

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و المعروف كما يلي:

$$(1) \text{ إذا كان } \vec{u} = \vec{0} \text{ أو } \vec{v} = \vec{0} \text{ فإن } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(2) \text{ إذا كان } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ و } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ فإن } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

$$(3) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \text{ و } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$(4) \text{ إذا كان } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ و } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ فإن العبارة التحليلية للجداء السلمي هي } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

شرط تعامد مستقيمين $(\Delta); (D)$ مستقيمين حيث $\vec{n}_\Delta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ و $\vec{n}_D \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ هما على الترتيب شعاعي الناضمين لهما

$$\left\{ \begin{array}{l} (D): ax + by + c = 0; \\ (\Delta): \alpha x + \beta y + k = 0 \end{array} \right. \text{ القول ان } (\Delta) \perp (D) \text{ يكفي ان :}$$

$$\vec{n}_\Delta \cdot \vec{n}_D = 0 \text{ او شعاعي توجيههما متعامدان او جداء مليهما يساوي -1}$$

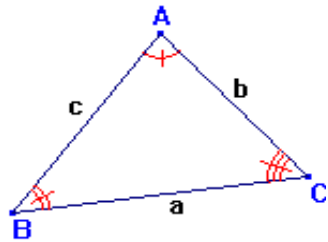
مبرهنة (المسافة بين نقطة و مستقيم):

المسافة بين نقطة و مستقيم هي أصغر مسافة بين هذه النقطة و نقطة كيفية من هذا المستقيم

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0, y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax + by + c = 0$ هي: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

العلاقات المترية في مثلث

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB = c$ ، $AC = b$ و $BC = a$. لدينا العلاقات التالية:



$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \quad \text{مساحة المثلث}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} \quad \text{قانون الجيوب}$$

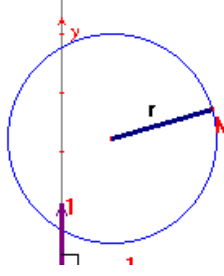
مبرهنة المتوسط: A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$$

معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها

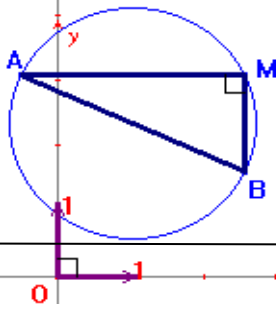
مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0, y_0)$ و طول نصف قطرها r ($r > 0$) هي :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



معادلة دائرة علم نقطتين متناظرتين قطريا منها

الدائرة التي قطرها [AB] هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$



دساتير الجمع

$$\begin{cases} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \end{cases}$$

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}} ; ; \boxed{\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

تمارين محلولة

التمرين 01 :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط $A(0, \sqrt{3})$ ، $B(0, -\sqrt{3})$ ، $C(0, -\sqrt{3})$ ، $M(x, y)$ بين أن مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ هي الدائرة (C) يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها.

2. اكتب معادلة المستقيمين (T_1) ، (T_2) مماسي الدائرة (C) في النقطتين B, C على الترتيب.

3. بين أن (T_1) يوازي (T_2) .

4. ارسم الدائرة (C) والمستقيمين (T_1) ، (T_2) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

تصحیح مفصل:

(1) تبين أن مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ هي الدائرة (C) يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها :

$$\overline{MC} \begin{pmatrix} x_C - x_M \\ y_C - y_M \end{pmatrix} \rightarrow \overline{MC} \begin{pmatrix} -x \\ -\sqrt{3} - y \end{pmatrix} \text{ و } \overline{MB} \begin{pmatrix} x_B - x_M \\ y_B - y_M \end{pmatrix} \rightarrow \overline{MB} \begin{pmatrix} -x \\ \sqrt{3} - y \end{pmatrix} \quad \text{ننا}$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = (-x)(-x) + (\sqrt{3} - y)(-\sqrt{3} - y) = x^2 + y^2 - 3 \text{ إذن}$$

ومنه $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ معناه $x^2 + y^2 - 3 = 0$ أي $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{3})^2$ وهي تمثل المعادلة الديكارتية للدائرة ذات المركز $O(0;0)$ ونصف القطر $r = \sqrt{3}$ وقطرها $[BC]$.

