

القسمه

من كتابة :
الأستاذ : ناعم محمد
أستاذ التعليم الثانوي

و الموافقات في Z

education-onec-dz.blogspot.com

تمارين و حلول مفصلة

3
AS

www.dzexams.com

• تمارين نموذجية
• تمارين من بكالوريات سابقة
• تمارين من الكتاب المدرسي

الشعب :
✓ تقني رياضي
✓ رياضيات

تمارين في الموافقات و القسمة في $\mathbb{Z}$

للشعب : ثلاثة تقني رياضي ، رياضيات

تذكير

I

بعض الطرائق و القواعد الأساسية

(1) لإيجاد القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a; b)$ ؛ نبحث عن علاقة بين $a; b$ مستقلة عن n

مثال

$$b = 5n + 2 ; a = 2n + 3$$

نضع : $d = PGCD(a; b)$ ؛ $d/a; d/b$ ومنه $d/5a - 2b$ إذن $d/11$ فالقيم الممكنة لـ d هي : 1 و 11

(2) لإيجاد قيم n التي من أجلها يأخذ d قيمة معينة نستعمل الموافقات و خواصها

(3) لإيجاد قيم n لما يكون التردد مجهولا نكتب الموافقة على الشكل [الترديد] $\equiv 0$ عدد

مثال

$$\text{حل في } \mathbb{N} \text{ المعادلة : } n + 9 \equiv 0[n + 1]$$

$$n + 9 \equiv 0[n + 1] \text{ معناه : } 8 \equiv 0[n + 1] \text{ ومنه : } n + 1/8 \text{ أي } n + 1 \in D_8 \text{ إذن } n \in \{0; 1; 3; 7\}$$

(4) بواقي القسمة الإقليدية للعدد a^n على b تكون دورية ؛ أي انها تكرر من اجل قيم معينة للعدد n وبما ان

باقي a^0 على b هو 1 ؛ نحسب بواقي قسمة a^n على b حتى نحصل على قيمة للعدد n حيث باقي قسمة

a^n على b هو 1 ويكون الدور حينئذ هو n

مثال

ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7

$$k \in \mathbb{N} \text{ حيث } 4^{3k} \equiv 1[7]; 4^{3k+1} \equiv 4[7]; 4^{3k+2} \equiv 2[7] \text{ إذن } 4^0 \equiv 1[7]; 4^1 \equiv 4[7]; 4^2 \equiv 2[7]; 4^3 \equiv 1[7]$$

$$(5) \text{ حل المعادلة : } ax + by = c$$

تقبل هذه المعادلة حلا إذا وفقط إذا كان $PGCD(a; b)$ يقسم c

مثال

المعادلة $7x + 21y = 3$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$ لأن $PGCD(7; 21) = 7$ لا يقسم 3
لإيجاد الحل الخاص نستعمل خوارزمية أقليدس

مثال

لنبحث عن حل خاص للمعادلة $27x + 22y = 1$
 $27 = 22 + 5$ ؛ $5 = 27 - 22$ ؛ $22 = 4(5) + 2$ ومنه $2 = 22 - 4(5)$ ؛ $5 = 2(2) + 1$ ومنه $1 = 5 - 2(2)$ ؛
 $1 = 9(27 - 22) - 2(22)$ ومنه $1 = 27(9) + 22(-11)$ وعليه الحل الخاص هو $(x_0; y_0) = (9; -11)$

ملاحظة هامة

إذا كانت الثنائية $(x_0; y_0)$ حلاً خاصاً للمعادلة $ax + by = c$ فإن الثنائية $(nx_0; ny_0)$ حل خاص للمعادلة
 $ax + by = nc$

- (6) حل المعادلات المشتملة على $PGCD(a; b)$ و $PPCM(a; b)$
 حل المعادلات التي تشتمل على $m = PPCM(a; b)$ و $d = PGCD(a; b)$ تتبع الخطوات التالية :
 * كتابة a و b بدلالة a' و b' أي $d = PGCD(a; b)$ إذن $a = da'$ ؛ $b = db'$ حيث $PGCD(a'; b') = 1$
 * إيجاد علاقة بين $a'; b'; m; d$ أي $m \times d = a \times b$ ومنه $m = da'b'$
 * تعيين القيم الممكنة لـ a' و b' مع مراعاة الشرط $PGCD(a'; b') = 1$ ثم استنتاج قيم a و b

تمارين نموذجية

2

التمرين 1

- a, b, n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $a = 5n^2 + 7$ ؛ $b = n^2 + 2$
 1. بين أن كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 3
 2. بين أن : $PGCD(a; b) = 3$ إذا وفقط إذا كان $n^2 \equiv 1[3]$
 3. استنتج حسب قيم n $PGCD(a; b)$

👉 الحل المفصل ▼ أنقر هنا

[1]

التمرين 2

عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشروط في كل حالة من الحالات التالية:

$$\begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a; b) = 6 \end{cases} /1$$

$$\begin{cases} PPCM(a; b) = 90 \\ PGCD(a; b) = 18 \end{cases} \quad /2$$

$$a \leq b \quad PPCM(a; b) - 9PGCD(a; b) = 13 \quad /3$$

[2]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 3

1/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $9x - 7y = 3 \dots (1)$

2/ إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) عين قيم $PGCD(x; y)$

3/ عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق : $\begin{cases} m = 1242 \\ d = 3 \end{cases}$ حيث $m = PPCM(a; b)$ و $d = PGCD(a; b)$

[3]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 4

$a; b; n$ أعداد طبيعية حيث : $a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$ ؛ $b = 2n^2 + n$

1/ بين أن العدد $2n + 1$ قاسم مشترك للعددين a و b

2/ باستخدام مبرهنة بيزو بين أن : $PGCD(n; n + 1) = 1$ و $PGCD[n; (n + 1)^2] = 1$

3/ استنتج $PGCD(a; b)$

[4]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 5

1/ بين أن العدد 251 أولي

2/ حل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية و استنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008

3/ عين الأعداد الطبيعية $a; b$ بحيث : $m^3 + 35d^3 = 2008$ علما أن $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$

[5]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 6

$a; b; n$ أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $a = 11n + 3$ و $b = 13n - 1$

1/ بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 50

2/ باستخدام خوارزمية أقليدس عين حلا خاصا للمعادلة : $50x - 11y = 1$ ؛ ثم حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $50x - 11y = 3$

3/ استنتج قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 50$

3/ استنتج قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 25$

[6]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 7

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) $7x + 13y = 119$

- بين أنه إذا كان $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7؛ ثم استنتج حلول المعادلة (1)
- عين الأعداد الطبيعية غير المدومة $\alpha; \beta; \gamma$ حيث $\alpha\gamma 1^6 + 1\beta 3\beta^8 = 32\gamma\alpha^7$

[7]

🔗 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 8

- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 8^n على 10
- ما هو باقي قسمة العددين 2^{192} و 8^{341} على 10
- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $3 \times 8^{4n} + 2^{12n+9} \equiv 0[10]$

[8]

🔗 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 9

- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 5^n على 7
- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 54^{6n+1} + 1 \equiv 0[7]$
- عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 4n^2 + 4 \equiv 0[7]$

[9]

🔗 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 10

- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (1) $5x - 3y = 2$
- بين أن المعادلة (1) تقبل حلاً
- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن : $x \equiv 1[3]$
- استنتج حلول المعادلة (1)
- أ) بين إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن : $PGCD(x; y) = PGCD(x; 2)$
- ب) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$
- ج) عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x; y) = 2$

[10]

🔗 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 11

حافلة صغيرة لنقل المسافرين بها 16 راكبا مصنّفون إلى ثلاثة أصناف : مجموعة دفعت 20 دج (صنف a) و مجموعة أخرى دفعت 15 دج (صنف b) ؛ أما المجموعة الثالثة فلم تدفع شيئاً (صنف c) ؛ إذا علمت أن المبلغ الإجمالي

المدفوع هو 285 دج ؛ أحسب عدد الركاب من كل صنف

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

[11]

التمرين 12

1. عين الأعداد الصحيحة x حيث : $7x \equiv -19[9]$
2. استنتج في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة : $7x - 9y = -19 \dots (1)$
3. من بين حلول المعادلة (1) عين تلك التي تحقق : $x \equiv 0[y]$
4. نعتبر العدد الطبيعي n الذي يُكتب $2\alpha 5^7$ في نظام العد ذي الأساس 7 ؛ ويُكتب $1\beta 3^9$ في نظام العد ذي الأساس 9
عين α و β ؛ ثم أكتب العدد n في النظام العشري

