو $\sqrt{3}$ وحلان سالبان.

- إذا كان: $m > 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة (*) أربعة حلول حلان موجبان وحلان سالبان.

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عبد الحميد

جميع الحقوق محفوظة

- BAC -

عبد الحميد