(2) كتابة معادلة للمستقيمين $(T_1), (T_2)$ مماسي الدائرة (C) في النقطتين B, C على الترتيب :

- من خصائص المماس أن حامله يكون عموديا على حامل القطر اذن (T_1) مماس للدائرة (C) في النقطتين C فهذا يعني أنه إذا كانت $M(x, y)$ نقطة كيفية من المستقيم (T_1) فان حاملا الشعاعين

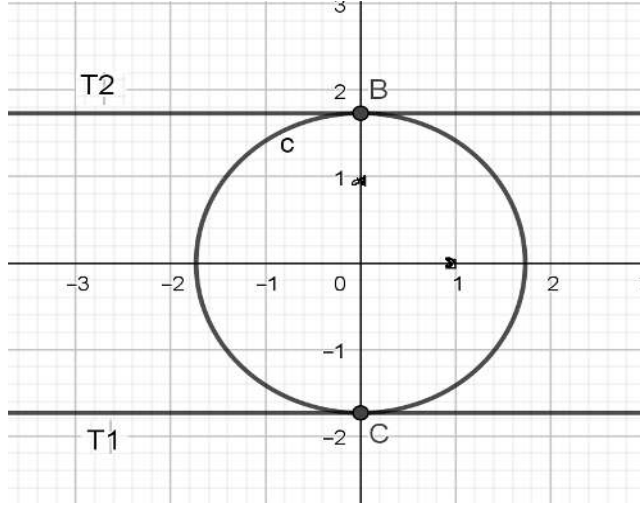
$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ متعامدان أي $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ لكن $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x \\ y + \sqrt{3} \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ معناه $0 \times x + (-2\sqrt{3})(y + \sqrt{3}) = 0$ أي $-2\sqrt{3}y - 6 = 0$ أي $y = -\sqrt{3}$ وهي معادلة (T_1)

- وب نفس الطريقة (T_2) مماس للدائرة (C) في النقطة B فهذا يعني أنه إذا كانت $M(x, y)$ نقطة كيفية من المستقيم (T_2) فإن حاملها الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان أي $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ لكن

$0 \times x + (-2\sqrt{3})(y - \sqrt{3}) = 0$ معناه $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ومنه $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x \\ y - \sqrt{3} \end{pmatrix}$
 أي $-2\sqrt{3}y + 6 = 0$ أي $y = \sqrt{3}$ وهي معادلة (T_2) .

(3) تبيين أن المستقيمين $(T_1), (T_2)$ متوازيين: نلاحظ أن معادلتى المستقيمين $(T_1), (T_2)$ من الشكل $y = kx$ حيث k عدد حقيقي ثابت ونعلم أن هذا النوع من المستقيمات موازي لحامل محور الترتيب اذن بما أنهما يوازيان معا حامل محور الترتيب فهما متوازيان.

(4) رسم الدائرة (C) والمستقيمين $(T_1), (T_2)$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$:



التمرين 02 :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ليكن (D) مستقيم معادلته: $3x + 3y - 5 = 0$

1. اكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل $A(-1; 2)$ و يعامد (D) .

2. عين إحداثيي النقطة B نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

3. عين مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق: $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = AB$

تصحيح مفصل:

1) المستقيم (Δ) الذي يشمل $A(-1; 2)$ و يعامد (D) معناه شعاع توجيه المستقيم (D) حامله يعامد

المستقيم (Δ) ، حسب تعريف شعاع توجيه مستقيم نجد $\vec{v}_{(D)} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v}_{(D)} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

إذن إذا كانت $M(x, y)$ نقطة من المستقيم (Δ) فإن $\overline{AM} \perp \vec{v}_{(D)}$ أي $\overline{AM} \cdot \vec{v}_{(D)} = 0$

وهي معادلة للمستقيم (Δ) .
ومنه $\overline{AM} \cdot \vec{v}_{(D)} = 0 \Rightarrow (x+1)(-3) + (y-2)(3) = 0$ ومنه نجد $x - y + 3 = 0$

2) $B(x_B; y_B)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) معناه إحداثييهما هما حل للجملة :

$$\text{ومنه } \begin{cases} 3(y_B - 3) + 3y_B - 5 = 0 \\ x_B = y_B - 3 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 3x_B + 3y_B - 5 = 0 \\ x_B - y_B + 3 = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 3x + 3y - 5 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{أي } B\left(\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right) \cdot \begin{cases} y_B = \frac{7}{3} \\ x_B = \frac{7}{3} - 3 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{3} + 1\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{164}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9} \times 41} = \frac{2}{3} \sqrt{41} \quad (3)$$

$$\text{و } \overline{MA} \begin{pmatrix} -1-x \\ 2-y \end{pmatrix} \text{ و } \overline{MB} \begin{pmatrix} \frac{7}{3}-x \\ -\frac{2}{3}-y \end{pmatrix}$$