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

[12]

3 تمارين من بكالوريات سابقة

التمرين 13

- x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $11x + 7y = 1$
1. أ) عين $(x_0; y_0)$ حل المعادلة (E) الذي يحقق : $x_0 + y_0 = -1$
ب) استنتج حلول المعادلة (E)

2. a و b عددان صحيحان و S العدد الذي يحقق :
$$\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$$

- أ) بين أن $(a; -b)$ حل للمعادلة (E)
ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77
3. n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 و باقي قسمته على 7 هو 2
- عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

[13]

التمرين 14

- 1) أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2n + 27 \equiv 0[n + 1]$
ب) عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $(b - a)(b + a) = 24$
ج) استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$
- 2) α و β عددان صحيحان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل $\alpha = \overline{10141}^5$ ؛ $\beta = \overline{3403}^5$
أ) أكتب العددين α و β في النظام العشري

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases} \quad \text{ب) عين الثنائية } (a; b) \text{ من الأعداد الطبيعية حيث :}$$

3) أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 ؛ ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478
ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $2013x - 1434y = 27$

[14]

🔗 **الحل المفصل** ▼ أنقر هنا

التمرين 15

اجب بصحيح أو خطأ في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير

1. المعادلة $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$
2. في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون $3421^7 + 1562^7 = 5413^7$
3. باقي القسمة الإقليدية للعدد $1 + 3 + \dots + 3^{2011}$ على 7 هو 6

[15]

🔗 **الحل المفصل** ▼ أنقر هنا

التمرين 16

1. n عدد طبيعي ؛ نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث : $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$

أ) بين أن : $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$

ب) ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\beta; 10)$

ج) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $PGCD(\alpha; \beta) = 5$

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية :
$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$$

[16]

🔗 **الحل المفصل** ▼ أنقر هنا

التمرين 17

نسمي (S) الجملة التالية :
$$\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$$
 حيث x عدد صحيح

1/ بين أن العدد 153 حل للجملة (S)

2/ إذا كان x_0 حلاً لـ (S) ؛ بين أن : $(x \text{ حل لـ } (S)) \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$ يكافئ

3/ حل الجملة (S)

4/ يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ؛ فإذا استعمل علبة تتسع لـ 15 كتاب بقي لديه 3 كتب ؛ وإذا استعمل علبة تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب ؛ إذا علمت أن عدد الكتب محصور بين 500 و 600 كتاب ؛ ماهو عدد هذه الكتب ؟

[17]

🔗 **الحل المفصل** ▼ أنقر هنا

التمرين 18

نعتبر المعادلة : $13x - 7y = -1 \dots (E)$ ؛ حيث x, y عددان صحيحان

(1) حل المعادلة (E)

(2) عين الأعداد الصحيحة النسبية a حيث :
$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$$

(3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13

(4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في النظام ذي الأساس 9 كما يلي : $\overline{\alpha 00 \beta 086^9}$ حيث α و β عددان طبيعيان ؛ $\alpha \neq 0$ ؛

- عين α و β حتى يكون b قابلاً للقسمة على 91

👉 **الحل المفصل** ▼ أنقر هنا

[18]

التمرين 19

(1) أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $3 - 2037^{2014} + 2015^{138} \times 42$ على 13

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n} [13]$ ؛

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0 [13]$

[19]

التمرين 20

1/ أ) أنشر $(n+3)(3n^2 - 9n + 16)$ حيث $n \in \mathbb{N}$

◀ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n+3$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم

2/ برهن أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a, b, c ؛ يكون : $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$

3/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 2 : $PGCD(3n^3 - 11n; n+3) = PGCD(48; n+3)$

4/ أ) عين القواسم الطبيعية للعدد 48

ب) استنتج الأعداد الطبيعية n بحيث يكون الكسر $A = \frac{3n^3 - 11n}{n+3}$ عدداً طبيعياً

👉 **الحل المفصل** ▼ أنقر هنا

[20]

التمرين 21

(1) أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$ على 7

- (2) أ) بين أن 89 عدد أولي
 (ب) عين القواسم الطبيعية للعدد 7832
 (ج) بين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما
 (3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك هو 2
 - عين x و y علما أن : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$
 (4) a, b, c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c
 أ) باستعمال مبرهنة بيزو ؛ برهن أن a أولي مع $b \times c$
 (ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع ؛ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن :
 $PGCD(a; b^n) = 1$
 (ج) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1954^{1962} و 1962^{1954}

[21]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

4 تمارين من الكتاب المدرسي

التمرين 22

التمرين 54 صفحة 59

- 1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، رقم آحاد العدد $n^5 - n$ هو 0
 2/ استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p العددين n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد

[22]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 23

التمرين 55 صفحة 59

- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n^7 - n$ يقبل القسمة على 14

[23]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 24

التمرين 96 صفحة 62

- 1/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$
 في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية : $PGCD(a, b) = 1$ يكافئ $PGCD(a^2; b^2) = 1$

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2/ تحقق من أن : $PGCD(k; k+1) = 1$

◀ برهن أن : $PGCD(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2$ من أجل k عدد طبيعي غير معدوم

3/ عين $PGCD(2k+1; 2k+3)$ من أجل k عدد طبيعي

4/ أحسب $PGCD(S_{2k+1}; S_{2k+2})$ من أجل $k \in \mathbb{N}$

◀ استنتج حسب قيم العدد الطبيعي $(S_n; S_{n+1})$

[24]

التمرين 25

التمرين 99 صفحة 63

نقول عن العدد الطبيعي p أنه أولي إذا قبل قاسمين بالضبط هما 1 و p

نعتبر ، في المجموعة $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة E ذات المجهولين x و y التالية : $x^2 + y^2 = p^2$ حيث p أولي

1/ نضع $p = 2$ بين أن المعادلة E لا تقبل حلول

2/ نفرض أن $p \neq 2$ و $(x; y)$ حل للمعادلة E

أ - برهن أن العددين x و y أحدهما زوجي والآخر فردي

ب - برهن أن p لا يقسم x ولا y

ج - برهن أن $PGCD(x^2; y^2)$ يقسم p^2

د - استنتج أن العددين x و y أوليان فيما بينهما

3/ نفرض أن p هو مجموع مربعين تامين غير معدومين أي $p = u^2 + v^2$ مع u و v عددين طبيعيين غير معدومين

أ - تحقق أن $(|u^2 - v^2|; 2uv)$ هي حل للمعادلة E

ب - أعط حلا للمعادلة E في حالة $p = 5$ ثم في حالة $p = 13$

4/ في كل حالة من الحالتين التاليتين بين أن p ليس مجموع مربعين وأن المعادلة E لا تقبل حلول

أ . $p = 3$. ب . $p = 7$

👉 الحل المفصل ▼ أنقر هنا

[25]

التمرين 26

التمرين 32 صفحة 79

حل في $\mathbb{Z}$ كل من الجملتين التاليتين : أ . $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$. ب . $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$

👉 الحل المفصل ▼ أنقر هنا

[26]

التمرين 93 صفحة 83

- 1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7
- 2/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1}$ قابلاً للقسمة على 7
- 3/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $U_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$
4. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$
- ما هي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها S_n قابلاً للقسمة على 7 ؟

[27]

5 تمرين حول التشفير

نعرف التشفير التآلي بـ $y = ax + b[28]$ ؛ حيث x هو الرقم المناسب للحرف قبل التشفير و y الرقم المناسب للحرف بعد التشفير ؛ a, b عدنان طبيعيان محصوران بين 0 و 27 ونفرض في هذا التمرين أن a أولي ؛ نرقم الحروف حسب الجدول التالي :

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	هـ	و	ي
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

نفرض أن الحرف (ث) يحول إلى الحرف (ذ) و الحرف (ص) يحول إلى الحرف (خ)

$$\begin{cases} 3a + b \equiv 8[28] \\ 13a + b \equiv 6[28] \end{cases} \quad 1/ \text{بين أن :}$$

$$2/ \text{بين أن } 5a = 14k - 1 \text{ ؛ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$3/ \text{أ) بين أن } a \equiv 11[14]$$

ب) استنتج قيمة a و قيمة b

ج) تحقق أن a و 28 أوليان فيما بينهما (يجب أن يتحقق هذا الشرط لكي لا يحول حرفان مختلفان إلى نفس الحرف)

4/ حل تشفير الجملة التالية : شكجرتظيته طق جفجرلو ثكثلنش ثكثقتو

[28]

الحل المفصل أنقر هنا

6 الحلول المفصلة للتمارين

حل التمرين 1 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$b = n^2 + 2 , a = 5n^2 + 7$$

$$1/ a \nmid b \text{ و } d \nmid b \text{ و منه : } d \nmid 5b - a \text{ أي } d \nmid 5n^2 + 10 - 5n^2 - 7 \text{ إذن } d \nmid 3$$

$\begin{cases} 5n^2 + 7 \equiv 0[3] \\ n^2 + 2 \equiv 0[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases}$: $PGCD(a; b) = 3$ /2
حسب خواص الموافقات فإنّ : $4n^2 + 5 \equiv [3]$ ومنه $n^2 + 2 \equiv 0[3]$ و عليه : $n^2 \equiv 1[3]$
/3 قيم $PGCD(a; b)$ حسب قيم n

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$n^2 \equiv$	0	1	1	[3]

إذا كان : $n = 3k$ حيث $k \in \mathbb{N}$ فإنّ : $PGCD(a; b) = 1$
إذا كان : $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$ فإنّ : $PGCD(a; b) = 3$

حل التمرين 2 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

/1 نضع : $PGCD(a; b) = d$ ومنه يوجد عددان طبيعيان غير معدومين a', b' حيث : $a = da'$ و $b = db'$ مع a', b' أوليان فيما بينهما

من معطيات التمرين يمكن أن نكتب $6a' \times 6b' = 360$ أي : $a' \times b' = 10$ مع $PGCD(a'; b') = 1$

إذن : $(a'; b') \in \{(1; 10); (10; 1); (2; 5); (5; 2)\}$ ومنه : $(a; b) \in \{(6; 60); (60; 6); (12; 30); (30; 12)\}$

/2 نضع : $PPCM(a; b) = m$ ؛ $PGCD(a; b) = d$ ؛ نعلم أن : $d \times m = ab$ و $a = a'd$ و $b = db'$ مع $PGCD(a'; b') = 1$

و عليه : $m = da'b'$ إذن $a'b' = \frac{m}{d}$ و منه $a'b' = 5$ مع $PGCD(a'; b') = 1$ إذن : $(a'; b') \in \{(1; 5); (5; 1)\}$

ومنّه : $(a; b) \in \{(18; 90); (90; 18)\}$

/3 لدينا : $PPCM(a; b) - 9PGCD(a; b) = 13$ ومنه $m - 9d = 13$ ومنه $da'b' - 9d = 13$ إذن $d(a'b' - 9) = 13$ ومنه $d \nmid 13$ إذن $d \in \{1; 13\}$

$d = 1$ ينتج عنه $a'b' - 9 = 13$ أي $a'b' = 22$ إذن $(a'; b') \in \{(1; 22); (2; 11)\}$ و عليه $(a; b) \in \{(1; 22); (2; 11)\}$

$d = 13$ ينتج عنه $a'b' - 10 = 13$ ومنه $a'b' = 23$ ومنه $(a'; b') \in \{(1; 23); (23; 1)\}$ ومنه $(a; b) \in \{(13; 299); (299; 13)\}$

حل التمرين 3 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

/1 لدينا : $9(-2) - 7(-3) = 3$ إذن $(x_0; y_0) = (-2; -3)$

لدينا $\begin{cases} 9x - 7y = 3 \\ 9(-2) - 7(-3) = 3 \end{cases}$ ومنه بالطرح طرفا لطرف بين المعادلتين السابقتين نجد : $9(x + 2) = 7(y + 3)$

لدينا $\begin{cases} 7 \nmid 9(x + 2) \\ pgcd(7; 9) = 1 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة غوص $7 \nmid (x + 2)$ ومنه $x + 2 = 7k; k \in \mathbb{Z}$ أي : $x = 7k - 2$

لدينا : $9(x + 2) = 7(y + 3)$ ومنه : $9(7k) = 7(y + 3)$ و عليه : $y = 9k - 3; k \in \mathbb{Z}$

حلول المعادلة (1) هي $k \in \mathbb{Z}$ $S = \{(7k - 2; 9k - 3)\}$

/2 نضع : $PGCD(x; y) = d$

$d \nmid x$ و $d \nmid y$ ومنه $d \nmid 9x - 7y$ إذن $d \nmid 3$ ومنه $d \in \{1; 3\}$

/3 لدينا : $m = 1242$ و $d = 3$ حيث $PPCM(x; y) = m$ و $PGCD(x; y) = 3$ إذن $xy = 3726$ ومنه $(7k - 2)(9k - 3) = 3726$

$63k^2 - 39k - 3726 = 0$ و عليه : $21k^2 - 13k - 1240 = 0$ ؛ هذه المعادلة حلّها الصحيح

هو $k = 8$ ومنه $(x; y) = (54; 69)$

حل التمرين 4 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1. $a = (2n+1)(n^2+2n+1)$ و $b = (2n+1)n$ ومنه $2n+1$ قاسم مشترك ل a و b

2. لدينا $(n+1) - n = 1$ إذن حسب بيزو $PGCD(n+1; n) = 1$

$PGCD(n; (n+1)^2) = 1$ إذن حسب بيزو $PGCD(n; (n+1)^2) = 1$

3. $PGCD(a; b) = (2n+1)PGCD(n; (n+1)^2) = 2n+1$ لأن: $PGCD(n; (n+1)^2) = 1$

حل التمرين 5 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ $\sqrt{251} \approx 15.84$ والعدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2, 3, 5, 7, 11, 13 إذن هو عدد أولي

2/ $2008 = 2^3 \times 251$ ومنه الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008 هي 1 و 2

3. نضع: $PGCD(a; b) = d$ ؛ $a = da'$ و $b = db'$ مع $PGCD(a'; b') = 1$ ؛ $md = ab$ ومنه $m = \frac{ab}{d}$ إذن $m = da'b'$

لدينا $m^3 + 35d^3 = 2008$ ومنه $(da'b')^3 + 35d^3 = 2008$ وعليه $d^3 \mid 2008$: إذن $d \in \{1, 2\}$ مما سبق نجد

$d = 1$ ؛ $(a'b')^3 + 35 = 2008$ إذن $a'b' = \sqrt[3]{1973}$ ؛ غير ممكن لأن $a'; b'$ عددان صحيحان

$d = 2$ ؛ $a'b' = \sqrt[3]{216} = 6$ ومنه $(a', b') \in \{(1; 6); (6; 1); (2; 3); (3; 2)\}$

$(a', b') \in \{(2; 12); (12; 2); (4; 6); (6; 4)\}$

حل التمرين 6 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ $d \mid a$ و $d \mid b$ ومنه $d \mid 13a - 11b$ إذن $d \mid 50$

2/ $50 = 11(4) + 6$ ومنه $6 = 50 - 11(4)$ ، $11 = 6 + 5$ ، ومنه $5 = 11 - 6$ ، $6 = 5 + 1$ ، ومنه $6 = 5 + 1$

$1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2(6) - 11$ ، ومنه $1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2(6) - 11$ ومنه $1 = 2(50) - 11(9)$

$(x_0; y_0) = (2; 9)$

3/ $1 = 50(2) - 11(9)$ ومنه $3 = 50(6) - 11(27)$

ومنه: $50(x-6) = 11(y-27)$ ، لدينا $11 \mid 50(x-6)$ و $PGCD(11; 50) = 1$ ؛ حسب

مبرهنة غوص فإن: $11 \mid (x-6)$ ومنه $k \in \mathbb{Z}$ ؛ $x = 11k + 6$

$50(x-6) = 11(y-27)$ ومنه $50(11k) = 11(y-27)$ ومنه $k \in \mathbb{Z}$ ؛ $y = 50k + 27$

حلول المعادلة $50x - 11y = 3$ هي $S = \{(11k + 6; 50k + 27)\}$

3/ $PGCD(a; b) = 50$ ومنه $a \equiv 0[50]$ و $b \equiv 0[50]$ ومنه $11n + 3 \equiv 0[50]$ و $13n - 1 \equiv 0[50]$ ومنه $11n \equiv 13n - 1$

$47[50]$ و $13n \equiv 1[50]$ ومنه $n \equiv 27[50]$ إذن $n \equiv 27[50]$ ؛ $n = 50\ell + 27$