ومنه $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = AB$ معناه $\left(\frac{7}{3} - x\right)(-1 - x) + \left(\frac{-2}{3} - y\right)(2 - y) = \frac{2}{3}\sqrt{41}$ ومنه

$$-\frac{7}{3} - \frac{7}{3}x + x + x^2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3}y - 2y + y^2 = \frac{2}{3}\sqrt{41}$$

ومنه $\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + \left(y^2 - \frac{4}{3}y\right) - \frac{11}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{41}$ ومنه

$$\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + \left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) - \frac{11}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{41}$$

ومنه $\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right) + \left(\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right) - \frac{11}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{41}$ ومنه

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6\sqrt{41} + 41}{9}$$

ومنه نجد $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{41}{9} = \frac{2}{3}\sqrt{41}$ وهي

معادلة لدائرة (C) ذات المركز $\omega\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ ونصف القطر $r = \frac{\sqrt{6\sqrt{41} + 41}}{3}$.

التمرين 03 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

لتكن (C) مجموعة نقاط $M(x, y)$ معرفة كمايلي: $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 3x + y + \frac{5}{2} = 0$

1. (ا) بين أن (C) هي دائرة يطلب تحديد احداثي مركزها Ω و نصف قطرها.

(ب) اثبت أن النقطة $A(1; -2)$ من (C).

2. اكتب معادلة المستقيم (T) مماس لـ (C) عند النقطة A.

3. لتكن النقطة B نظيرة النقطة Ω بالنسبة للنقطة A

(أ) عين احداثي النقطة B

(ب) اكتب معادلة الدائرة (C') مركزها النقطة B والمماس لـ (C) عند النقطة A

4. ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) معادلته: $6x + 2y - 5 = 0$ و الدائرة (C)

تصحيح مفصل:

(1) (أ) لنا $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 3x + y + \frac{5}{2} = 0$ ومنه بضرب الطرفين في 2 نجد $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$

ومنه $(x^2 - 6x + 9 - 9) + (y^2 + 2y + 1 - 1) + 5 = 0$ ومنه $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5 = (\sqrt{5})^2$ إذن

هي دائرة مركزها $\Omega(3; -1)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{5}$.

(ب) لنا $(x_A - 3)^2 + (y_A + 1)^2 = (1 - 3)^2 + (-2 + 1)^2 = 4 + 1 = 5$ ومنه $A(1; -2)$ من (C).

(2) المستقيم (T) مماس لـ (C) عند النقطة A معناه: من أجل كل نقطة $M(x; y)$ منه فإن $\overline{AM} \perp \overline{\Omega A}$ أي

$\overline{AM} \cdot \overline{\Omega A} = 0$ ومنه $\overline{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} \cdot \overline{\Omega A} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ ومنه $(-2)(x-1) + (-1)(y+2) = 0$ ومنه نجد

$2x + y = 0$ وهي معادلة للمستقيم (T).

(3) أ) النقطة B نظيرة النقطة Ω بالنسبة للنقطة A معناه $\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ومنه
 $\overrightarrow{A\Omega} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - 1 \\ y_B + 2 \end{pmatrix} = \vec{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{A\Omega} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - 1 \\ y_B + 2 \end{pmatrix} = \vec{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ومنه
 $\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B + 1 \\ y_B + 3 \end{pmatrix} = \vec{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ومنه بالمطابقة نجد
 $B(-1; -3)$ أي $\begin{cases} x_B + 1 = 0 \\ y_B + 3 = 0 \end{cases}$

ب) الدائرة (C') مركزها النقطة B والمماسية لـ (C) عند النقطة A نصف قطرها هو $r' = B\Omega = r = \sqrt{5}$
 لأن B نظيرة النقطة Ω بالنسبة للنقطة A

ومنه فإ معادلة (C') هي $(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = (\sqrt{5})^2$ أي $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$

(4) لدراسة الوضع النسبي بين المستقيم (D) الذي معادلته: $6x + 2y - 5 = 0$ و الدائرة (C) نحسب بعد مركز الدائرة (C) عن هذا المستقيم ومنه

$$d(\Omega; (D)) = \frac{|6x_\Omega + 2y_\Omega - 5|}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{|18 - 2 - 5|}{\sqrt{36 + 4}} = \frac{|11|}{\sqrt{40}} = \frac{11}{\sqrt{40}} \approx 1,74 < \sqrt{5}$$

(C) عن هذا المستقيم أقل من نصف قطرها ومنه فإن هذا المستقيم يقطع الدائرة (C) في نقطتين.