4/ $PGCD(a; b) = 25$ إذن $\begin{cases} a \equiv 0[25] \\ b \equiv 0[25] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 11n + 3 \equiv 0[25] \\ 13n - 1 \equiv 0[25] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 11n \equiv 22[25] \\ 13n \equiv 1[25] \\ n \neq 50\ell + 27 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 11n+3 \equiv 0[25] \\ 13n-1 \equiv 0[25] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} n \equiv 2[25] \\ n \not\equiv 50\ell + 27 \end{cases}$ ومنه $25\ell' + 25 \neq 50\ell + 27$ ومنه $25\ell' \neq 50\ell + 25$ إذن $25\ell' \neq 50\ell + 25$ ومنه $\ell' \neq 2\ell + 1$ زوجي $n = 50\alpha + 2$; $\alpha \in \mathbb{N}$

حل التمرين 7 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$7x + 13y = 119$ ومنه $13y = 119 - 7x$ ومنه $13y = 7(17 - x)$ ومنه $13y \equiv 0[7]$ ومنه $y = 0[7]$ ، إذن : y مضاعف لـ 7 أي $k \in \mathbb{Z}$ $y = 7k$

$7x + 13y = 119$ ومنه $7x = 119 - 13(7k)$ إذن $x = -13k + 17$ وعليه حلول المعادلة : $7x + 13y = 119$ هي

$S = \{(-13k + 17; 7k)\}$; $k \in \mathbb{Z}$

$\overline{\alpha\gamma}1^6 + \overline{1\beta}3\beta^8 = \overline{32\gamma\alpha}^7 / 2$ ومنه

$5(7\alpha + 13\beta - 118) = \gamma$ ومنه $1 + 6\gamma + \alpha 6^2 + \beta + 24 + \beta 8^2 + 8^3 = \alpha + 7\gamma + 2 \times 7^2 + 3 \times 7^3$

$\gamma = 5$ ومنه $\gamma \equiv 0[5]$ (لأن : $0 < \gamma \leq 6$)

$5(7\alpha + 13\beta - 118) = 5$ ومنه $7\alpha + 13\beta = 119$ حسب ما سبق نجد $(\alpha; \beta) = (-13k + 17, 7k)$

لدينا : $\begin{cases} 0 < \alpha < 6 \\ 0 < \beta < 8 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 0 < -13k + 17 < 6 \\ 0 < 7k < 8 \end{cases}$ إذن : $k = 1$ وعليه $\alpha = 4; \beta = 7; \gamma = 5$

حل التمرين 8 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$8^5 \equiv 8[10]; 8^6 \equiv 4[10]; 8^7 \equiv 2[10]; 8^8 \equiv 1[10]; 8^1 \equiv 8[10]; 8^2 \equiv 4[10]; 8^3 \equiv 2[10]; 8^4 \equiv 6[10]$ / 1

$8^8 \equiv 6[10]$ نستنتج أن البواقي دورية باستثناء 1 : إذن البواقي كما يلي :

$k \in \mathbb{Z}^*$	$4k+3$	$4k+2$	$4k+1$	$4k$	$n =$
$[10]$	2	4	8	6	$8^n \equiv$

$8^{341} \equiv 8[10]$ ومنه $8^{341} = 8^{4(85)+1} / 2$

$2^{192} \equiv 6[10]$ ومنه $2^{192} \equiv (8)^{4(48)}[10]$ ومنه $2^{192} \equiv (-8)^{192}[10]$ ومنه $2 \equiv -8[10]$

$8^{4n} \equiv 6[10]$ ومنه $3 \times 8^{4n} \equiv 18[10]$ أي : $3 \times 8^{4n} \equiv 8[10]$ ؛ $2^{12n+9} \equiv 2^3(4n+3)[10]$ ؛ $2^{12n+9} \equiv 2[10]$ ومنه $2^{12n+9} \equiv 8^{4n+3}[10]$

كما سبق : $3 \times 8^{4n} + 2^{12n+9} \equiv 8 + 2[10]$ إذن $3 \times 8^{4n} + 2^{12n+9} \equiv 0[10]$

حل التمرين 9 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$5^5 \equiv 3[7]; 5^6 \equiv 1[7]; 5^0 \equiv 1[7]; 5^1 \equiv 5[7]; 5^2 \equiv 4[7]; 5^3 \equiv 6[10]; 5^4 \equiv 2[7]$ / 1

$k \in \mathbb{Z}^*$	$6k+5$	$6k+4$	$6k+3$	$6k+2$	$6k+1$	$6k$	$n =$
$[7]$	3	2	6	4	5	1	$5^n \equiv$

ومنه : $19 \equiv 5[7]$ / 2

$19^{6n+3} \equiv 6[7]$ ومنه $19^{6n+3} \equiv 19^{6n+3}[7]$ ومنه $26 \equiv 5[7]$

$26^{6n+4} \equiv 2[7]$ ومنه $26^{6n+4} \equiv 5^{6n+3}[7]$

$54 \equiv 5[7]$ ومنه $54^{6n+1} \equiv [7]$ ومنه $54^{6n+1} \equiv 5[7]$

$19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 54^{6n+1} + 1 \equiv 0[7]$ ومنه $19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 54^{6n+1} + 1 \equiv 6 + 2 + 5 + 1[7]$

$19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 4n^2 + 4 \equiv 0[7]$ ومنه $8 + 4n^2 + 4 \equiv 0[7]$ ومنه $12 + 4n^2 \equiv 0[7]$ ومنه $4(n^2 + 3) \equiv 0[7]$ / 3

ومنه $n^2 \equiv 4[7]$ لأن 7 أولي مع 4 ومنه $n^2 \equiv 4[7]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1	7

$n^2 \equiv 4[7]$ من أجل $n \equiv 2[7]$ أو $n \equiv 5[7]$ ومنه $n = 7k + 2$ أو $n = 7k + 5$ حيث $k \in \mathbb{N}$

حل التمرين 10 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ لدينا $PGCD(5;3) = 1$ و $2 \mid 1$ ومنه المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاً

$$2 \mid 5x - 3y = 2 \text{ ومنه } 2x - 2 = 3y - 3x \text{ ومنه } 2(x - 1) = 3(y - x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \mid 2(x - 1) \\ PGCD(3;2) = 1 \end{array} \right. \text{ ومنه } 3 \mid (x - 1) \text{ حسب مبرهنة غوص ومنه } x - 1 \equiv 0[7] \text{ إذن } x \equiv 1[7]$$

$$3 \mid 5x - 3y = 2 \text{ ومنه } 3y = 5x - 2 \text{ ومنه } 3y = 5(3k + 1) - 2 \text{ ومنه } y = 5k + 1$$

حلول المعادلة (1) هي $k \in \mathbb{Z}$; $S = \{(3k + 1; 5k + 1)\}$

4/ أ) نضع : $PGCD(x; y) = d$ و $PGCD(x; 2) = d'$

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid x \\ d \mid y \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d \mid x \\ d \mid 5x - 3y \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d \mid x \\ d \mid 2 \end{array} \right. \text{ إذن } d \mid PGCD(x; 2) \text{ ومنه } d \mid d'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d' \mid x \\ d' \mid y \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d' \mid x \\ d' \mid x + 2k \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d' \mid x \\ d' \mid PGCD(x; y) \end{array} \right. \text{ ومنه } d' \mid d$$

$d = d'$ إذن $d \mid d'$ و $d \mid d'$

ب) من السؤال السابق $d \mid 2$ ومنه $d \in \{1; 2\}$

$$\text{ج) } PGCD(x; y) = 2 \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0[2] \\ y \equiv 0[2] \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 3k + 1 \equiv 0[2] \\ 5k + 1 \equiv 0[2] \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} k \equiv 1[2] \\ k \equiv 1[2] \end{array} \right. \text{ ومنه } k = 2\ell + 1$$

حلول المعادلة (1) بحيث $PGCD(x; y) = 2$ هي $S = \{(6\ell + 4; 10\ell + 6)\}$; $\ell \in \mathbb{Z}$

حل التمرين 11 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

يمكن تريض المشكلة كما يلي : $a + b + c = 16$ و $20a + 15 = 285$ من هذه المعادلة الأخيرة نجد : $4a + 3b = 57$

إذن : $4a = 57 - 3b$ و عليه $3(19 - b) = 4a$ ومنه $3 \mid 4a$ و عليه $3 \mid a$ وذلك حسب غوص كون (3 أولي مع 4)

ومنه $a = 3k; k \in \mathbb{N}$

$$3b = -4a + 57 \text{ ومنه } b = -4k + 19 \text{ ؛ } \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 3k > 0 \\ -4k + 19 > 0 \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} k > 0 \\ k < 4.75 \end{array} \right. \text{ ومنه } k \in \{1; 2; 3; 4\}$$

◀ $k = 1$: $a = 3; b = 15$ (مرفوضة)

◀ $k = 2$: $a = 6; b = 11$ (مرفوضة)

◀ $k = 3$: $a = 9; b = 7; c = 0$ (مرفوضة)

◀ $k = 4$: $a = 12; b = 3; c = 1$

حل التمرين 12 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ $7x \equiv -19[9]$ إذن : $7x \equiv 8[9]$ ومنه $28x \equiv 32[9]$ ومنه $x \equiv 5[9]$ وعليه : $x = 9k + 5; k \in \mathbb{Z}$

2/ $7x - 9y = -19$ ومنه $7x = 9y - 19$ ومنه $7x \equiv -19[9]$ ومنه حسب السؤال السابق ينتج : $x = 9k + 5; k \in \mathbb{Z}$

$9y = 7x + 19$ ومنه $9y = 7(9k + 5) + 19$ ومنه $9y = 63k + 54$ ومنه $9y = 7k + 6$; $k \in \mathbb{Z}$

إذن حلول المعادلة (1) هي $k \in \mathbb{Z}$ $S = \{(9k + 5; 7k + 6)\}$

3/ $y \setminus x$ ومنه $(9k + 5) \setminus (7k + 6)$ ومنه $(7k + 6) \setminus 9(7k + 6) - 7(9k + 5)$ ومنه $(7k + 6) \setminus 19$ ومنه $7k + 6 \in$

$(x; y) = (-4; -1)$ وعليه $k = -1$ ومنه $7k \in \{-25; -7; -5; 13\}$

4/ $n = \overline{2\alpha 5^7} = \overline{1\beta 3^9}$ ومنه $2(7)^2 + 7\alpha + 5 = 9^2 + 9\beta + 3$ ومنه $7\alpha - 9\beta - 19$ ومنه $(\alpha; \beta) = (9k + 5; 7k + 6)$

ومنه $\begin{cases} 0 \leq 9k + 5 < 7 \\ 0 \leq 7k + 6 < 9 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 0 \leq \alpha < 7 \\ 0 \leq \beta < 9 \end{cases}$ ومنه $k = 0$ إذن : $\alpha = 5; \beta = 6; n = 138$

حل التمرين 13 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ أ) $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ x_0 + y_0 = -1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ 7x_0 + 7y_0 = -7 \end{cases}$ ومنه $4x_0 = 8$ ومنه $x_0 = 2$ وعليه $y_0 = -3$

إذن : $(x_0; y_0) = (2; -3)$

ب) $\begin{cases} 11x + 7y = 1 \\ 11(2) + 7(-3) = 1 \end{cases}$ ومنه $11(x - 2) = 7(-y - 3)$

ومنه حسب غوص $7 \setminus x - 2$ ومنه $x = 7k + 2$ ؛ $11(x - 2) = 7(-y - 3)$ ومنه $-y - 3 = 11k$

ومنه $y = -11k - 3$ $PGCD(7; 11) = 1$

$S_E = \{(7k + 2; -11k - 3)\}$; $k \in \mathbb{Z}$

2/ أ) $\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$ ومنه $11a + 1 = 7b + 2$ ومنه $11a + 7(-b) = 1$ ومنه الثنائية $(a; -b)$ هل للمعادلة (E)

ب) $S = 11a + 1 = 11(7k + 2) + 1 = 77k + 23$ ومنه باقي قسمة S على 77 هو 23

3/ $\begin{cases} n = 11\alpha + 1 \\ n = 7\beta + 2 \end{cases}$ ومنه $k \in \mathbb{N}$ $n = 77k + 23$

$n < 2013$ ومنه $77k + 23 < 2013$ ومنه $k < 25.8$ ومنه $k = 25$ إذن $n = 1948$

حل التمرين 14 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ أ) $2n + 27 \equiv 0[n + 1]$ إذن $2n + 2 + 25 \equiv 0[n + 1]$ ؛ لدينا $2n + 2 \equiv 0[n + 1]$ ومنه $25 \equiv 0[n + 1]$ إذن $n + 1 \in D_{25}$

ومنه $n + 1 \in \{1; 5; 25\}$ وعليه : $n \in \{0; 4; 24\}$

ب) الثنائية (a, b) هي ثنائية طبيعية ومنه $a + b > b - a$ ؛ لدينا : $(a + b)(b - a) = 24$ ومنه $a + b \setminus 24$

$\begin{cases} a + b = 24 \\ b - a = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a + b = 12 \\ b - a = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a + b = 8 \\ b - a = 3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a + b = 6 \\ b - a = 4 \end{cases}$

ومنه : nonsolutions nonsolutions

$$(a; b) \in \{(1; 5); (5; 7)\} : \text{إذن } \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$b^2 = a^2 + (\sqrt{24})^2 \text{ ومنه } (a+b)(a-b) = 24 \text{ (ج)}$$

لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$ ؛ نرسم مثلثاً قائماً طول وتره b أي 5 أو 7 و طول أحد ضلعيه القائمين a أي 1 أو 5 على الترتيب ويكون طول الضلع الثاني القائم هو $\sqrt{24}$

$$\beta = 3403^5 \text{ و } \alpha = 10141^5 / 2$$

$$\alpha = 10141^5 \text{ (أ) ومنه } \alpha = 1 + 4(5) + (5)^2 + (5)^4 \text{ ومنه } \alpha = 671 \text{ ومنه } \beta = 3403^5 \text{ ومنه } \beta = 3 + 4(5)^2 + 3(5)^3 \text{ ومنه } \beta = 478$$

$$(a; b) = (5; 7) \text{ ومنه } \begin{cases} (a; b) \in \{(1; 5); (5; 7)\} \\ \alpha a + \beta b = 9 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a + \beta b = 9 \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$2013 = 1434 + 579 = 579 \times 2 + 276 \text{ (أ) } / 3$$

$$276 = 27 \times 10 + 6 \text{ ؛ } 579 = 276 \times 2 + 27$$

$$PGCD(2013; 1434) = 3 \text{ ومنه } 6 = 3 \times 2 + 0 \text{ ؛ } 27 = 6 \times 4 + 3$$

$$PGCD(671; 478) = 1 \text{ ومنه } PGCD(671 \times 3; 478 \times 3) = 3 \text{ ومنه } PGCD(2013; 1434) = 3$$

$$(x_0; y_0) = (5; 7) \text{ (ب) } 2013x - 1434y = 27 \text{ ومنه } 671x - 478y = 9 \text{ ومنه الحل الخاص لهذه المعادلة الأخيرة هي الثنائية } (x_0; y_0)$$

$$\begin{cases} 478 \setminus 671(x-5) \\ PGCD(671; 478) = 1 \end{cases} \text{ ومنه حسب مرهنة } \begin{cases} 671x - 478y = 9 \\ 671(5) - 478(7) = 9 \end{cases} \text{ ومنه } 671(x-5) = 478(y-7) \text{ لدينا}$$

$$غوص فإن : $478 \setminus x - 5$ ومنه $k \in \mathbb{Z}$ ؛ $x = 478k + 5$ ؛ $671(478k) = 478(y-7)$ ومنه $y = 671k + 7$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$$$

$$S = \{(478k + 5; 671k + 7)\} \text{ ؛ } k \in \mathbb{Z} \text{ حلول المعادلة } 2013x - 1434y = 27 \text{ هي}$$

حل التمرين 15 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$1/ \text{ صحيح لأن : } PGCD(21; 14) = 7 \text{ و } 7 \text{ يقسم } 40$$

$$2/ \text{ خطأ لأن : } 3421^7 + 1562^7 = 1240 + 632 = 1872$$

$$5413^7 = 1921$$

$$3/ \text{ خطأ لأن : } 3^0 \equiv 1[7]; 3^1 \equiv 3[7]; 3^2 \equiv 2[7]; 3^3 \equiv 6[7]; 3^4 \equiv 4[7]; 3^5 \equiv 5[7]; 3^6 \equiv 1[7] \text{ ومنه } 3^6 \equiv 1[7]$$

$$3^{6k+3} \equiv 6[7]; 3^{6k+4} \equiv 4[7]; 3^{6k+5} \equiv 5[7] \text{ ؛ } 3^{6k} \equiv 1[7]; 3^{6k+1} \equiv 3[7]; 3^{6k+2} \equiv 2[7]$$

$$3^{6k} + 3^{6k+1} + 3^{6k+2} + 3^{6k+3} + 3^{6k+4} + 3^{6k+5} \equiv 0[7]$$

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011} \equiv \underbrace{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{6(334)+5}}_{\equiv 0[7]} + \underbrace{3^{6(335)}}_{\equiv 1[7]} + \underbrace{3^{6(335)+1}}_{\equiv 3[7]}[7]$$