التمرين 04 (واجب منزلي):

لتكن A و B نقطتان متميزتان من المستوي و I منتصف $[AB]$ حيث $AB = 5$

1. نعتبر النقطة C حيث $3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

أ) اكتب $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$

* بين أن $C \in (E)$

* عين ثم أنشئ المجموعة (E).

2. (F) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2 + MB^2 = 7$

• عين ثم أنشئ المجموعة (F).

3. (G) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

• عين ثم أنشئ المجموعة (G).

تصحيح مفصل:

(1) أ) لنا $3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ ومنه حسب علاقة شال نجد $3\overrightarrow{CA} + 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ ومنه

$5\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ومنه $2\overrightarrow{AB} = -5\overrightarrow{CA} = 5\overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

ب) (E) هي مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$

* تكون $C \in (E)$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB})^2 = \frac{2}{5}AB^2 = \frac{2}{5}5^2 = \frac{50}{5} = 10$

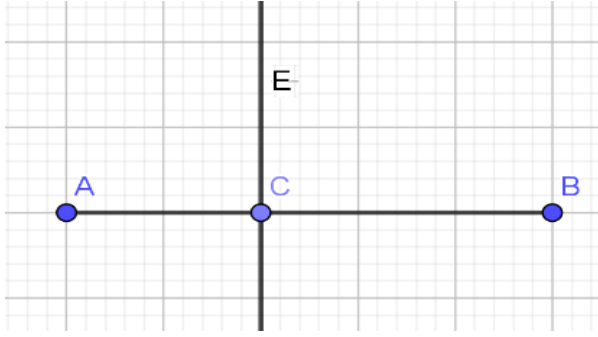
* تعيين وإنشاء المجموعة (E):

لنا $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$ ومنه حسب شال نجد $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) \cdot \overrightarrow{AB} = 10$ ومنه $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$

$10 + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$ أي $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ إذن المجموعة (E) هي نقاط المستقيم الذي يعامد المستقيم (AB)

في النقطة C

إنشاء المجموعة (E):



(2) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2 + MB^2 = 7$:
تعيين وإنشاء المجموعة (F) :

لنا $MA^2 + MB^2 = 7$ ومنه بإدخال النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ بحسب علاقة شال نجد :

$$MA^2 + MB^2 = 7 \text{ تكافئ } (\vec{MA})^2 + (\vec{MB})^2 = 7 \text{ ومنه } (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 7 \text{ ومنه } MI^2 + IA^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + MI^2 + IB^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB} = 7$$

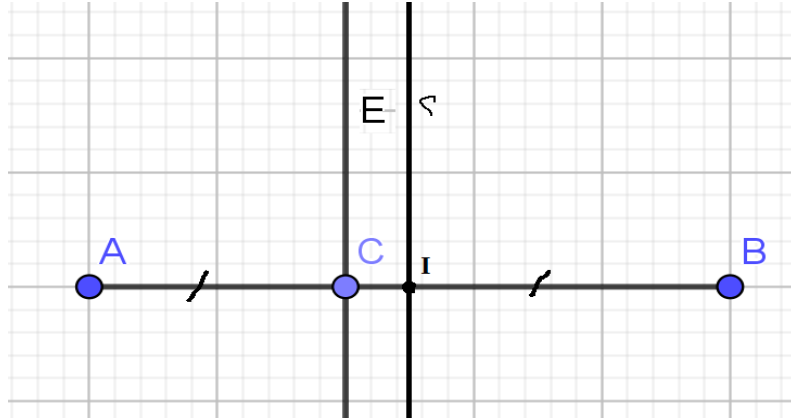
$$2MI^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA} + \vec{IB}) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 7 \text{ وحيث ان } \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \text{ و } IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2} \text{ لأن}$$

I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ إذن نجد $2MI^2 + \frac{50}{4} = 7$ أي $MI^2 = \frac{-22}{8} < 0$ وهنا مستحيل مربع عدد الذي هو دوما موجب يساوي عدد سالب تماما إذن المجموعة (F) هي مجموعة خالية.

(3) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $(\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot \vec{MA} = 0$:

تعيين وإنشاء المجموعة (Γ) :

لنا $(\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot \vec{MA} = 0$ ومنه $(\vec{MI} + \vec{IA} + \vec{MI} + \vec{IB}) \cdot \vec{MA} = 0$ ومنه $(2\vec{MI}) \cdot \vec{MA} = 0$ أي $2(\vec{MI} \cdot \vec{MA}) = 0$ ومنه فإن مجموعة النقط (Γ) هي محور القطعة المستقيمة $[AI]$.
الإنشاء:



التمرين 05:

لتكن A و B نقطتان متميزتان من المستوي حيث $AB = 6$
و (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MB = 2MA$

1. برهن انه من اجل كل نقطة M من المستوي لدينا

$$MB = 2MA \text{ تكافئ } (\vec{MB} + 2\vec{MA}) \cdot (\vec{MB} - 2\vec{MA}) = 0$$

2. لتكن I و J نقطتان من المستوي حيث $2\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ و $-2\vec{JA} + \vec{JB} = \vec{0}$

(أ) أنشئ النقطتان I و J

(ب) اثبت انه من اجل كل نقطة M من المستوي لدينا:

$$(\vec{MB} + 2\vec{MA}) \cdot (\vec{MB} - 2\vec{MA}) = 3\vec{MI} \cdot (-\vec{MJ})$$

3. عين ثم أنشئ المجموعة (E) .

تصحيح مفصل:

(1) لدينا $MB = 2MA$ ومنه بتربيع الطرفين نجد $MB^2 = 4MA^2$ وهي نفسها $(\overrightarrow{MB})^2 = 4(\overrightarrow{MA})^2$ ومنه

$$(\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}) = 0 \quad \text{ومنه} \quad (\overrightarrow{MB})^2 - 4(\overrightarrow{MA})^2 = 0$$

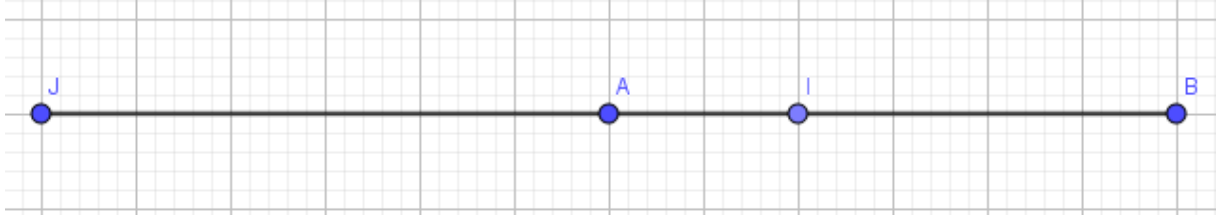
(2) أ) إنشاء النقطتين I و J:

لدينا $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ومنه باستعمال علاقة شال نجد $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ومنه نجد $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ أي

$$\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}}$$

أيضا $\overrightarrow{JB} = \vec{0} - 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ تكافئ $-2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ومنه $\boxed{\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB}}$.

الرسم:



(ب) اثبات انه من اجل كل نقطة M من المستوي فان: $(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}) = 3\overrightarrow{MI} \cdot (-\overrightarrow{MJ})$:

باستعمال علاقة شال نجد :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}) &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{IA}) \\ &= (3\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IA}) \cdot (-\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JA}) = 3\overrightarrow{MI} \cdot (-\overrightarrow{MJ}) \end{aligned}$$

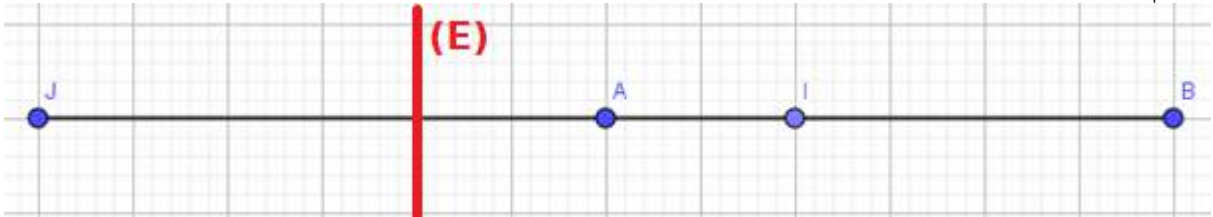
ذلك لان $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ و $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ من المعطيات.

(3) تعيين وانشاء المجموعة (E) :

وجدنا سابقا ان $(\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}) = 0$ وأيضا $(\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}) = 3\overrightarrow{MI} \cdot (-\overrightarrow{MJ})$ ومنه نجد $3\overrightarrow{MI} \cdot (-\overrightarrow{MJ}) = 0$ أي ان مجموعة النقط M هي نقط المستقيم المحوري للقطعة

المستقيمة [IJ] .

الرسم:



مجموعة الرياضيات بالجزائر