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2011} \equiv 4[7]$$

حل التمرين 16 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$\alpha = (2n^2 - 6n + 4)\beta - 10$$

$$\begin{array}{r|l} 2n^3 - 14n + 2 & n + 3 \\ \hline -2n^3 - 6n^2 & 2n^2 - 6n + 4 \\ \hline -6n^2 - 14n + 2 & \\ 6n^2 + 18n & /1 \\ \hline 4n + 2 & \\ -4n - 12 & \\ \hline -10 & \end{array}$$

أ) نضع : $PGCD(\alpha; \beta) = d$ و $PGCD(\beta; 10) = d'$

$$\begin{cases} d \mid \alpha \\ d \mid \beta \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d \mid (2n^2 - 6n + 4)\beta \\ d \mid \beta \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d \mid 10 \\ d \mid \beta \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d \mid \alpha \\ d \mid \beta \end{cases} \\ \begin{cases} d' \mid \alpha \\ d' \mid \beta \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d' \mid (2n^2 - 6n + 4)\beta - 10 \\ d' \mid \beta \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d' \mid 10 \\ d' \mid \beta \end{cases} \\ PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10) : \text{ إذن } d = d' \end{cases}$$

ب) $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$ ومنه $d \in D_{10}$ ومنه $d \in \{1; 2; 5; 10\}$

ج) $PGCD(\alpha; \beta) = 5$ إذن $PGCD(10; \beta) = 5$ ومنه $\beta = 5k$ (مع k عدد طبيعي فردي) ومنه $\beta = 5(2\ell + 1)$

$$\text{ومنه } n + 3 = 10\ell + 5 \text{ إذن } n = 10\ell + 2 ; \ell \in \mathbb{N}$$

$$2) \text{ أ) } 4^3 \equiv 9[11]; 4^4 \equiv 3[11]; 4^5 \equiv 1[11] ; 4^0 \equiv 1[11]; 4^1 \equiv 4[11]; 4^2 \equiv 5[11]$$

$$4^{5k+3} \equiv 9[11]; 4^{5k+4} \equiv 3[11] ; 4^{5k} \equiv 1[11]; 4^{5k+1} \equiv 4[11]; 4^{5k+2} \equiv 5[11]$$

$$\text{ب) } \begin{cases} 4^{5(2\ell+2)} + 4^{5(2\ell)+2} + 10\ell + 2 \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$$

$$4^{5(2\ell+2)} + 4^{5(2\ell)+2} + 10\ell + 2 \equiv 0[11] \text{ ومنه } 4^{5(2\ell+2)} \equiv 1[11] \text{ ومنه } 4^{5(2\ell)+2} \equiv 5[11]$$

$$\ell \equiv -3[11] \text{ ومنه } \ell \equiv 8[11] \text{ ومنه } \ell = 11m + 8 \text{ ومنه } n = 10(11m + 8) + 2$$

$$\text{إذن } n = 110m + 82 ; m \in \mathbb{N}$$

حل التمرين 17 ▲ للعودة إلى التمرين انظر هنا

$$1) \begin{cases} 153 - 3 = 15 \times 10 \\ 153 - 6 = 7 \times 21 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 153 \equiv 3[15] \\ 153 \equiv 6[7] \end{cases} \text{ ومنه العدد 153 هي حل للجمللة (S)}$$

$$2) \text{ إذن } \begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \\ x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$$

$$\text{ومنه حسب خواص الموافقات نجد : } \begin{cases} x \equiv x_0[15] \\ x \equiv x_0[7] \\ x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases} \text{ حل } x_0 \text{ لـ } S$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{array} \right. \text{ ومنه } x \text{ حل للجملـة (S)}$$

$$\left(\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{array} \right\} \right) \text{ تكافئ (S) حل للجملـة (S) تكافئ}$$

$$153/3 \text{ حل لـ (S) تكافئ} \left\{ \begin{array}{l} x - 153 \equiv 0[15] \\ x - 153 \equiv 0[7] \end{array} \right. \text{ ومنه } x - 153 \equiv 0[105] \text{ تكافئ } x \equiv 48[105] \text{ تكافئ}$$

$$x = 105k + 48 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \\ 500 \leq x \leq 600 \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} x = 15\alpha + 3 \\ x = 7\beta + 6 \\ 500 \leq x \leq 600 \end{array} \right. /4$$

$$452 \leq 105k \leq 552 \text{ ومنه } 4.3 \leq k \leq 5.3 \text{ ومنه } k = 5$$

$$\text{و عليه } x = 573 \text{ إذن عدد الكتب هو } 573$$

حل التمرين 18 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$13(x-1) = 7(y-2) \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 13x - 7y = -1 \\ 13(1) - 7(2) = -1 \end{array} \right. /1$$

$$x = 7k + 1 \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه حسب غوص } 7 \nmid x-1 \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 7 \nmid 13(x-1) \\ PGCD(7;13) = 1 \end{array} \right.$$

$$13(7k) = 7(y-2) \text{ ومنه } k \in \mathbb{Z} \text{ ؛ حلول المعادلة (E) هي } y = 13k + 2$$

$$S = \{(7k + 1; 13k + 2)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$13\beta - 7\alpha = -1 \text{ ومنه } (\beta; \alpha) = (7k + 1; 13k + 2) \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} a = 7\alpha - 1 \\ a = 13\beta \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{array} \right. /2$$

$$a = 91k + 13 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$9^{3k} \equiv 1[7]; 9^{3k+1} \equiv 2[7]; 9^{3k+2} \equiv 4[7] ; k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } 9^3 \equiv 1[7] ; 9^0 \equiv 1[7]; 9^1 \equiv 2[7]; 9^2 \equiv 4[7] /3$$

$$b = \overline{\alpha 00 \beta 086}^9 = 6 + 8(9) + \beta(9)^3 + \alpha(9)^6 /4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\alpha(9)^6}_{\equiv 1[7]} + \underbrace{\beta(9)^3}_{\equiv 1[7]} + \underbrace{78}_{\equiv 1[7]} \equiv 0[7] \\ \underbrace{\alpha(9)^6}_{\equiv 1[13]} + \underbrace{\beta(9)^3}_{\equiv 1[13]} + \underbrace{78}_{\equiv 1[13]} \equiv 0[13] \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} b \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[13] \end{array} \right. \text{ ومنه } b \equiv 0[91] \text{ ينتج عنه}$$

$$\alpha + \beta = 13 \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 91k + 13 \\ 0 < \alpha + \beta < 18 \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta \equiv -1[7] \\ \alpha + \beta \equiv 0[13] \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + 1 \equiv 0[7] \\ \alpha + \beta \equiv 0[13] \end{array} \right.$$

$$(\alpha; \beta) \in \{(5;8); (8;5); (6;7); (7;6)\} \text{ ومنه ؛ حيث } (\alpha < 9; \beta < 9) \text{ ؛ ومنه}$$

حل التمرين 20 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$n + 3 \nmid 3n^3 - 11n + 48 \text{ ومنه } (n+3)(3n^2 - 9n + 16) = 3n^3 - 11n + 48 \text{ (أ) } /1$$

(ب) مميز ثلاثي الحدود $3x^2 - 9x + 16$ هو $\Delta = -111$ (وهو عدد سالب) وبالتالي $3x^2 - 9x + 16 > 0$ مهما كان x من $\mathbb{R}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم

2/ نضع $PGCD(a; b) = d$ و $PGCD(bc - a; b) = d'$

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid a \\ d \mid b \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d \mid bc - a \\ d \mid b \end{array} \right\} \text{ ومنه } d \mid d'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d' \mid bc - a \\ d' \mid b \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d' \mid bc - a \\ d' \mid bc \end{array} \right\} \text{ ومنه } d' \mid a \text{ ومنه } d' \mid d$$

مما سبق: أي $d = d'$ $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$

3/ من أجل $a = 48; b = n + 3; c = 3n^2 - 9n + 16$ وحسب السؤال السابق نجد

$$PGCD(3n^3 - 11n; n + 3) = PGCD(48; n + 3)$$

$$D_{48} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\} \quad 4/ أ$$

ب) لدينا $n + 3 \in \mathbb{N}$ ؛ الشرط اللازم لكي يكون A عدد طبيعي هو $3n^3 - 11n \geq 0$ ؛ هذا الشرط محقق من أجل $n \geq 2$ أو $n = 0$

من أجل $n = 0$ ؛ $A = 0$ ومنه $A \in \mathbb{N}$

من أجل $n \geq 2$ يكون $A \in \mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان $n + 3 \mid 3n^3 - 11n$ أي $PGCD(3n^3 - 11n; n + 3) = n + 3$

حسب السؤال السابق نستنتج أن: $PGCD(48; n + 3) = n + 3$ ومنه $n + 3 \mid 48$ ومنه $n + 3 \in D_{48}$ أي $n + 3 \in \{6; 8; 12; 16; 24; 48\}$

وبالتالي: $n \in \{3; 5; 9; 13; 21; 45\}$ ؛ قيم n حتى يكون A طبيعي هي $n \in \{0; 3; 5; 9; 13; 21; 45\}$

حل التمرين 21 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ أ) $2^0 \equiv 1[7]; 2^1 \equiv 2[7]; 2^2 \equiv 4[7]; 2^3 \equiv 1[10]$

$k \in \mathbb{Z}$	$3k + 2$	$3k + 1$	$3k$	$n =$
$[7]$	4	2	1	$2^n \equiv$

ومنه:

ب) $1962 \equiv 2[7]$ ؛ ومنه $1962^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$ ؛ $1954 = 3 \times 651 + 1$ إذن $1962^{1954} \equiv 2[7]$ ؛ $1954 \equiv 1[7]$ ومنه $1962^{1954} \equiv 2[7]$ ؛ $2015 \equiv 6[7]$ ؛ $1954^{1962} \equiv 1[7]$ ومنه $1954^{1962} \equiv 1[7]$ ؛ $2015 \equiv 6[7]$ ؛ $6 \equiv -1[7]$ ومنه $2015^{53} \equiv -1[7]$ لأن 53 عدد فردي ومنه

$$1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 2 - 1 - 1[7] \text{ إذن } 1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 0[7]$$

2/ أ) $\sqrt{89} \approx 9.4$ ؛ و 89 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية 2; 3; 5; 7 ومنه 89 أولي

ب) لدينا $7832 = 2^3 \times 11 \times 89$ ومنه عدد القواسم الطبيعية للعدد 89 هو $(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$ وهي

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^0 \times 11 \times 89 = 979 \\ 2^1 \times 11 \times 89 = 1958 \\ 2^2 \times 11 \times 89 = 3916 \\ 2^3 \times 11 \times 89 = 7832 \end{array} \right\} \text{ و } \left\{ \begin{array}{l} 2^0 \times 11^0 \times 89 = 89 \\ 2^1 \times 11^0 \times 89 = 178 \\ 2^2 \times 11^0 \times 89 = 356 \\ 2^3 \times 11^0 \times 89 = 712 \end{array} \right\} \text{ و } \left\{ \begin{array}{l} 2^0 \times 11 \times 89^0 = 11 \\ 2^1 \times 11 \times 89^0 = 22 \\ 2^2 \times 11 \times 89^0 = 44 \\ 2^3 \times 11 \times 89^0 = 88 \end{array} \right\} \text{ و } \left\{ \begin{array}{l} 2^0 \times 11^0 \times 89^0 = 1 \\ 2^1 \times 11^0 \times 89^0 = 2 \\ 2^2 \times 11^0 \times 89^0 = 4 \\ 2^3 \times 11^0 \times 89^0 = 8 \end{array} \right\}$$

ومنه $D_{7832} = \{1; 2; 4; 8; 11; 22; 44; 88; 89; 178; 356; 712; 979; 1958; 3916; 7832\}$

ج) نضع $d = PGCD(981; 977)$ ؛ ومنه d يقسم $981 - 977$ أي d يقسم 4 إذن $d \in \{1; 2; 4\}$ ؛ لكن 2 و 4 لا

يقسمان العددين 977 و 981 ومنه $PGCD(977; 981) = 1$ فهما إذن أوليان فيما بينهما

$$\begin{cases} 4x'^2 - 4y'^2 = 31328 \\ 2x - 2y \equiv 8[22] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x = 2x' \\ y = 2y' \\ PGCD(x', y') = 1 \end{cases} \text{ ومنه } PGCD(x; y) = 2 ; \begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases} \quad /3$$

$$\text{ومنه } \begin{cases} x'^2 - y'^2 = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} (x' + y')(x' - y') = 31328 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases} \text{ ومنه } (x' + y') \text{ قاسمين للعدد } 7832$$

$$\begin{cases} x' + y' = 1958 \text{ و } x' - y' = 4 \\ x' + y' = 22 \text{ و } x' - y' = 356 \end{cases} \text{ وباقي قسمة } x' - y' \text{ على } 11 \text{ هو } 4 \text{ ومنه}$$

$$\begin{cases} x' - y' = 4 \\ x' + y' = 1958 \end{cases} \text{ من هذه الجملة نجد } x' = 981 \text{ و } y' = 977 ; \begin{cases} x' - y' = 356 \\ x' + y' = 22 \end{cases} \text{ ، مو هذه الجملة نجد}$$

$$x' = 189 \text{ و } y' = -167 \text{ ، (مرفوض لأن الحلين طبيعيين)}$$

$$\text{بالتعويض نجد } x = 981 \times 2 = 1962 \text{ و } y = 977 \times 2 = 1954$$

4/ أ) حسب مبرهنة بيزو لدينا a أولي مع b معناه يوجد عدنان صحيحان α و β بحيث $\alpha a + \beta b = 1 \dots (1)$ ،

a أولي مع c معناه يوجد عدنان صحيحان α' و β' بحيث $\alpha' a + \beta' c = 1 \dots (2)$ بحيث

$$\alpha \alpha' a^2 + \alpha \alpha \beta' c + \beta b \alpha' a + \beta b \beta' c = 1 \text{ أي } (\alpha a + \beta b)(\alpha' a + \beta' c) = 1 \text{ نجد (2) في (1) بضرب}$$

$$\text{ومنه } 1 = (\alpha \alpha' a + \alpha \beta' c + \beta b \alpha') a + \beta \beta' b c = 1 \text{ ومنه } a \text{ و } bc \text{ أوليان فيما بينهما}$$

ب) التحقق $PGCD(a; b) = 1$ محققة ؛ نفرض أن $PGCD(a; b^n) = 1$ و نبه أن $PGCD(a; b^{n+1}) = 1$

$PGCD(a; b) = 1$ و $PGCD(a; b^n) = 1$ ؛ فحسب ما سبق $PGCD(a; b \times b^n) = 1$ و $PGCD(a; b^{n+1}) = 1$

1) ومنه من أجل كل عدد طبيعي n $PGCD(a; b^n) = 1$

$$\text{ج) } PGCD(1954; 1962) = 2 PGCD(977; 981) \text{ ومنه } PGCD(1954; 1962) = 2^{1954} PGCD(2^8 \times 977^{1962}; 981^{1954})$$

لدينا $PGCD(977; 981) = 1$ (فحسب ب) $PGCD(977^{1962}; 981^{1954}) = 1$ ولدينا $PGCD(2; 981) = 1$ فحسب

$$\text{ب) أيضاً } PGCD(2^8; 981^{1954}) = 1 \text{ ومنه حسب أ) } PGCD(2^8 \times 977^{1962}; 981^{1954}) = 1$$

$$PGCD(1954^{1962}; 1962^{1954}) = 2^{1954}$$

حل التمرين 22 ▲ للعودة إلى التمرين انظر هنا

1/ رقم آحاد $n^5 - n$ هو 0 معناه $n^5 - n$ يقبل القسمة على 10 ؛ من قواسم 10 هناك قاسمين أوليين هما 2 و 5

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

عدد زوجي أي مضاعف للعدد 2 ؛ إذن $n^5 - n$ مضاعف للعدد 2

إذا كان n مضاعف للعدد 5 فإن $n^5 - n$ مضاعف للعدد 5

إذا كان n ليس مضاعف لـ 5 فإن بواقي قسمته على 5 هي 1 أو 2 ؛ أو 3 ؛ أو 4

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 1 فإن $n-1$ مضاعف للعدد 5 ومنه $n^5 - n$ مضاعف للعدد 5

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 4 فإن $n+1$ مضاعف للعدد 5 ومنه $n^5 - n$ مضاعف للعدد 5

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو r حيث $r \in \{2; 3\}$ ومنه $n = 5k + r$ إذن $n^2 = 25k^2 + 10k \times r + r^2$ ومنه

$$n^2 + 1 = 25k^2 + 10k \times r + r^2 + 1$$

$r \in \{2; 3\}$ ومنه $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5$ أو $n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10$ ومنه $n^2 + 1$ مضاعف لـ 5 إذن $n^5 - n$ مضاعف للعدد 5
في كل الحالات $n^5 - n$ مضاعف للعدد 5 و مضاعف للعدد 2 إذن فهو مضاعف للعدد 10 وبالتالي رقم آحاده 0
لدينا $n^{p+1} - n^{p+5} = n^p(n^5 - n)$ ؛ مما سبق $n^5 - n$ رقم آحاده 0 ومنه $n^{p+1} - n^{p+5}$ رقم آحاده هو 0 ومنه n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد

حل التمرين 23 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

لإثبات أن $n^7 - n$ يقبل القسمة على 14 يكفي أن نثبت أنه يقبل القسمة على 2 و 7 لأنهما أوليان فيما بينهما
لدينا $n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n-1)(n^2 + n + 1)(n^3 + 1)$
العدد $n(n-1)$ هو عدد زوجي لأنه جداء عددين طبيعيين متتابعين ومنه العدد $n^7 - n$ يقبل القسمة على 2؛ يمكن
أن نثبت أن العدد $n^7 - n$ يقبل القسمة على 7 وذلك بتميز الحالات
 $n = 7k; n = 7k + 1; n = 7k + 2; n = 7k + 3; n = 7k + 4; n = 7k + 5; n = 7k + 6$
بما أن العدد $n^7 - n$ يقبل القسمة على 2 و 7 فهو يقبل القسمة على 14 فهو مضاعف لـ 14

حل التمرين 25 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ $p = 2$ المعادلة E تصبح $x^2 + y^2 = 4$ ومنه $y^2 = 4 - x^2$ ومنه $y^2 = (2-x)(2+x)$ وعليه $2-x > 0$ و $x+2 > 0$
لأن $y \in \mathbb{N}^*$ ومنه $x < 2$ و $x \in \mathbb{N}^*$ إذن $x = 1$
المعادلة E تصبح $y^2 = 3$ وهذه المعادلة الأخيرة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{N}^*$ ؛ وعليه المعادلة E لا تقبل حلولاً في $\mathbb{N}^*$ من أجل $p = 2$
2/ أ) نفرض $p \neq 2$ و $(x; y)$ حل لـ E
نفرض أن x و y زوجيان أي $x = 2\ell$ و $y = 2\ell'$ حيث $\ell; \ell' \in \mathbb{N}$ عدنان طبيعيان؛ ومنه $4\ell^2 + 4\ell'^2 = p^2$ ومنه $2(2\ell^2 + 2\ell'^2) = p^2$ ومنه 2 يقسم p^2 ومنه 2 يقسم p وهذا تناقض لأن p أولي و $p \neq 2$
نفرض أن x و y فرديان أي $x = 2\ell + 1$ و $y = 2\ell' + 1$ حيث $\ell; \ell' \in \mathbb{N}$ عدنان طبيعيان؛ ومنه $2(2\ell^2 + 2\ell + 2\ell'^2 + 2\ell' + 1) = p^2$ ومنه 2 يقسم p^2 ومنه 2 يقسم p وهذا تناقض لأن p أولي و $p \neq 2$ ومنه x و y من شفتين مختلفتان
ب) نفرض أن p يقسم x ومنه $x = pk$ حيث $k \in \mathbb{N}$ ومنه $y^2 = p^2(1 - k^2)$ ، ومنه $1 \geq k$ وعليه $k = 0$ أو $k = 1$
من أجل $k = 0$ نجد $x = 0$ ؛ من أجل $k = 1$ نجد $y = 0$ ؛ لكن العدنان x و y عدنان طبيعيان غير معدومين
نصل إلى نفس النتائج إذا افترضنا أن p يقسم y ؛ وعليه p لا يقسم x ولا يقسم y
ج) نضع $PGCD(x^2; y^2) = d$ ؛ $d \mid x^2$ و $d \mid y^2$ ومنه $d \mid x^2 + y^2$ ومنه $d \mid p^2$ ومنه $d \in \{1; p; p^2\}$
د) بما أن p لا يقسم x ولا يقسم y ومنه $d \neq p$ و $d \neq p^2$ ومنه $d = 1$ ؛ إذن x و y أوليان فيما بينهما
3/ أ) حل لـ E معناه $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$ ؛ وهذا الطحوق بسيط
ب) في حالة $p = 5$ أي $p = 1^2 + 2^2$ مم سبق نجد $(3; 4)$ حل لـ E ؛ وفي حالة $p = 13$ أي $p = 3^2 + 2^2$ إذن $(5; 12)$

حل لـ E

1/ أ) $p = 3$ ؛ نفرض أن $u^2 + v^2 = 3$ ومنه $u^2 = 3 - v^2$ ومنه $v^2 < 3$ ومنه $v^2 = 1$ ومنه $v = 1$ إذن $u^2 = 2$ ؛
لكن 2 ليس مربعاً تاماً ومنه 3 ليس مجموع مربعين
المعادلة E تصبح $x^2 + y^2 = 9$ ومنه

حل التمرين 26 ▲ للعودة إلى التمرين انظر هنا

أ) معناه $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x = 5k + 3 \\ x = 6k' + 1 \end{cases}$ ومنه $5k = 6k' - 2$ ومنه $5k \equiv -2[6]$ أي $5k \equiv 4[6]$ ومنه $5k \equiv 2[6]$ ومنه $k \equiv 2[6]$ ومنه $k = 6\ell + 2$ إذن $x = 30\ell + 13$; $\ell \in \mathbb{Z}$
ب) معناه $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x \equiv 1[2] \\ x \equiv 1[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3x \equiv 3[6] \\ 2x \equiv 2[6] \end{cases}$ ومنه $x \equiv 1[6]$ ومنه $x = 6\ell + 1$; $\ell \in \mathbb{Z}$

حل التمرين 28 ▲ للعودة إلى التمرين انظر هنا

1/ الحرف (ث) يحوّل إلى الحرف (ذ) معناه $x = 3$ ترفق بـ $y = 8$ أي $8 \equiv 3a + b[28]$ ومنه $3a + b \equiv 8[28]$ ؛
الحرف (ص) يحوّل إلى الحرف (خ) معناه $x = 13$ ترفق بـ $y = 6$ أي $6 \equiv 13a + b[28]$ ومنه $13a + b \equiv 6[28]$ ولدينا $\begin{cases} 13a + b \equiv 6[28] \\ 3a + b \equiv 8[28] \end{cases}$

2/ مما سبق و بالطرح طرفاً لطرف بين الموافقتين نجد $10a \equiv -2[28]$ ومنه $5a \equiv -1[14]$ ومنه $5a = 14k - 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$

3/ أ) لدينا $5a \equiv -1[14]$ ومنه $15a \equiv -3[14]$ حسب خواص الموافقات ومنه $a \equiv -3[14]$ ومنه $a \equiv 11[14]$

ب) لدينا $0 \leq a \leq 27$ ؛ $a \equiv 11[14]$ و أولي إذن $a = 11$

لدينا $13a + b \equiv 6[28]$ أي $13 \times 11 + b \equiv 6[28]$ ومنه $b \equiv -137[28]$ ومنه $b \equiv 3[28]$ ولدينا $0 \leq b \leq 27$ إذن $b = 3$

مما سبق نجد $a = 11$ و $b = 3$ و يصبح التشفير التآلفي كما يلي $y \equiv 11x + 3[28]$

ج) 11 أولي لا يقسم 28 إذن $PGCD(11; 28) = 1$ و عليه العددا 11 و 28 أوليان فيما بينهما

4/ يمكن الآن إيجاد تشفير الجملة المعطاة ؛ الجدول أدناه يوضح التشفير المحصل عليه

	A	B	C	D
1		x	y	
2		0	3	ن
3	ن	1	14	ن
4	ن	2	25	ن
5	ن	3	8	ن
6	ن	4	19	ن
7	ن	5	2	ن
8	ن	6	13	ن
9	ن	7	24	ن
10	ن	8	7	ن
11	ن	9	18	ن
12	ن	10	1	ن
13	ن	11	12	ن
14	ن	12	23	ن
15	ن	13	6	ن
16	ن	14	17	ن
17	ن	15	0	ن
18	ن	16	11	ن
19	ن	17	22	ن
20	ن	18	5	ن
21	ن	19	16	ن
22	ن	20	27	ن
23	ن	21	10	ن
24	ن	22	21	ن
25	ن	23	4	ن
26	ن	24	15	ن
27	ن	25	26	ن
28	ن	26	9	ن
29	ن	27	20	ن

حل تشفير الجملة السابقة هو
الموافقات في مجموعة الأعداد الصحيحة